高校数学の解析指導における実践的研究
ー ２次不等式の発展・統合場面を焦点に ー

教科教育高度化分野（17220907）星　健　太

本研究の目的は，学習者の捉える数学的知識の意味と手続きのずれが生じる問題場面を検討・設定し，その問題場面が意味と手続きを一体化していくことに有効であるか明らかにすることである。そこで本研究では,関数的アプローチを用いた２次不等式の解を求める学習に焦点を当てた。研究の結果，グラフへの解表現する過程とグラフから解を式表記する過程に教授の工夫をすることと，２次方程式の判別式が$D=0$となる２次不等式の解を求める場面に生じる学習者の意味と手続きのずれが，その一体化に有効に働く示唆を得た。

［キーワード］　２次不等式，関数的アプローチ，概念的知識，手続き的知識

１　問題と研究の経緯

(1)高校数学の現状と課題

文部科学省(2018)は，学習指導要領改訂の方向性として，新しい時代に必要となる資質・能力の育成と，学習評価を充実させることであると示している。これらの資質・能力を育成していくためには,学習過程の果たす役割が極めて重要である。算数・数学科においては，その過程が図１のように整理されている。

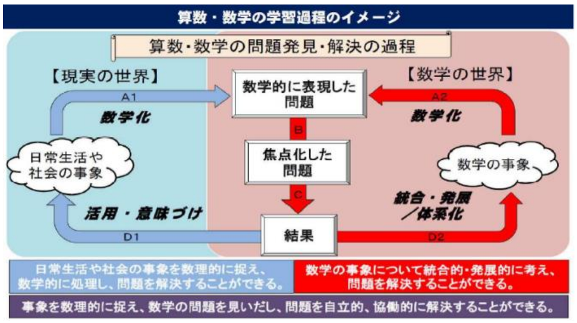

図１　算数・数学の学習過程のイメージ

しかし，高校数学の現状としてこの図１の学習過程の視点から授業が行われているだろうか。大学入試改革は進められてはいるが，従来型のセンター試験の影響や，単元内容の多さなどから教師から知識を教え込む授業だけで終えてしまっていないだろうか。文部科学省(2018)では，高校数学教育の課題として,「数学の学習に対する意欲が高くないこと」や「事象を式で数学的に表現したり論理的に説明したりすること」を指摘している。また,「数学的な知識や技能の『量』だけではなく，どのようにしてそれらの知識や技能を身に付けたのかなどの学習の『質』を問う必要がある」ことも指摘している。このように，高校数学の学習指導では，図１の学習過程に沿った授業が十分に実施されていないことが分かる。

(2)研究の経緯

本研究では，高校数学の授業の主な活動である図１の右側の学習過程に焦点を当てた。理由として，普段の授業から学習者の学びの質を高めたいと考えるからである。文部科学省(2018)は，図１の右側の学習過程を「数学の事象の数学化」とし,「数学の事象から問題を見出し，数学的な推論などによって問題を解決し，解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的，体系的に考察する過程である」と述べている。統合的・発展的，体系的に考えることは，数学的な見方・考え方の一部である[1)]。学習者が数学的な見方･考え方を働かせ,数学的活動を行うことで,数学教育で目指す資質･能力の育成を目指すことが重要であると述べる。

どのようにして学習者自身が数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を行っていくかについて，礒田・原田(1999)は,「考えの違い(ずれ)を活かす授業づくり」が効果的であると述べている。この「考えの違い(ずれ)」とは，学習者が，未知の場面に直面した際，その場面に既有知識を適用できないことに気づくことである。また，考えのずれが生じる場面とは，学習者の既有知識の拡張場面・一般化場面等が該当し，学習者自ら自分の考えに疑いを抱き，改めて問い直す場面になる。この考えの問い直しによって，図１の学習過程である，数学的内容を統合的・発展的，体系的に考える機会になりえると考える。そのため，礒田・

原田の述べる「考えの違い(ずれ)を活かす授業づくり」は高校数学の授業においても価値のある実践になると考える。礒田・原田は，考えのずれを活かした授業は，教え込みに陥りやすい高校の学習指導において，貴重な数学的活動を体験する機会であると述べている。

また，そのような授業を実践するためには，教材を概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)で捉えることで，学習者のわかり方の変容やつまずき，困難性を想定しておく必要があると述べる。さらに,学習者のずれを解消し,概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)の一体化を目標とした授業づくりが必要であると述べている。このことから，学習者の考えのずれを生かし，意味と手続きの一体化を目指した授業の在り方を検討していく。

本研究では，２次不等式の学習においての実践を対象としている。国立教育政策研究所教育課程研究センター(2005)が実施した「高等学校教育課程実施状況調査」によると，数学Ⅰで扱う「２次関数と２次方程式や２次不等式との関係」を“生徒にとって理解し難い内容である”と考える教師の回答の割合は 75.8%と述べている。また，「２次関数と２次方程式や２次不等式との関係」を“よく分かった”とする生徒の回答する割合は26.6%であった。この調査は，2005 年以降実施されていないが，教える側，学ぶ側双方にとって簡単な内容ではないと考える。そのため，２次不等式を本研究の対象とすることに意味があると考える。

２　研究の目的と方法

(1)本研究の目的

前述１より本研究では，２次不等式の学習において，教師が意図して設定した問題場面で，学習者が捉えている数学の意味と手続きにずれが生じるのかを検討する。さらに，その問題場面が学習者の概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)の一体化に有効であるかどうか明らかにすることを目的とする。

(2)本研究の方法

本研究の目的を達成するために，次の方法で研究を進めていく。概念的知識・手続き的知識に関する文献の解釈，２次不等式に関する教材の分析による論理的考察，及び授業実践の実施と分析による実践的考察により本研究を進める。

３　先行研究の検討

(1)概念的知識・手続き的知識の捉え

文部科学省(2016)は，知識について「事実的な知識のみならず，学習過程において試行錯誤をすることなどを通じて，新しい知識が既習の知識と関係づけられて構造化されたり，知識と経験が結びつくことで身体化されたりして，様々な場面で活用できるものとして獲得される，いわゆる概念的な知識を含むものである」と述べている。さらに，この概念的な知識について「学びのプロセスを通じて，発達の段階を踏まえながら，このような構造化された概念的知識の獲得に向かうことを重視するものである。」と述べている。この「事実的な知識」と「概念的な知識」のように，学習過程で身に付けていく知識の性質を区分し，学習者のわかり方を捉える研究がこれまでもなされてきた。その中でも礒田・原田(1999)は，数学教育では「概念的知識」と「手続き的知識」という区分で，数学的な意味や手続きを捉える研究がされてきたと述べている。

礒田・原田は，概念的知識(意味)とは「『～は…である』と表せる内容であり，定義や性質，そして根拠を基にした推論などが該当する」とまとめた。そして，手続き的知識(手続き)は「『～ならば…しなさい』と表せる内容であり，やり方や書き方，形式，そして無意識に進む計算，暗算などが該当する」とまとめた。本研究で述べる概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)は，この礒田・原田が示したものと同義としていく。また，礒田・原田は，この意味と手続きの一体化が，解法手続きの選択と実行を効率化し，その数学的な意味の発展を促すと述べる。手続きの選択と実行の効率化や数学的な意味の発展を促すことは，図１の右側の学習過程を具体化する上で重要な役割になると考える。

(2)意味・手続きの一体化に向けた指導

礒田・原田(1999)は意味と手続きが一体化されている状態とは,意味と手続きの相互翻訳(言い換え)可能な状態であると述べている。例えば,「$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$の近似値を求めるならば，$\sqrt{2\times 3}$の近似値を求めなさい」という手続きは，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$という意味(左辺の２乗は$a\times b$であり，右辺の２乗は$a\times b$である。$a$，$b$は正の実数であるため右辺と左辺は等しい，など)からただちに得られたり，手続きから意味の説明ができたりする状

態のことである。

この概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)の一体化に向けた授業について,礒田・原田(1999)は,解法手続きが意味づけられても,また意味に解法手続きが補われても,必ずしも円滑な問題解決に反映されないと述べる。この理由として,学習者にとって意味を考えずに手続きだけで解けてしまう問題であれば,手続きしか最終的に残らない。または,教師の指示に従うだけの学習で,生徒の主体性が喪失されている状況であると「だから何だ」で終わってしまうからである。生徒自身が数学的知識を獲得することに必要感を感じ,意味づけられるように授業を展開していく必要がある。そのため,礒田・原田が述べる「考えの違い(ずれ)」を活かし,学習者自身が概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)を双方的に学び,一体化を目指す実践を検討していく。

(3) 2次不等式における指導方法

意味と手続きのずれは,生徒自身や生徒同士等の間で生じる。礒田・原田(1999)は,そのずれがどのようなものなのかを議論し,どのようにして一体化を図っていくのかを検討するためには,指導する側が何を意味とし,何を手続きとするのか判断する必要があると述べている。そのため本研究では,2次不等式における概念的知識と手続き的知識を明確にしていく。

まず,2次不等式の解を求めるために現行の学習指導要領(2009)では,関数的アプローチを利用した解法が用いられている [2)]。この解法を用いることは,次期学習指導要領(2018)でも同様である。関数的アプローチとは,不等式を対応する関数のグラフで表し,関数のグラフとx軸との位置関係から不等式の解を求めるアプローチである。伊藤(2002)は関数的アプローチによる2次不等式の解決過程を以下の3つにまとめた(図2)。

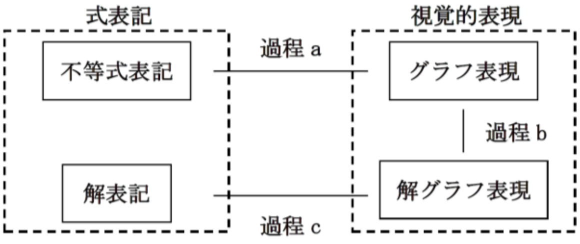

図2　関数的アプローチによる解決過程

【過程 a】不等式に対応するグラフを描く過程

【過程 b】不等式の解に対応するx軸上の部分をグラフ上に表現する過程

【過程 c】不等式の解に対応するx軸上の部分を読み取り,式表記する過程

この解決過程3つは手順を表しているため,関数的アプローチに必要な手続き的知識である。関数的アプローチの理解に必要な概念的知識について,服部(2011)は以下の3つに分類した。

・不等式の解の意味に関する知識:代入して不等式をみたすxの値の範囲を求めること。

・2次関数を用いる根拠に関する知識:グラフを利用すると視覚的に不等式の解を見つけることができること。

・yの値を調べる根拠に関する知識:2次不等式の左辺と,用いる2次関数のyとが同じものであるため,yの値を調べればよいこと。

この3つの概念的知識を便宜上以下のように【概念 a】,【概念 b】,【概念 c】とラベルを貼る。

【概念 a】不等式の解の意味に関する知識

【概念 b】2次関数を用いる根拠に関する知識

【概念 c】yの値を調べる根拠に関する知識

服部は2次不等式の学習において,あくまでもこの【概念 a】~【概念 c】の3つの知識のみを獲得していればよいということを意味しているのではないと述べる。関数的アプローチを理解するために新たにこの3つの概念的知識が必要であるという指摘をしている。そのため本研究では,2次不等式学習で新たに必要となる手続き的知識を伊藤(2002)が定めた【過程 a】~【過程 c】とし,概念的知識を服部(2011)が定めた【概念 a】~【概念 c】とし,教材を考えていく。

次に,概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)の一体化を考えていく。そのために,【過程 a】~【過程 c】にそれぞれ対応する【概念 a】~【概念 c】を次のようにまとめる(表1)。【過程 a 】では,グラフを描くため【概念 b 】を対応させる。【過程 b 】では,グラフ上のyの値を調べるため【概念 c 】を対応させる。また,x軸上に不等式の解を表現するため【概念 a 】も対応させる。【過程 c 】では,不等式の解を表記するため【概念 a 】を対応させる。ここでは,意味と手続きをどう対応させるかを重視しているのではない。表1のように対応させたとき,学習者はどのような意味と手続きのずれが生じているか,そこで教師はどんな手立てが必要か考えることを重視している。

2次不等式学習において,例えば,学習者が2次不等式の式表記からグラフ表現をする【過程 a】

を行う際，２次不等式に対応するグラフを利用すると，視覚的に２次不等式の解を見つけやすくなるという【概念ｂ】を説明できる姿を目指していく。また，新たな２次不等式の問題場面になっても【概念 b】を働かせ，【過程 a】を行うことが出来る姿を目指していく。このように，それぞれ対応する意味と手続き(表１)を相互に翻訳することが可能な状態を目指していく。

表１　意味と手続きの対応

手続き	意味
過程ａ	概念ｂ
過程ｂ	概念ａ，概念ｃ
過程ｃ	概念ａ

４　授業の構想

２次不等式の授業内容の中で，学習者の既有知識を拡張する場面・一般化する場面として以下の①～③の学習場面に焦点を当てた。理由として，この３つの内容は前時までの内容から数学的に発展する場面である。そのため，学習者の考えのずれが特に生じやすいと考えるためである。なお，次の図は，授業実践をした学校で取り扱っている教科書(数研出版，2017)に掲載されているものである。

①１次関数と１次不等式

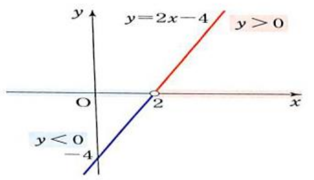

図３　１次関数と１次不等式

この授業では，１次不等式の解を関数的アプローチで求める学習を行う。１次不等式の関数的アプローチで必要となる概念的知識と手続き的知識は表１と同様である。不等式の解とは何か，それを関数のグラフで考えるとどのように表されるのか確認していくために，以下の課題を設定する。

課題１	$\mathrm{y}=2x-4$のグラフとx軸の共有点のx座標を求めよう
課題２	$\mathrm{y}=2x-4$のグラフ上で$\mathrm{y}>0$をみたすのx値の範囲を求めよう
課題３	$2x-4<0$の解をグラフを用いて求めよう

課題１では，既習内容である$\mathrm{y}=2x-4$と$\mathrm{y}=0$をみたすxの値を求める。課題２では不等式へと発展させ，$\mathrm{y}=2x-4$ と $\mathrm{y}>0$をみたすxの値を求めていく。これは，解グラフ表現【過程ｂ】と解表記【過程ｃ】を行う活動である。また，$\mathrm{y}=2x-4$ を$\mathrm{y}>0$に代入すると不等式ができることから，不等式の解の意味【概念ａ】やyの値を調べることで不等式の解を求めることが出来るという【概念ｃ】を養うことを目指していく。この数学の拡張場面で，生徒はどのような考えのずれが生じるか，その生じた考えのずれが関数的アプローチの【過程 a】～【過程ｃ】に対応する【概念 a】～【概念ｃ】の一体化につながるのかを考察する。

②２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}>0)$

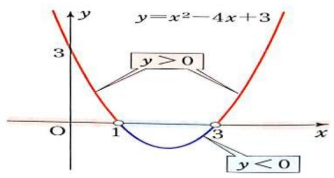

図４　２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}>0)$

この授業では，学習者自身で前時までに学習した関数的アプローチを活用し，２次不等式の解を求めることできるよう，以下の課題を設定する。

課題４	$\mathrm{y}=x^2+2x-3$の簡単なグラフを描こう
課題５	グラフから$x^2+2x-3>0$の解を求めよう
課題６	グラフから$x^2+2x-3\leqq 0$の解を求めよう

課題４を行う前に，２次不等式$x^2+2x-3>0$を不等式の性質を用いて解を求めることができるか考えさせる。そのことで，不等式に対応する２次関数のグラフを描くことで解を求められるという【概念 b】を根拠とし，【過程 a】の実行に移れるかどうか考察する。課題５では，前時の１次不等式の関数的アプローチの学習を２次不等式まで拡張させる場面である。ここでは前時と同様【過程 b】【過程 c】を行う活動である。しかし，前時との違いとして，不等式の解をみたすxの範囲がグラフから２つの場合や共通範囲になることを読み取る必要がある。そのためこの拡張場面で生じるずれを，不等式の解の意味【概念 a】やyの値を調べることで不等式の解を求めることができるという【概念 c】を根拠とし，ずれを解消していける

かどうかを考察する。

③２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}=0)$

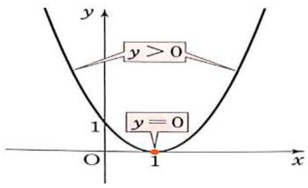

図５　２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}=0)$

この授業では，学習者自身で関数的アプローチを活用しながら，不等号の向きによって２次不等式の解を判断できるよう，以下の課題を設定する。

課題７　次の２次関数の解を求めよう
(1)$x^2-4x+2\geqq 0$　(2)$x^2+x-12<0$
(3)$-x^2+2x+15\leqq 0$
課題８　次の２次不等式の解を求めよう
(1)$x^2-4x+4>0$　(2)$x^2-4x+4\geqq 0$
(3)$x^2-4x+4<0$　(4)$x^2-4x+4\leqq 0$

課題８では，２次不等式に対応する２次関数のグラフがx軸と接する場合に発展する。前時までの学習では，グラフを考えなくても，例えば$(x-1)(x-2)<0$ならば不等式の解は$1<x<2$と求めることができる。この手続きに【概念ａ】～【概念ｃ】が喪失されている状態であると，$(x-2)^2<0$等の場面に出会った時，どのような考えのずれが生じるのかを考察していく。また，そこで生じた考えのずれを，生徒自身で【概念ａ】～【概念ｃ】を根拠にしながら解消していくことが出来るかどうかを考察する。

５　授業実践

(1)時期・対象・授業者

時期：平成 30 年 10 月下旬（４単位時間)

対象:山形県立Ａ高等学校１学年４クラス(150 名)

授業者：星健太

(2) 分析・考察方法

生徒のワークシートへの記入，ふり返りの記入，授業者・授業参観者の授業分析等から授業実践の分析・考察を行う。

(3)授業概要

授業は数学Ⅰの単元，２次関数の「２次不等式」を扱う。授業の展開は，表２の通りである。 ただし，表中のaは，２次不等式のx^2の項の係数を表し，Dは２次不等式に対応する２次方程式$ax^2+bx+c=0$のb^2-4ac(判別式)を表す。また，前述の授業構想で述べた授業①は１時間目，授業②は２時間目，授業③は４時間目にあたる。

表２　授業の流れ

時間	授業内容
1	1 次関数と 1 次不等式
2	２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}>0, a>0)$
3	２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}>0, a<0)$
4	２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}=0)$
5	２次関数と２次不等式$(\mathrm{D}<0)$

６　実践結果の分析・考察

(1)解グラフ表現の教授の工夫

①意味先行手続き欠落状態が生じた場面

課題２を実施したところ，何をすればよいか分からないといった生徒がほとんどだった。課題２は解グラフ表現【過程ｂ】と解表記【過程ｃ】を行うことを求めた内容である。しかし，初めて行う手続きであるため，生徒にとって課題２で問われている内容が分かっても，やり方が見いだせず手が付けられない状態だったと考える。このような状態を礒田・原田(1999)は,「意味先行手続き欠落状態」と述べる。この状態の原因として，生徒が捉えている意味が適切ではないことを指摘している。実際に生徒からは「$\mathrm{y}>0$をみたすx値の範囲とは何か？」という質問も多く上がった。課題２において,関数グラフの読み取りが必要となる。ここでは，$\mathrm{y}>0$をみたすxの値とは，グラフ上で$\mathrm{y}>0$をみたしている変域を意味している。このことは【過程ｂ】に対応する，yの値を調べることで不等式の解を求めることができるという【概念ｃ】の理解にも必要となる。このように，既有知識である関数グラフの意味が十分でなかったために【過程ｂ】が実行できなかったことが考えられる。

課題２の場面のように，生徒の持っている既有知識の拡張場面を問題設定することで，意味先行手続き欠落状態として意味と手続きのずれを明らかにすることができた。

②【過程ｂ】での教授の工夫の必要性

課題２で生じたずれ(意味先行手続き欠落状態)の解消を目指すために礒田・原田(1999)は,「意味を再定式化するには，その意味を定式化する上で必要な手続き(操作)を知ることが必要である」と述べる。実践した授業では，課題２の活動後に，関数的アプローチの手続き【過程ａ】～【過程ｃ】

を整理させた。その際【過程ｂ】では，グラフ上で$y>0$をみたしている変域を求めることを説明した。しかし，その説明後実施した課題３では，多くの生徒は課題２までで確認した関数的アプローチを利用せず，既習内容である不等式の性質を用いて１次不等式の解を求めていた。その後グラフ表現【過程 a】をし，解表記から解グラフ表現【過程ｃ】を行う生徒が大半だった。この場面から，生徒にとって【過程 b】を行うことへの理解が難しいと考える。

生徒からは，「$y>0$をみたすxの範囲がなぜ不等式の解になるのか」といった質問が挙げられた。このことから，【過程ｂ】の手続きは知ったが，それに意味が伴っていないことが分かる。この意味と手続きのずれが起こった原因として，【概念 c】の中の，不等式の左辺をyと置くことで関数のグラフを描いていることや，不等式の解の意味である【概念 a】の理解が不十分であることが考えられる。そのため，不等式の解はyの符号を調べればよいことの理解に繋がらないことが考えられる。この場面から，表１で述べた【過程ｂ】に対応する【概念 a】【概念 c】を一体化するためには，その教授の工夫が必要である。

③【過程ｂ】での教授の工夫

課題３で生じたずれを解消していくために，【過程ｂ】での教授方法を課題２の活動後に行った教授方法と変えた。なぜならば，教科書(数研出版，2017)では，図６のようにして【過程 b】の説明をしている。この図６の場合，「２次不等式$ax^2+bx+c>0(<0)$の解は，２次関数$y=ax^2+bx+c$とした時の$y>0(y<0)$をみたすxの値」という説明となる。この考え方としては，yの値からxの値を求めることになる。この考え方は不等式の解の意味【概念 a】やxの値を決めることでyの値が決まる関数の考え方と逆になる。

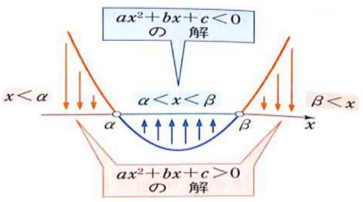

図６　教科書での【過程 b】の扱い

つまり，図６の矢印の向きを逆にして考えることが不等式や関数を扱う上で有効ではないかと考える。具体的な説明としては，「不等式の解はxに代入すると(左辺)$>0(<0)$をみたすxの値である。そのため関数のグラフで考えると，グラフ上でxの値を代入すると$y>0(y<0)$となるxの値を探す」となる。この説明によって，不等式の左辺をyと置いている(【概念ｃ】)ため，不等式の解(【概念 a】)はyの符号を調べればよい(【概念ｃ】)と，【概念 a】【概念 c】の繋がりを持って理解できるのではないかと考えた。

実際に，課題５の活動の後，全体での説明時に，図６の矢印の向きを逆にした説明を行った。なお，以下の図７は課題５の活動後に説明した際の板書を基に，生徒が練習問題を解いたプリントの抜粋である。

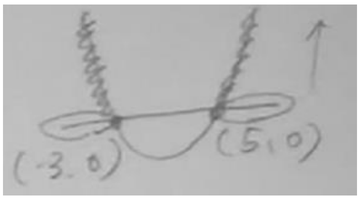

図７　xの値から考えた生徒の記述

課題７の結果として，授業進度の都合上，図７の説明を行えなかった１クラスでは，（１）～（３）で【過程 b】が出来なかった，または間違った生徒は８人であった。それに対し，他の３クラスでそのような生徒はそれぞれ３人・４人・２人であった。このことから，xの値を代入し，不等式をみたしているかグラフ上のyの値で確認する，という教授の工夫は【過程 b】を実施する上で有効である示唆が得られた。

(2)解表記の教授の工夫

①手続き先行意味欠落状態が生じた場面

課題６では，解グラフ表現【過程ｂ】まではできるが，そこから解表記【過程ｃ】につまずく生徒が多かった。そのつまずきとして「$-3<x<1$と表すときと$-3<x$，$x<1$で表す違いは何か」といった疑問を持つ生徒が多くいた。この問いが発生した理由として，生徒は課題５までに２次不等式の解表記を，２つの範囲を用いて表している。そのため，課題６でも解表記は２つの範囲を用いて表せばよいという判断になったのではないかと考える。礒田・原田(1999)は，このように既有知識で成り立つ手続きを，それが成り立たない新たな問題場面でも適用することを「手続き先行意味欠落状態(過度の一般化)」と述べる。この状態は生徒にとっては成立している手続きである。そのため，授業者からその手続きに対応する意味に立ち返られる発問や課題を出し，意味と手続きのず

れを解消させる必要があると述べる。

課題６では，２次不等式の不等号の向きが変わる数学の拡張場面を設定することで，手続き先行意味欠落状態として意味と手続きのずれを明らかにすることができた。

②解表記での教授の工夫の必要性

課題６の解表記をする場面では，不等式の共通範囲の表し方に関する知識が必要となる。また，不等式の解の表し方について$a < x$，$x < b$で用いている“，(カンマ)”は「または」の意味とみなしてこれまでの学習で扱っている。この厳密な説明はこれまでされていないため，この段階で不等式の意味を認識しているのは教師であり，解表記が正しいか判断できるのは教師だけなのではないかと考える。そのため課題６の場面では生徒自身で解消できるものではない。解表記【過程ｃ】での教授の工夫の必要がある。

③解表記での教授の工夫

前述②のことから，課題６で生じたずれの解消の場を課題６の活動後，全体確認の場で設けた。解消の方法として，解グラフ表現に対応させる形で，グラフの真下に解表記し説明をした。不等式の解をx軸の数直線に対応させ，共通範囲が解なのか，２つの範囲が解なのかによって解表記の表し方が異なることを説明した。解グラフ表現と解表記を対応させることで,【過程ｃ】において不等式をみたすxの値【概念ａ】が視覚的に理解しやすくなることを狙いとした。以下の図８は課題６の説明を基に生徒が練習問題を解いたプリントの抜粋である。

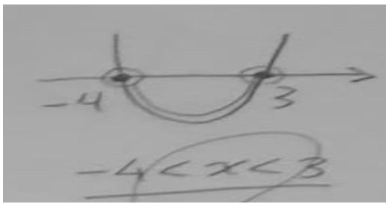

図８　グラフに対応させ解表記した生徒の記述

課題７の結果として，授業進度の都合上，図７の説明を行えなかった１クラスでは，(１)～(３)で【過程ｃ】が出来なかった，または間違った生徒は６人であった。それに対し，他の３クラスでそのような生徒はそれぞれ２人・２人・１人であった。このことから，解グラフ表現に対応させる形で，グラフの真下に解表記する，という教授の工夫は【過程ｃ】を実施する上で有効である示唆が得られた。

(3)生徒同士でずれを解消していく場面

①意味の喪失を生徒同士で解消していく場面

課題８の場面では，２次不等式$x^2 - 4x + 4 > 0$の解を$x > 2$や$x < 2$とする生徒が何名かいた。このような解を出した生徒の１人に理由を聞いたところ「なんとなく」ということだった。その生徒は解グラフ表現を以下(図９)のように記述した。

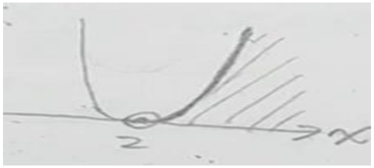

図９　解を$x > 2$とした生徒の記述

この記述から，特に解グラフ表現【過程ｂ】に対して，不等式の意味【概念ａ】やyの符号を調べる意味【概念ｃ】が喪失されていることが分かる。この場面では，生徒たち同士で「$y > 0$の時はグラフの左側もみたしている」【過程ｂ】と正しい手続きを伝えて説明している生徒や「$x < 2$も代入すると解になっている」【概念ａ】と説明し，生徒同士で現れた他者とのずれの解消を目指す姿が見られた。また，２次不等式$x^2 - 4x + 4 \leqq 0$の場合では，グラフ表現を以下(図 10)として考える生徒も何名かいた。このように考えた生徒は不等式の解をすべての実数としていた。

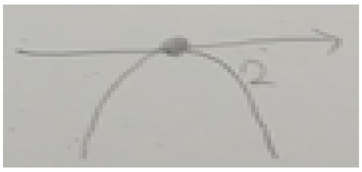

図 10　上に凸のグラフで考えた生徒の記述

この記述からグラフ表現【過程ａ】に対して，対応するグラフを描く意味【概念 b】が喪失されていることが分かる。また，不等式の解をすべての実数としたことから，解表記【過程ｃ】において不等式の意味【概念 a】が喪失されていることも考えられる。この場面では，生徒たち同士で「不等式に対応するグラフは上に凸のグラフではない」【概念 b】と指摘したり，２次不等式に値を代入して不等式をみたすxが無いことから「グラフが$y < 0$にあるのはおかしい」【概念 a】と指摘したりと，関数的アプローチの各過程に対応する概念的知識(表１)を翻訳しながら，意味と手続きのずれを解消していく姿が見られた。

②$D = 0$の２次不等式場面の可能性

生徒のふり返りからは,「ようやくグラフを使う意味が分かった」や「グラフだとわかりやすいこ

とが分かった」といった内容もあった。３時間目までに手続き化され，意味が喪失されていた状態に対し，$D=0$の新たな問題場面では生徒同士で関数的アプローチの意味に立ち返る姿が見られた。そのことで意味を再構成する機会になり，関数的アプローチの概念的知識(意味)と手続き的知識(手続き)が一体化していく場面になったのではないかと考える。

また，生徒同士でずれを解消していくことが出来た理由として，３時間目までの授業実践から，生徒は関数的アプローチの【過程 a】～【過程 c】と【概念 a】～【概念 c】が関連されてきたことが考えられる。そのことで４時間目での新たな数学の拡張場面で表れた意味と手続きのずれを生徒同士で【概念 a】～【概念 c】を根拠にし，手続きを修正していく姿が見られたのではないか。この姿から４時間目では関数的アプローチの意味と手続きの一体化への有効性の示唆を得た。

７　まとめと今後の課題

本研究では次の３つのことが明らかとなった。１つ目は，【過程ｂ】において，xの値を代入し，不等式をみたしているかグラフ上のyの値で確認する，という教授方法が生徒の理解に効果的であった。２つ目は，【過程ｃ】において，解グラフ表現と解表記を対応させて書く，という教授方法が生徒の理解に効果的であった。３つ目は，４時間目で扱ったグラフとx軸の共有点が１個の場合を生徒たちに求めさせると，これまで学んできた知識とのずれを相互翻訳しながら生徒同士で解消していく姿が見られ，意味と手続きの一体化への示唆があった。

本研究の課題としては次の２つを考える。１つ目は，本研究の成果として挙げた解グラフ表現と解表記の教授の工夫についての有効性や，意味と手続きの一体化されているかどうか詳細に見取るためには，本研究の実践や検証方法では十分でないことである。２つ目は，今回の活動だけでは生徒にとってグラフ上の操作のみになって，不等号をみたすxの値という不等式本来の意味を見失ってしまう可能性があることである。本来不等式の解を求めるために，関数との関係を利用してグラフを用いて求めている。しかし，学習者にとって不等式の解を求める行為がグラフ上の操作になってしまわないよう，関数的アプローチのみでない実践も不等式学習には必要になると考える。

注

1) 文部科学省(2018)は，数学的な見方・考え方を「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，論理的，統合的・発展的，体系的に考えること」とまとめている。統合的・発展的に考えることは数学的な見方・考え方の一部である。

2) 関数的アプローチの他に，代数的アプローチがある。代数的アプローチとは，不等式に対して式変形を施すことで解を得る方法である。２次不等式を解く方法は大きく分けてこの２つがある。

引用文献

服部貴大(2011)「２次不等式における関数的アプローチの理解促進に関する研究」,『日本数学教育学会誌』, pp. 12-20.

礒田正美・原田耕平(1999)『生徒の考えを活かす問題解決授業の創造：意味と手続きによる問いの発生と納得への解明』, 明治図書出版.

伊藤伸也(2002)「２次不等式表現の翻訳・処理に関する調査結果」,『筑波数学研究』, 第 21 号, p. 76.

国立教育政策所教育課程研究センター(2005)「高等学校教育課程実施状況調査」, http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/h17_h/05001031040004000.pdf(最終閲覧日 2019 年１月 28 日)

文部科学省(2018)『高等学校学習指導要領解説 数学編　理数編』, http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/07/17/1407073_05.pdf(最終閲覧日 2019 年１月 30 日)

文部科学省(2016)「教育課程部会芸術ワーキンググループ(第７回)」, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/069/siryo/1371890.htm(最終閲覧日 2019 年１月 30 日)

山本慎ほか(2017)『最新数学Ⅰ』, 数研出版.

Practical Research in Analysis Guidance of High School Mathematics : Focus on Development and Integration of Secondary Inequality

Kenta HOSHI