学　位　論　文

共変的異常項と整合的異常項との関係に対する
ヒートカーネルの方法による解析

２０１７年９月

竹内 雅陽

要旨

現在知られている素粒子間の基本的な４つの相互作用はすべてゲージ理論（gauge theory）で記述される．また，これらの力を統一しようとする大統一理論や高次元の理論でもゲージ理論による記述が基本となる．

我々の世界は，弱い相互作用で見るように，カイラルな物質場から構成されている．このような物質場がゲージ相互作用をする場合には，ゲージ理論の出発点であるゲージ対称性が量子論で壊れることがある．このとき，ゲージ異常項（gauge anomaly）が現れる．[1–10]．また，$4k+2$ 次元時空では，一般相対論の根幹となる一般座標変換不変性も量子論で壊れることがある．このとき，重力異常項（gravitational anomaly）が現れる [12]．統一理論を構築するには，このような異常項があっては困るので，種々の物質場からの異常項への寄与が相殺されているものを考えることになる．この異常項の相殺条件は理論を構築する上での重要な制限となる．

ゲージ異常項は共変的異常項（covariant anomaly）[1–3]，あるいは整合的異常項（consistent anomaly）[4–10] のうちのどちらか一方の捉え方で記述される．共変的異常項は共変的カレント（共変的に正則化されたカレントの期待値）の共変微分による発散で与えられる．一方，整合的異常項は正則化された有効作用（effective action）のゲージ変換として与えられる．これはまた，有効作用から求められるカレントの期待値である整合的カレントの共変微分による発散として表すこともできる．整合的異常項は Wess-Zumino の整合性条件（consistency condition）[5] を満たさなければならない．

ゲージ理論としての整合性は上述の異常項の捉え方に依存してはならない．すなわち，この２つの異常項は同等でなくてはならない．実際，２つの捉え方は異常項に対し同一の相殺条件を導くという意味で同等であることが知られている．Bardeen と Zumino [11] は代数的方法を用いてこの同等性の一般的な証明を与えた*1．彼らの方法は具体的なラグランジアンを必要としないのでモデルに依存しない結果を与える．ラグランジアンに基づく場の理論的方法を用いた同等性の議論も行われている [15–20]．Banerjee ら [15] は正則化された有効作用を共変的なカレントを用いて定義することにより同等性の証明を試みた．

Banerjee らの方法は次の通りである．まず，共変的カレントを用いて正則化された有効作用を定義する．この作用から整合的カレントを求める．ここから，彼らは共変的カレントと整合的カレントの差を共変的カレントの functional curl で表した*2．さらに彼らはこの functional curl がデルタ関数に比例するということを議論した．そして，このことを用いることによって共変的異常項と整合的異常項との関係式を導出した．彼らが導出した関係式は Bardeen と Zumino らのもの [11] と一致するが，functional curl がデルタ関数に比例することについては明確に説明されていない．したがって，functional curl の振る舞いをより明確に示すことが望まれる．

---

*1 この方法の超対称な場合は文献 [13] で与えられている．代数的方法で文献 [11] とは異なる方法として文献 [14] がある．

*2 共変的カレントの functional curl は共変的カレントの異常交換関係（covariant commutator anomaly）にも現れる [22,23].

共変的カレントの functional curl は複数の著者により議論されている [18, 19, 21–24]．Fujikawa と Suzuki [18] は functional curl と共変的異常項との関係式の形式的なレベルの証明を与えた．この関係式は Banerjee ら [15] が functional curl がデルタ関数型の振る舞いをするということを用いることによって導出したものである．Ohshima ら [19] は超対称なカイラルゲージ理論において共変的カレントの functional curl を評価した．この functional curl はフーリエ変換を用いて 4 次元で具体的に評価された．Banerjee らとは異なる動機から Qiu と Ren [24] は時空点分離法（point-splitting method）を用いて functional curl を 2 次元と 4 次元で具体的に評価した．これらのすべての結果は functional curl がデルタ関数型の振る舞いをするということと矛盾しない．

共変的カレントと整合的カレントの差については，functional curl を用いずに行われた研究もある [16, 17, 20]．Osabe と Suzuki [20] は共変的カレントと整合的カレントを異なる指数関数型の正則化因子を用いて定義し，それらのカレントの差を議論した．Banerjee らは文献 [15] の方法で有効作用を共変的なカレントを用いて定義し，そこから得られる共変的カレントと整合的カレントの差を Pauli–Villars 正則化 [16] と時空点分離法 [17] を用いて計算した．

本学位論文は，上で述べたような共変的異常項と整合的異常項との関係を 2 部に分けて議論したものである．第 I 部はゲージ異常項について，第 II 部は重力異常項についての研究である．

第 I 部のゲージ異常項について我々が行った研究を述べる．異常項を求める手法としてヒートカーネルの方法 [25] がある．これまでこの方法は異常項のような 1 点関数の計算などでは用いられてきたが，functional curl のような 2 点関数には用いられてこなかった．我々は functional curl にもこの方法が適用できることを示し，具体的に functional curl の値を求めることに成功した [26]．得られた結果は Banerjee らや Fujikawa らの結果 [15, 18] を再現する．この結果は任意の偶数次元において functional curl のデルタ関数型の振る舞いの直接的な別証明を与える．また，Osabe と Suzuki の共変的カレントと整合的カレントの差 [20] を計算するためにも functional curl に対して開発したヒートカーネルの方法 [26] を適用することができ，具体的に 2 次元と 4 次元でこの差の値を求めることに成功した [26]．計算した結果は Bardeen らや Banerjee らの結果 [11, 15] を再現する．

第 II 部の重力異常項について我々が行った研究を述べる．重力異常項も共変的異常項，あるいは整合的異常項のうちのどちらか一方の捉え方で記述される．共変的重力異常項は共変的に正則化されたエネルギー運動量テンソルの期待値（共変的エネルギー運動量テンソル）を用いて表される．整合的重力異常項は正則化された有効作用の変換として与えられ，これはまた，有効作用から求められるエネルギー運動量テンソル（整合的エネルギー運動量テンソル）を用いて表される．重力異常項に対しても Bardeen と Zumino [11] により代数的方法で共変的異常項と整合的異常項の相殺条件の同等性が示されている．我々は Banerjee らの議論 [15] を重力異常項に適用した．共変的エネルギー運動量テンソルを用いて正則化された有効作用を定義し，それに基づく整合的エネルギー運動量テンソルを導入し，二つのエネルギー運動量テンソルの関係を求めた．その結果，共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルの差は共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl で表されることがわかった [26]．さらに，ヒートカーネルの方法を応用・

拡張することにより，2次元でのエネルギー運動量テンソルの functional curl の値を具体的に求めることに成功した.

本論文の背景と概要

異常項とゲージ理論

一般に，場を量子化していないときに成立する対称性が，場の量子化により破れることを量子異常という．量子異常の異常項は場の量子論の無限大の発散に関係して現れる．初めて明確に定式化された異常項は軸性 U(1) 異常項 [27–32] である*3．この異常項は軸性ベクトルカレントの保存則の破れを表しているが，中性 π 中間子 π^0 の 2 光子崩壊現象 $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ として実験的にも確認されている．

現在知られている素粒子間の基本的な相互作用は電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用，重力相互作用の 4 つであり，これらはすべてゲージ理論で記述されている．弱い相互作用はカイラルゲージ理論で記述される．カイラルゲージ理論は場を量子化するとゲージ異常項 [4] が一般に現れることが知られている．また，カイラルな物質場が重力相互作用する理論にも重力異常項 [12] が一般に現れることが知られている．これらの異常項が現れるとゲージ理論としての整合性が失われる．したがって，ゲージ理論として整合的な理論はこれらの異常項の相殺条件を満たさなければならない．相殺条件は素粒子の種類やそれらの相互作用に制限を課す．これは素粒子の統一理論への強い制約となっている．素粒子の標準模型はカイラルゲージ理論であるから，ゲージ異常項が世代ごとに相殺している [39–41]．強い相互作用と弱い相互作用を 1 つのゲージ理論として記述する大統一理論，超対称大統一理論もまた，カイラルゲージ理論であるから，ゲージ異常項の相殺条件を満たしている [42–50]．重力相互作用まで含めた上述の 4 つの相互作用をゲージ理論として統一的に扱う理論は，重力異常項の相殺条件をも満たしていなければばならない [12]．重力異常項の分析は，ゲージ理論として整合的な超弦理論のモデルの存在を示すことにおいて，重要な役割を果たしている [51–56]．要旨で述べたように，ゲージ異常項，重力異常項のそれぞれにおいて共変的異常項と整合的異常項は同一の相殺条件を導かなくてはならない．

本論文の概要

本論文では，ゲージ異常項と重力異常項のそれぞれに対しての共変的異常項と整合的異常項との関係式を考察する．以下で本論文の構成を述べる．全体の構成としては大きく 2 つに分けられる．

*3 この異常項の位相的な側面は Atiyah–Singer の指数定理として定式化されている [33–38].

第 I 部でゲージ異常項，第 II 部で重力異常項について述べる．

第 I 部　ゲージ異常項

第 1 章　ゲージ理論と Noether の第 1，第 2 定理について述べる．

第 2 章　ヒートカーネルの方法を用いて軸性 U(1) 異常項を導出する．この導出法を用いて共変的ゲージ異常項を導出する．

第 3 章　整合的カレントと共変的カレントの違いについて述べる．Wess–Zumino の整合性条件を示す．ゲージ異常項の相殺条件について考える．

第 4 章　Bardeen と Zumino による整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式について述べる．

第 5 章　Banerjee らによる共変的ゲージ異常項と整合的ゲージ異常項との関係式について述べる．

第 6 章　共変的カレントの functional curl を具体的に評価する．Fujikawa と Suzuki による形式的なレベルでの評価と我々が行なったヒートカーネルの方法を用いた直接的なレベルでの評価について述べる．

第 7 章　Osabe と Suzuki による共変的カレントと整合的カレントの差に対して我々がヒートカーネルの方法を用いて行った 2 次元と 4 次元での評価について述べる．

第 II 部　重力異常項

第 8 章　曲がった空間の場の理論で用いられる基礎事項についてまとめる．

第 9 章　共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルを定義する．共変的重力異常項と整合的重力異常項についても述べる．重力異常項には Einstein 異常項と Lorentz 異常項があることが示される．

第 10 章　Bardeen と Zumino による整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式について述べる．さらに彼らによる整合的 Einstein 異常項と整合的 Lorentz 異常項が同等であることを示した証明について述べる．

第 11 章　Barerjee らがゲージ異常項において共変的異常項と整合的異常項の同等性を示した方法を重力異常項に適用した我々の議論について述べる．共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl で表された共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルとの関係式をヒートカーネルの方法を用いて 2 次元で考察する．

第 12 章　本論文で我々が行ったことについての要約と考察をする．

謝辞

この研究を行うにあたり，お世話になった方々に感謝申し上げます．遠藤龍介先生には，この分野の研究をおよそ 10 年にわたり御指導して頂き，感謝の念に堪えません．井町昌弘先生には，研究室に学部 4 年生で配属となったとき基礎から御指導して頂きました．衛藤稔先生，新井真人先生には，セミナーや講義等でお世話になりました．岩田高広先生，富田憲一先生には，研究計画や論文計画等でお世話になりました．最後に，両親と弟とその家族に感謝します．

目次

第 I 部　ゲージ異常項 13

第 1 章　ゲージ理論 14
1.1 Noether の第 1 定理 14
1.2 ゲージ原理 16

第 2 章　軸性 U(1) 異常項と共変的ゲージ異常項 22
2.1 軸性 U(1) 異常項 22
2.2 共変的ゲージ異常項 25

第 3 章　整合的カレントと共変的カレント 34
3.1 整合的な正則化と共変的な正則化 34
3.2 正則化されたカレントとゲージ異常項のゲージ変換 35
3.3 ゲージ異常項の相殺条件 38

第 4 章　Bardeen と Zumino による整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式 39
4.1 外微分形式 39
4.2 整合的ゲージ異常項 41
4.3 整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式 46

第 5 章　Banerjee らによる共変的ゲージ異常項と整合的ゲージ異常項との関係式 51
5.1 共変的カレントと整合的カレントとの関係式 51
5.2 Banerjee らによる共変的カレントの functional curl の評価 53
5.3 ゲージ異常項の相殺条件 55

第 6 章　共変的カレントの functional curl の評価 56
6.1 Fujikawa と Suzuki による形式的なレベルでの functional curl の評価 56
6.2 ヒートカーネルの方法を用いた直接的なレベルでの functional curl の評価 59

第 7 章　Osabe と Suzuki のカレントの差の評価 62
7.1 Osabe と Suzuki のカレントの差 62

7.2 Osabe と Suzuki のカレントの差に対するヒートカーネルの方法による評価 65

第 II 部　重力異常項 68

第 8 章 曲がった空間の場の理論 69
8.1 曲がった空間と接空間 69
8.2 local Lorentz ベクトルに対する共変微分 75
8.3 Lie 微分 78

第 9 章 整合的エネルギー運動量テンソルと共変的エネルギー運動量テンソル 81
9.1 整合的な正則化と共変的な正則化 81

第 10 章 Bardeen と Zumino による整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式 85
10.1 重力理論と外微分形式 85
10.2 整合的 Einstein 異常項 88
10.3 整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式 91
10.4 Einstein 異常項と Lorentz 異常項の同等性 98

第 11 章 共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルとの関係式 106
11.1 重力場における軸性 U(1) 異常項 106
11.2 共変的 Lorentz 異常項と共変的 Einstein 異常項 108
11.3 ピュア共変的 Einstein 異常項とピュア共変的 Lorentz 異常項との関係式 113
11.4 共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl 118
11.5 共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl の具体形 121
11.6 ヒートカーネルの方法による共変的エネルギー運動量テンソルの funcitonal curl の 2 次元での評価 122
11.7 ２次元の共変的 Lorentz 異常項の functional curl 139

第 12 章 結論と課題 142

付録 146

付録 A 群と Lie 代数 146

付録 B ϕ_n と φ_n の関係 150

付録 C 共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ のゲージ変換のもとでの変換則 152

付録 D　式（5.22）の確認　156

付録 E　式（5.26）から式（5.28）の計算　159

付録 F　テスト関数を用いた式 (6.20) の証明　161

付録 G　$a_k(x, x')$ に含まれるガンマ行列の最大個数　162

付録 H　Osabe と Suzuki の current に現れるヒートカーネル　164

付録 I　式 (11.137) の導出　166

付録 J　曲がった空間の場の理論におけるヒートカーネルの方法　167

J.1　geodetic interval と geodetic parallel displacement に関係した coincidence limit　167

J.2　ヒートカーネルの方法 171

付録 K　2 次元の $\delta(eR)$　174

参考文献　177

第 I 部

ゲージ異常項

第 1 章

ゲージ理論

この章では，はじめに，Noether の第 1 定理とその具体例について述べる．次に，ゲージ原理とゲージ理論について述べる．最後に Noether の第 2 定理の具体例を見る．

1.1　Noether の第 1 定理

大局的対称性と保存量

4 次元時空において，N 成分の場 $\phi^A(x)\,(A=1,2,\cdots,N)$ からなる場 $\phi(x)$ を

$$\phi(x)=\begin{pmatrix}\phi^1(x)\\ \vdots \\ \phi^N(x)\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

とする．n 個の $\alpha^a\,(a=1,2,\cdots,n)$ を連続定数パラメータとする無限小変換

$$\begin{aligned}\phi'^A(x)&=\phi^A(x)+\delta\phi^A(x)\\ &=\phi^A(x)+i\alpha^a\left(\tau^a\right)^A{}_B\,\phi^B\end{aligned} \tag{1.2}$$

のもとで不変なラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を考える：

$$\mathcal{L}\left(\phi'^A,\partial_\mu\phi'^A\right)=\mathcal{L}\left(\phi^A,\partial_\mu\phi^A\right). \tag{1.3}$$

ただし，τ^a は $N\times N$ 行列であり，繰り返しの添え字について和をとるものとした．(1.2)，(1.3) より

$$\begin{aligned}0&=\delta\mathcal{L}\left(\phi^A,\partial_\mu\phi^A\right)\\ &=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\delta\phi^A+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^A}\delta\partial_\mu\phi^A\\ &=\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^A}\right)\right]\delta\phi^A+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^A}\delta\phi^A\right)\\ &=i\alpha^a\partial_\mu J^{\mu a}(x)\end{aligned} \tag{1.4}$$

が得られる．ただし，4 行目で運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^A} \right) = 0 \tag{1.5}$$

を用い，カレント $J^{\mu a}(x)$ を

$$J^{\mu a}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^A} \left(\tau^a\right)^A{}_B \, \phi^B(x) \tag{1.6}$$

で導入した．(1.4) が任意の α^a に対して成立するには

$$\partial_\mu J^{\mu a}(x) = 0 \tag{1.7}$$

でなければならない．この式は a ごとの局所的保存を表している．このことより，3 次元空間の全空間で，

$$Q^a = \int d^3x \; J^{0\,a}(x) \tag{1.8}$$

が保存されることがわかる：

$$\frac{dQ^a}{dt} = 0 \; . \tag{1.9}$$

ラグランジアンが連続定数パラメータを n 個持つ変換のもとで不変であればその変換に対応する保存量が n 個存在する．これは，Noether の第 1 定理と呼ばれる．

変換 (1.2) のように変換パラメータが定数の変換を大局的変換という．一般に，ある系のラグランジアンを不変にする変換があるとき，その系には対称性があるという．とくに，大局的変換のもとでの対称性を大局的対称性という．

Noether の第 1 定理の具体例

次に，Noether の第 1 定理の具体例を見る．D 次元時空において Dirac 場 $\psi_A(x)\,(A = 1, 2, \cdots, N)$ からなる場 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

とする．ただし，各 Dirac 場は $2^{[D/2]}$ 成分である．自由な質量 m の Dirac 場の Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{free}} \left(\psi(x), \overline{\psi}(x), \partial_\mu \psi(x) \right) = i \overline{\psi}(x) (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \tag{1.11}$$

を考える．ただし，

$$\overline{\psi}(x) = \left(\overline{\psi}_1(x), \overline{\psi}_2(x), \cdots, \overline{\psi}_N(x) \right) \tag{1.12}$$

である．また，$\gamma^\mu\,(\mu = 0, 1, \cdots, D-1)$ は Dirac のガンマ行列であり，反交換関係 $\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2\eta^{\mu\nu}$ を満たす（$\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, \cdots, -1)$）．

$N \times N$ のユニタリー行列（付録 A 参照）U を

$$U = e^{i\alpha^a T^a} \tag{1.13}$$

と表す．ただし，変換パラメータ α^a は連続な実定数であり，T^a はエルミート行列である．a の範囲は $a = 1 \sim N^2$ である．

ラグランジアン（1.11）は，以下の変換

$$\begin{cases} \psi(x) \to \psi'(x) = U\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi'}(x) = \overline{\psi}(x)U^{-1} \end{cases} \tag{1.14}$$

のもとで不変である：

$$\mathcal{L}_{\text{free}}\left(\psi'(x), \overline{\psi}'(x), \partial_\mu\psi'(x)\right) = \mathcal{L}_{\text{free}}\left(\psi(x), \overline{\psi}(x), \partial_\mu\psi(x)\right). \tag{1.15}$$

(1.15) より，Noether の第 1 定理から

$$\partial_\mu J^{\mu a}(x) = 0 \tag{1.16}$$

が得られる．ただし，$J^{\mu a}(x)$ は

$$J^{\mu a}(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu T^a \psi(x) \tag{1.17}$$

である．

1.2　ゲージ原理

共変微分

一般の連続群 G の $N \times N$ の表現行列 U による大局的変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U\phi(x) \tag{1.18}$$

のもとで不変な理論を考える．ラグランジアンを $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ とすれば

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}(U\phi, U\partial_\mu\phi) \tag{1.19}$$

である．ただし，

$$\partial_\mu(U\phi) = U\partial_\mu\phi \tag{1.20}$$

を用いた．次に，U を x の関数とした局所変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(x)\phi(x) \tag{1.21}$$

を考える．これを局所ゲージ変換という．$\partial_\mu\phi(x)$ はこの変換 (1.21) のもとで共変的に変換しない：

$$\partial_\mu(U(x)\phi(x)) \neq U(x)\partial_\mu\phi(x). \tag{1.22}$$

したがって，この変換のもとでラグランジアンは不変ではない．

ここで，局所ゲージ変換 (1.21) のもとで共変的に変換をするような $\partial_\mu \phi(x)$ に代わるものを構成することを考える．新たに $N \times N$ 行列で記述されるベクトル場 $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a \tag{1.23}$$

を導入する．ただし，$N \times N$ 行列 T^a は連続群 G の表現行列である．そして，$\partial_\mu \phi(x)$ に以下の置き換え

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x) \tag{1.24}$$

を行なった

$$D_\mu \phi(x) \tag{1.25}$$

を考える．これが局所ゲージ変換 (1.21) と $A_\mu(x)$ の適当な変換のもとで共変的に変換することを要請する：

$$D'_\mu \phi'(x) = U(x) D_\mu \phi(x). \tag{1.26}$$

ただし，$D'_\mu = \partial_\mu + iA'_\mu(x)$ である．(1.24) の置き換えをしたラグランジアン $\mathcal{L}(\phi, D_\mu \phi)$ は局所ゲージ変換 (1.21)，(1.26) のもとで不変である．変換 (1.26) より $A_\mu(x)$ の変換則

$$A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x) - i\, U(x) \partial_\mu U^{-1}(x) \tag{1.27}$$

が得られる．右辺第 1 項は $A_\mu(x)$ が共変的に変換した項であり，第 2 項は共変的に変換しなかった項である．(1.27) は $A_\mu(x)$ の局所ゲージ変換と呼ばれる．

局所ゲージ変換のもとでの対称性を局所ゲージ対称性という．一般に，局所ゲージ対称性を持つ理論をゲージ理論という．$G = U(1)$ の場合は $A_\mu(x)$ を電磁場のベクトルポテンシャルと同定できる．したがって，$A_\mu(x)$ は可換ゲージ場である電磁場を拡張したものであり，相互作用を媒介する場であると考えられる．上で見たように，局所ゲージ変換のもとで不変な理論を考えることで相互作用を導入することをゲージ原理という．また，ゲージ原理から導入される場 $A_\mu(x)$ をゲージ場といい，そのとき導入される微分 D_μ(1.24) を共変微分（covariant derivative）という．以上のように，ゲージ原理からゲージ場が得られ，相互作用の形式が決まることが言えた．

ゲージ場としての重力場

Utiyama [57] により，重力場もゲージ場として導入されることが示されている．Dirac 場は Lorentz 変換のもとでスピノール（Lorentz 群の 2 価表現）の変換則に従うが，一般座標変換のもとではスカラーとして振る舞う．曲がった時空，すなわち，重力場中においては，大局的な Lorentz 変換（Lorentz 変換を全時空点で共通に行う変換）は定義できない．重力場中においては，等価原理から時空の各点に局所的に平坦な時空を考えることができる．平坦時空で定義された Dirac 場は，曲がった時空の各点で定義できる．局所 Lorentz 変換（Lorentz 変換を各接空間で独立に行う変換）のもとで Dirac 方程式が共変となるようにするとゲージ場としてスピン接続の場（spinor connection）が導入される（ゲージ原理）．このようにして，重力場中においても Dirac 方程式が扱えるようになる．スピン接続の場は，曲がった時空におけるテンソル場に対する共変微分の Christoffel 記号に対応している．これらについては 8.2 節参照．

ゲージ場の強さ

(1.23) で導入したゲージ場 $A_\mu(x)$ の強さ $F_{\mu\nu}(x)$（field strength）を定義する．(1.25) より

$$D_\mu\phi(x) = \big(\partial_\mu + iA_\mu(x)\big)\phi(x) \tag{1.28}$$

である．これを用いて $\big[D_\mu, D_\nu\big]\phi(x)$ を計算すると

$$\big[D_\mu, D_\nu\big]\phi(x) = iF_{\mu\nu}(x)\phi(x), \tag{1.29}$$

あるいは $\phi(x)$ は任意だからはずして

$$\big[D_\mu, D_\nu\big] = iF_{\mu\nu}(x) \tag{1.30}$$

が得られる．ただし，

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i\big[A_\mu(x), A_\nu(x)\big] \tag{1.31}$$

と定義した．ここで，

$$F_{\mu\nu}(x) = F^a_{\mu\nu}(x)T^a \tag{1.32}$$

とすると，式（1.31）より，

$$F^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) - f^{abc}A^b_\mu(x)A^c_\nu(x) \tag{1.33}$$

が得られる．ただし，f^{abc} は連続群 G の構造定数である．

式（1.29）の局所ゲージ変換より $F_{\mu\nu}(x)$ の局所ゲージ変換のもとでの変換則

$$F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x) \tag{1.34}$$

が得られる．

ゲージ場とゲージ場の強さの無限小局所ゲージ変換

ゲージ場 $A_\mu(x)$ の局所ゲージ変換 (1.27)

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) - i\,U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{1.27}$$

において，表現行列 $U(x)$ を

$$U(x) = e^{i\alpha^a(x)T^a} \tag{1.35}$$

と表す．$\alpha^a(x)$ を $\alpha^a(x) \ll 1$ とすると，$A_\mu(x)$ の無限小局所ゲージ変換が得られる：

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x) + i\left[\alpha(x), A_\mu(x)\right]\,. \tag{1.36}$$

ただし，$\alpha(x)=\alpha^a(x)T^a$ とした．(1.36) より，

$$\begin{aligned}\delta A_\mu(x) &= A'_\mu(x) - A_\mu(x)\\ &= -\partial_\mu \alpha(x) - i\left[A_\mu(x), \alpha(x)\right]\\ &= -D_\mu \alpha(x)\end{aligned} \tag{1.37}$$

が得られる．ただし，

$$D_\mu \alpha(x) = \partial_\mu \alpha(x) + i\left[A_\mu(x), \alpha(x)\right] \tag{1.38}$$

とした．この式の右辺第 2 項は $A_\mu(x)$ が群 G の随伴（adjoint）表現として共変的に変換した項であり，第 1 項はそのように変換しなかった項である．$D_\mu\alpha(x)$ は随伴表現に従う場 $\alpha(x)$ に対する共変微分と呼ばれる．$A_\mu(x)=A^a_\mu(x)T^a$, $\alpha(x)=\alpha^a(x)T^a$ を式（1.37）に用いると，

$$\delta A^a_\mu(x) = -\partial_\mu \alpha^a(x) + f^{abc}A^b_\mu(x)\alpha^c(x) \tag{1.39}$$
$$= -D_\mu \alpha^a(x) \tag{1.40}$$

が得られる．ただし，

$$D_\mu \alpha^a(x) = \partial_\mu \alpha^a(x) - f^{abc}A^b_\mu(x)\alpha^c(x) \tag{1.41}$$

とした．

ゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}(x)$ の局所ゲージ変換 (1.34) に (1.13) を用い，$\alpha^a(x) \ll 1$ とすると，$F_{\mu\nu}(x)$ の無限小局所ゲージ変換が得られる：

$$F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + i\big[\alpha(x), F_{\mu\nu}(x)\big]. \tag{1.42}$$

これより，

$$\begin{aligned}\delta F_{\mu\nu}(x) &= F'_{\mu\nu}(x) - F_{\mu\nu}(x)\\ &= -i\big[F_{\mu\nu}(x), \alpha(x)\big]\end{aligned} \tag{1.43}$$

が得られる．$F_{\mu\nu}(x)=F^a_{\mu\nu}(x)T^a$, $\alpha(x)=\alpha^a(x)T^a$ をこの式に用いると，

$$\delta F^a_{\mu\nu}(x) = f^{abc}F^b_{\mu\nu}(x)\alpha^c(x) \tag{1.44}$$

が得られる．

Bianchi 恒等式

恒等式

$$\Big(\Big[D_\mu, \big[D_\nu, D_\lambda\big]\Big] + \Big[D_\nu, \big[D_\lambda, D_\mu\big]\Big] + \Big[D_\lambda, \big[D_\mu, D_\nu\big]\Big]\Big)\phi = 0 \tag{1.45}$$

を考える．

$$\Big[D_\mu, \big[D_\nu, D_\lambda\big]\Big]\phi = i\big[D_\mu, F_{\nu\lambda}\big]\phi \tag{1.46}$$

であるから，(1.45) は

$$\Big([D_\mu, F_{\nu\lambda}] + [D_\nu, F_{\lambda\mu}] + [D_\lambda, F_{\mu\nu}]\Big)\phi = 0 \tag{1.47}$$

と変形できる．また，

$$[D_\mu, F_{\nu\lambda}]\phi = (D_\mu F_{\nu\lambda})\phi \tag{1.48}$$

である．この式を (1.47) に用いると

$$\big(D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu}\big)\phi = 0 \tag{1.49}$$

が得られる．ϕ は任意関数であるから外すと，結局

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{1.50}$$

が得られる．この式は Bianchi 恒等式と呼ばれる．ここで，$X_{\mu\nu\lambda}$ の $(\mu\nu\lambda)$ について完全反対称化した $X_{[\mu\nu\lambda]}$ を考える：

$$X_{[\mu\nu\lambda]} = \frac{1}{3!}\left(X_{\mu\nu\lambda} + X_{\nu\lambda\mu} + X_{\lambda\mu\nu} - X_{\mu\lambda\nu} - X_{\lambda\nu\mu} - X_{\nu\mu\lambda}\right) \ . \tag{1.51}$$

とくに，

$$X_{\mu\nu\lambda} = -X_{\mu\lambda\nu} \tag{1.52}$$

のとき，式（1.51）は，

$$X_{[\mu\nu\lambda]} = \frac{1}{3}\big(X_{\mu\nu\lambda} + X_{\nu\lambda\mu} + X_{\lambda\mu\nu}\big) \tag{1.53}$$

となる．この表記の仕方を用いると，Bianchi 恒等式（1.50）は，

$$D_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0 \tag{1.54}$$

とも書ける．

Noether の第 2 定理

局所ゲージ変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(x)\phi(x) \tag{1.55}$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) - i\,U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{1.56}$$

のもとで不変なラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\rm int}\left(\psi(x), D_\mu\phi(x)\right) \tag{1.57}$$

を考える．ただし，$D_\mu\phi(x) = \big(\partial_\mu + iA_\mu(x)\big)\phi(x)$ である．このラグランジアンを例に局所ゲージ対称性からの帰結を以下で見ていく．ラグランジアン (1.57) は変換パラメータ $\alpha^a(x)$ が有限の値

を持つ局所ゲージ変換（1.55），（1.56）のもとで不変だから，これらの変換で $\alpha^a(x) \ll 1$ とする無限小ゲージ変換

$$
\begin{aligned}
\delta\phi(x) &= i\alpha(x)\phi(x) && (1.58)\\
\delta A^a_\mu(x) &= -\partial_\mu\alpha^a(x) + f^{abc}A^b_\mu(x)\alpha^c(x) && (1.59)
\end{aligned}
$$

のもとでも作用 $\mathcal{S}_{\mathrm{int}} = \int d^Dx\,\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x)$ は不変である：

$$
\delta\mathcal{S}_{\mathrm{int}} = 0. \tag{1.60}
$$

これより，

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta\mathcal{S}_{\mathrm{int}}\\
&= \int d^Dx\,\delta\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\\
&= \int d^Dx\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial A^a_\mu}\delta A^a_\mu\right)\\
&= \int d^Dx\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial A^a_\mu}\delta A^a_\mu\right]\\
&= \int d^Dx\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial A^a_\mu}\delta A^a_\mu\\
&= -\int d^Dx\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial A^a_\mu}D_\mu\alpha^a(x)\\
&= \int d^DxD_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial A^a_\mu}\cdot\alpha^a(x)\\
&= i\int d^DxD_\mu J^{\mu a}\cdot\alpha^a(x)
\end{aligned}
\tag{1.61}
$$

が得られる．この式の変形で，4 行目から 5 行目で運動方程式

$$
\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{A}}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial\partial_\mu\phi} = 0 \tag{1.62}
$$

を用い，5 行目から 6 行目で，無限小ゲージ変換（1.59）を用いた．また，6 行目から 7 行目で部分積分を行い，最後の行で $J^{\mu a}$ を

$$
J^{\mu a} = \frac{1}{i}\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{int}}}{\partial A^a_\mu} \tag{1.63}
$$

とした．式（1.61）が任意の $\alpha^a(x)$ で成立するには，

$$
D_\mu J^{\mu a} = 0 \tag{1.64}
$$

でなければならない．こうして，局所ゲージ対称性から式（1.64）が得られた．この式は，カレントの共変微分による発散であるため保存則ではない．局所ゲージ対称性からこのような式が成り立つことは Noether の第 2 定理と呼ばれる．

第 2 章

軸性 U(1) 異常項と共変的ゲージ異常項

この章では，まず，軸性 U(1) 異常項を求める．次に，カイラルゲージ理論のカレントの真空期待値を経路積分を用いて表し，共変的な正則化 [58] を用いて共変的カレントを構成する．そして，このカレントの共変微分による発散をとることにより，ゲージ異常項を共変的異常項として導出する [15]．異常項を求める際の評価法としてはヒートカーネルの方法 [25] を用いる．

2.1 軸性 U(1) 異常項

$2n$ 次元時空における Euclid 化したラグランジアン

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\gamma^\mu\big(\partial_\mu + iA^a_\mu T^a\big)\psi \tag{2.1}$$

を考える．ただし，$\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$ は Dirac 場であり，$A^a_\mu(x)$ はゲージ場である．空間の計量 (metric) は $\eta^{\mu\nu} = -\delta^{\mu\nu}$ である．T^a は群 G の N 次元ユニタリー表現の生成子であり，エルミートである．また，γ^μ は反エルミートな Dirac のガンマ行列であり，反交換関係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$ を満たす．ラグランジアン (2.1) はゲージ理論としての局所ゲージ不変性を持ち，この他に軸性 U(1) 変換

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{2.2}$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5} \tag{2.3}$$

のもとでの不変性も持つ．ただし，$\alpha = \mathrm{const}$ であり，$\gamma_5 = i^n\gamma^1\gamma^2\ldots\gamma^{2n}$ である．この大局的不変性に対して Noether の定理を用いると，次の保存則

$$\partial_\mu J^\mu_5 = 0 \tag{2.4}$$

が得られる．ただし，ここで，J^μ_5 は軸性ベクトルカレント

$$J^\mu_5 = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{2.5}$$

である．

古典論における対称性 (2.4) が量子論においても保持されているかを見る．ψ，$\bar{\psi}$ を量子化したときの $J_5^\mu(x)$ の真空期待値 $\langle J_5^\mu(x)\rangle$ は

$$\langle J_5^\mu(x)\rangle = \langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle \tag{2.6}$$
$$= -\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma_5\langle\psi(x)\bar{\psi}(x')\rangle \tag{2.7}$$
$$= \lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu\frac{1}{\not{D}}\delta(x-x') \tag{2.8}$$

で与えられる．ただし，$\not{D} = \gamma^\mu\big(\partial_\mu + iA_\mu(x)\big)$ であり，2 行目でプロパゲーター

$$\langle\psi(x)\bar{\psi}(x')\rangle = \frac{1}{\not{D}}\delta(x-x') \tag{2.9}$$

を用いた．$\langle J_5^\mu(x)\rangle$ は (2.9) の同一点での値を含むため発散している．これを正則化する必要がある．正則化には，この系がもともとゲージ理論であるため，ゲージ不変性・共変性を壊さないような正則化が必要である．$\langle J_5^\mu(x)\rangle$ に cut-off パラメータ s を有限な値として Gauss 型の共変的な正則化因子（regulator）$e^{-s\not{D}^2}$ をかけて紫外発散を有限に抑えて計算し，最終的に $s\to 0$ の極限をとるとすると，共変的軸性ベクトルカレント $\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ は

$$\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{2.10}$$

と書ける．(2.10) で最初に $s\to 0$ をとると正則化する前の式 (2.8) に戻る．この式の発散をとると

$$\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\left(\mathrm{tr}\gamma_5\not{\partial}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') + \mathrm{tr}\gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\not{\partial}\delta(x-x')\right)$$
$$= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}2\mathrm{tr}\gamma_5 e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{2.11}$$

が得られる．ただし，$\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$ であり，最初に

$$\partial'_\mu\delta(x-x') = -\partial_\mu\delta(x-x') \tag{2.12}$$

を用い，1 行目で $\not{\partial} = \not{D} - i\not{A}$ を用い，明白に共変的な形に変形した．

軸性異常項のヒートカーネルによる評価

形式的なレベルの表式 (2.11) をヒートカーネルの方法で評価し，最終的な表式を求める．(2.11) は

$$\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}2\mathrm{tr}\gamma_5 K(x,x';s) \tag{2.13}$$

と書ける．ただし，$K(x,x';s)$ はヒートカーネルで

$$K(x,x';s) = e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{2.14}$$

で定義される．ヒートカーネルの展開

$$K(x,x';s) = \frac{1}{(4\pi s)^n}e^{(x-x')^2/4s}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x,x')s^k \tag{2.15}$$

を (2.13) に用いると

$$\begin{aligned}\partial_\mu \langle J_5^\mu(x)\rangle_{\rm cov} &= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x} 2\frac{1}{(4\pi s)^n} e^{(x-x')^2/4s}\sum_{k=0}^{\infty} {\rm tr}\gamma_5 a_k(x,x') s^k \\ &= \lim_{s\to 0} 2\frac{1}{(4\pi)^n}\sum_{k=0}^{\infty} {\rm tr}\gamma_5 a_k(x,x) s^{k-n} \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる．ただし，$a_k(x,x)$ はガンマ行列を $2k$ 個含む項から始まる (G.7) で与えられる：

$$a_k(x,x) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right)^k + \cdots . \tag{G.7}$$

この式の右辺の $\cdots$ の項に含まれるガンマ行列の個数は $2k$ より少ない．$s\to 0$ の極限で s の次数が 0 より高いオーダーの項は消えることを考慮すると，(2.16) で生き残る項の添え字 k は条件

$$k - n \leq 0 \tag{2.17}$$

を満たすことがわかる．さらに，スピノールの添え字に対するトレースで残る項は γ_5 があるため最低 $2n$ 個のガンマ行列を含んでいなければならない．上で述べたように，$a_k(x,x)$ は最大 $2k$ 個の γ^μ を含む． したがって，生き残る項の添え字 k は条件

$$2k \geq 2n. \tag{2.18}$$

を満たす．条件 (2.17) と (2.18) より

$$k = n \tag{2.19}$$

が得られる．したがって，(2.13) は

$$\begin{aligned}\partial_\mu \langle J_5^\mu(x)\rangle_{\rm cov} &= 2\frac{1}{(4\pi)^n}{\rm tr}\gamma_5 a_n(x,x) \\ &= 2\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}{\rm tr}F_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots F_{\mu_n\nu_n}(x) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

と求まる．ただし，スピノールの添え字に対するトレース ${\rm tr}\gamma_5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}\gamma^{\nu_n} = 2^n(-i)^n\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}$ を用いた．$\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}$ は完全反対称テンソルで $\varepsilon^{12\cdots 2n} = 1$ であり，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$ はゲージ場 A_μ の場の強さである．

(2.20) より，古典論で成立していた対称性が量子論では正則化を通じて破れることがあることがわかった．このとき現れる対称性を破る項を一般に異常項という．とくに (2.20) を軸性 U(1) 異常項 [27–32] という．

2.2　共変的ゲージ異常項

局所ゲージ対称性

カイラルゲージ理論として次のカイラルな相互作用を記述する $2n$ 次元時空における Euclid 化したゲージ理論のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\mathscr{D}\psi(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + iA^{a}_{\mu}(x)T^{a}\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi(x) \tag{2.21}$$

を考える．ただし，$\psi(x)$，$\overline{\psi}(x)$ は Dirac 場であり，$A^{a}_{\mu}(x)$ はゲージ場である．T^{a} は群 G の N 次元ユニタリー表現の生成子であり，エルミートである．最右辺 (　　) 内の第 2 項は，Dirac 場 $\psi(x)$ のカイラル非対称な成分 $\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)$ がゲージ場 $A^{a}_{\mu}(x)$ と結合をすることを示す．

ラグランジアン（2.21）は，以下の局所カイラルゲージ変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}}\psi(x) \tag{2.22}$$

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi'}(x) = \overline{\psi}(x)\, e^{-i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}} \tag{2.23}$$

$$A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x) = e^{i\alpha(x)}\big(A_{\mu}(x) - i\,\partial_{\mu}\big)e^{-i\alpha(x)} \tag{2.24}$$

のもとで不変である．これらの変換で，$\alpha(x) \ll 1$ とすると無限小局所カイラルゲージ変換

$$\delta\psi(x) = i\,\alpha(x)\frac{1-\ \gamma_5}{2}\psi(x) \tag{2.25}$$

$$\delta\overline{\psi}(x) = -\,i\,\overline{\psi}(x)\alpha(x)\frac{1+\ \gamma_5}{2} \tag{2.26}$$

$$\delta A^{a}_{\mu}(x) = -\,\partial_{\mu}\alpha^{a}(x) + f^{abc}A^{b}_{\mu}(x)\alpha^{c}(x) = -D_{\mu}\alpha^{a}(x) \tag{2.27}$$

が得られる．

Noether の第 2 定理より

$$D_{\mu}J^{\mu a}(x) = 0 \tag{2.28}$$

が得られる．ただし，カレント $J^{\mu a}(x)$ を

$$J^{\mu a}(x) = \frac{1}{i}\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial A^{a}_{\mu}(x)} = \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}T^{a}\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x) \tag{2.29}$$

とし，途中，運動方程式を用いた．

経路積分によるカレントの真空期待値

ψ, $\overline{\psi}$ を経路積分で量子化したときのカレント (2.29) の真空期待値 $\langle J^{\mu a}(x)\rangle$ は

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle[A^{b}_{\nu}] = \frac{\int d\psi d\overline{\psi}\, J^{\,\mu a}(x)\exp S\left[\psi,\overline{\psi},A^{b}_{\nu}\right]}{\int d\psi d\overline{\psi}\exp S\left[\psi,\overline{\psi},A^{b}_{\nu}\right]} \tag{2.30}$$

と書ける．ただし，

$$S\left[\psi,\overline{\psi},A_\nu^b\right]=\int dx\,\mathcal{L}\left(\psi(x),\overline{\psi}(x),\mathscr{D}\psi(x)\right), \tag{2.31}$$

$$\mathcal{L}\left(\psi(x),\overline{\psi}(x),\mathscr{D}\psi(x)\right)=\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\left(\partial_\nu+iA_\nu^b(x)T^b\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi(x) \tag{2.32}$$

である．

固有関数とその性質

式（2.30）の経路積分は形式的なものであり，積分を計算するためには，$\psi,\overline{\psi}$ を適当な関数系で具体的に展開しなければならない．$\psi,\overline{\psi}$ の展開には適当なエルミート演算子の固有関数による展開が便利である．エルミート演算子の候補としては $\mathscr{D}$ を考えたいところである．しかし，Euclid 化した理論では内積

$$\left(\psi',\psi\right)=\int dx\,\psi'^\dagger(x)\psi(x) \tag{2.33}$$

の意味で，

$$\left(\mathscr{D}\psi',\psi\right)\neq\left(\psi',\mathscr{D}\psi\right) \tag{2.34}$$

であるから，$\mathscr{D}$ はエルミートではない．$\mathscr{D}$ のエルミート共役 $\mathscr{D}^\dagger$ は，

$$(\mathscr{D}\psi',\psi)=(\psi',\mathscr{D}^\dagger\psi) \tag{2.35}$$

より，

$$\mathscr{D}^\dagger=\gamma^\mu\left(\partial_\mu+iA_\mu^aT^a\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{2.36}$$

である．

エルミート演算子として $\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}$ と $\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ を考える．λ_n^2 を $\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}$ の固有値，$\phi_n(x)$ を固有値 λ_n^2 に属する固有関数とし，

$$\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}\phi_n(x)=\lambda_n^2\,\phi_n(x) \tag{2.37}$$

という固有値方程式を考える．ここで，ノルムが 0 以上であることから，

$$\left(\mathscr{D}\phi_n\,,\mathscr{D}\phi_n\right)=\left(\phi_n\,,\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}\phi_n\right)=\lambda_n^2\left(\phi_n\,,\phi_n\right)\geq 0 \tag{2.38}$$

である．ただし，２番目の等号で式（2.37）を用いた．ϕ_n は固有関数であるから，$\phi_n\neq 0$ より，

$$\left(\phi_n\,,\phi_n\right)>0 \tag{2.39}$$

である．この式と，式（2.38）から，λ_n は実数であることがわかる．

$\lambda_n\neq 0$ の場合は，

$$\mathscr{D}\phi_n=\lambda_n\,\varphi_n \tag{2.40}$$

によって φ_n を定義する．これより，

$$\mathscr{D}^\dagger\varphi_n=\lambda_n\,\phi_n \tag{2.41}$$

が成り立つ（この関係式 (2.40)，(2.41) については付録 B 参照）．式 (2.40)，(2.41) より，φ_n は，

$$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger \varphi_n(x) = \lambda_n^2\, \varphi_n(x) \tag{2.42}$$

を満たす．すなわち，φ_n はエルミート演算子 $\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ の固有関数であり，対応する固有値は λ_n^2 である．

$\lambda_n = 0$ の場合は，式（2.37）より，

$$\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n = 0 \tag{2.43}$$

である．一方，

$$\big(\phi_n\, , \mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n\big) = \big(\mathscr{D}\phi_n\, , \mathscr{D}\phi_n\big) \tag{2.44}$$

である．式（2.43）を式（2.44）の左辺に代入すると，

$$\big(\mathscr{D}\phi_n\, , \mathscr{D}\phi_n\big) = 0 \tag{2.45}$$

となる．これから，

$$\mathscr{D}\phi_n = 0 \tag{2.46}$$

が得られる．同様に，$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ のゼロ固有値に属する固有関数 φ_n,

$$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger \varphi_n = 0 \tag{2.47}$$

は，

$$\mathscr{D}^\dagger \varphi_n = 0 \tag{2.48}$$

を満たす．このように，$\lambda_n = 0$ の場合は ϕ_n と φ_n に $\lambda_n \neq 0$ の場合のような対応関係は無い．以下では，簡単のため，$\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}$, $\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ には $\lambda_n = 0$ のモードは無いものとする．

経路積分の測度

固有関数系 $\{\phi_n\}$, $\{\varphi_n\}$ は，規格直交系を成すもの，

$$\big(\phi_m\, , \phi_n\big) = \big(\varphi_m\, , \varphi_n\big) = \delta_{mn} \tag{2.49}$$

としてよい．そして，この $\{\phi_n\}$, $\{\varphi_n\}$ を用いて経路積分（2.30）における積分変数 ψ, $\overline{\psi}$ を

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x)\ , \qquad \overline{\psi}(x) = \sum_n \overline{b_n} \varphi_n^\dagger(x) \tag{2.50}$$

と展開する．ただし，展開係数 a_n, $\overline{b_n}$ は Grassmann 数である．経路積分の測度を

$$d\psi d\overline{\psi} \equiv \prod_n da_n d\overline{b_n} \tag{2.51}$$

と定義する．

ここで，式（2.50）を式（2.31）に代入すると，作用は対角化され，

$$\int dx\, \overline{\psi}\mathscr{D}\psi = \sum_n \lambda_n \overline{b_n} a_n \tag{2.52}$$

となる．式（2.29）に式（2.50）を代入すると，

$$J^{\mu a}(x) = \sum_{l,\,m} \overline{b_l}\, a_m \varphi_l^\dagger(x)\, \gamma^{\,\mu} T^a \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_m(x) \tag{2.53}$$

となる．これらを (2.30) に用いるとカレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle J^{\mu a}(x)\rangle &= \frac{\int \prod_n da_n d\bar{b_n}\ \overline{\psi}(x)\gamma^{\,\mu} T^a \frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x) \exp\Big(\int dx' \overline{\psi}\mathscr{D}\psi\Big)}{\int \prod_n da_n d\bar{b_n} \exp\Big(\int dx'\, \overline{\psi}\mathscr{D}\psi\Big)} \\ &= \sum_{l,\,m} \varphi_l^\dagger(x)\gamma^{\,\mu} T^a \frac{1-\gamma_5}{2}\phi_m(x) \frac{\int \prod_n da_n d\bar{b_n}\, \bar{b_l}\, a_m \exp\Big(\sum_k \lambda_k \bar{b_k} a_k\Big)}{\int \prod_n da_n d\bar{b_n}\ \exp\Big(\sum_k \lambda_k \bar{b_k} a_k\Big)}\end{aligned} \tag{2.54}$$

となる．この式の

$$\int \prod_n da_n d\bar{b_n}\, \bar{b_l}\, a_m \exp\left(\sum_k \lambda_k \bar{b_k} a_k\right) \tag{2.55}$$

の exp の Taylor 展開を考える．Grassmann 数の性質から，$l=m$ のとき，

$$\begin{aligned}&\int \prod_n da_n d\bar{b_n}\, \bar{b_l}\, a_l \exp\left(\sum_k \lambda_k \bar{b_k} a_k\right) \\ &= \int da_N \cdots da_1 d\bar{b_1} \cdots d\bar{b_N}\, \bar{b_l}\, a_l \big(\lambda_1 \bar{b_1} a_1 \cdot \check{\cdot} \cdot \lambda_N \bar{b_N} a_N\big) \\ &= \prod_{n (n\neq l)} \lambda_n\end{aligned} \tag{2.56}$$

となる．ただし，２行目の ˇ は，l 番目の因子 $\lambda_l \bar{b_l}\, a_l$ を除くことを示す．式（2.55）は，$l \neq m$ のときは，Grassmann 数の積分の性質から 0 となる．また，式（2.54）の分母は，

$$\int \prod_n da_n d\bar{b_n}\ \exp\left(\sum_k \lambda_k \bar{b_k} a_k\right) = \prod_n \lambda_n \tag{2.57}$$

であるから，結局，$\langle J^{\mu a}(x)\rangle$ は，

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle = \sum_l \frac{1}{\lambda_l} \varphi_l^\dagger(x)\, \gamma^{\,\mu} T^a \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_l(x) = \infty \tag{2.58}$$

となる．このカレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle$ は l に関する無限個の和で表されているので発散している．そこで，正則化により $\langle J^{\mu a}(x)\rangle$ を有限量とすることを考える．

共変的カレント

正則化されたカレントとして共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}$ を考える：

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} = \lim_{s\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n^\dagger(x)\, \gamma^\mu T^a \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_n(x) \right\} e^{-s\lambda_n^2}. \tag{2.59}$$

ただし，s は cut-off パラメータである（実際に，共変的 カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}$ がゲージ場 $A_\mu(x)$ の局所ゲージ変換のもとで随伴表現の変換則に従って変換することは，付録 C 参照）．(2.59) で最初に $s\to 0$ をとると (2.58) に戻る．(2.59) は次のように変形できる：

$$
\begin{aligned}
\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} &= \lim_{s\to 0}\sum_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^\dagger(x)\,\gamma^\mu T^a\frac{1-\gamma_5}{2}\phi_n(x)e^{-s\lambda_n^2}\\
&= \lim_{s\to 0}\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\,\gamma^\mu T^a\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1}{\mathscr{D}}\varphi_n(x)e^{-s\lambda_n^2}\\
&= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}{\rm tr}\,\gamma^\mu T^a\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1}{\mathscr{D}}e^{-s\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger}\sum_n\varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(x')\\
&= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}{\rm tr}\,\gamma^\mu T^a\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1}{\mathscr{D}}e^{-s\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger}\delta(x-x')\\
&= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}{\rm tr}\,\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x').
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

ただし，1 行目で (2.40)

$$
\mathscr{D}\phi_n=\lambda_n\,\varphi_n,
\tag{2.40}
$$

2 行目で (2.42)

$$
\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger\varphi_n(x)=\lambda_n^2\,\varphi_n(x),
\tag{2.42}
$$

3 行目で固有関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ の完全性の条件

$$
\sum_n\varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(x')=\delta(x-x')
\tag{2.61}
$$

を用いた．また，$\not{D}$ は非カイラルは $\not{D}=\gamma^\mu(\partial_\mu+iA_\mu^aT^a)$ である．以上をまとめると共変的カレントは

$$
\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}=\lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}{\rm tr}\,\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')
\tag{2.62}
$$

と書ける．

共変的カレントの共変微分による発散

共変的 カレント (2.62) の共変微分による発散をとり，それを $G^a_{\rm cov}(x)$ と書く:

$$
G^a_{\rm cov}(x)=D_\mu\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}\partial_\mu\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}-f^{abc}A_\mu^b(x)\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}.
\tag{2.63}
$$

(2.62) の発散をとると

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} &= \partial_\mu\lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}{\rm tr}\,\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')\\
&= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\left({\rm tr}\,\frac{1+\gamma_5}{2}T^a\not{\partial}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')-{\rm tr}\,\frac{1-\gamma_5}{2}T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\not{\partial}\delta(x-x')\right)\\
&= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\left({\rm tr}\gamma_5T^ae^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')+i{\rm tr}\frac{1+\gamma_5}{2}[\not{A},T^a]\frac{1}{\not{D}}\delta(x-x')\right)\\
&= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\left({\rm tr}\gamma_5T^ae^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')+f^{abc}A_\mu^b\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}\right)
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

となる．ただし，$\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ であり，1 行目で

$$\partial'_\mu \delta(x-x') = -\partial_\mu \delta(x-x') \tag{2.65}$$

を用い，2 行目で $\not\partial = \not D - i\not A$，$\not A = \gamma^\mu A_\mu$ を用い，3 行目で

$$[\not A, T^a] = -if^{abc} A^b_\mu \gamma^\mu T^c \tag{2.66}$$

を用いた．(2.64) を (2.63) に用いると

$$G^a_{\rm cov}(x) = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x} {\rm tr}\gamma_5 T^a e^{-s\not D^2}\delta(x-x') \tag{2.67}$$

が得られる．このように，パリティを保存する項は消えて，パリティを破る項が残る．

共変的ゲージ異常項のヒートカーネルの方法による評価

共変的異常項の形式的なレベルの表式 (2.67) をヒートカーネルの方法で評価し，最終的な表式を求める．(2.67) の両辺に $\Lambda^a(x)$ をかけて x で積分すると

$$\begin{aligned}\int dx \Lambda^a(x) G^a_{\rm cov}(x) &= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\int dx {\rm tr}\gamma_5 \Lambda^a(x) T^a e^{-s\not D^2}\delta(x-x') \\ &= \lim_{s\to 0}\int dx {\rm tr}\Lambda\gamma_5 \langle x| e^{-s\not D^2}|x\rangle \\ &= \lim_{s\to 0}{\rm Tr}\Lambda\gamma_5 e^{-s\not D^2}\end{aligned} \tag{2.68}$$

が得られる．ただし，$\Lambda = \Lambda^a(x)T^a$ であり，Tr はスピノールとゲージ群の添え字に関するトレースに加えて関数空間に関するトレース $\int dx$ を含むことを意味する．この式で一般の演算子 X に対する恒等式

$$\delta e^X = \int_0^1 d\alpha e^{(1-\alpha)X}\delta X e^{\alpha X} \tag{2.69}$$

と Tr の性質を用いると (2.67) は

$$\int dx \Lambda^a(x) G^a_{\rm cov}(x) = -\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}{\rm Tr}\gamma_5 e^{-s(\not D^2+\Lambda)}\Big|_{\Lambda 1\text{ 次}} \tag{2.70}$$

と変形できる．ここで，ヒートカーネル

$$\tilde K(x,x';s) = \langle x| e^{-s(\not D^2+\Lambda)}|x'\rangle \tag{2.71}$$

の展開

$$\tilde K(x,x';s) = \frac{1}{(4\pi s)^n} e^{(x-x')^2/4s}\sum_{k=0}^\infty \tilde a_k(x,x') s^k \tag{2.72}$$

を用いると (2.70) は

$$\int dx \Lambda^a(x) G^a_{\rm cov}(x) = -\frac{1}{(4\pi)^n}\lim_{s\to 0}\sum_{k=0}^\infty {\rm Tr}\gamma_5 \tilde a_k(x,x) s^{k-n-1}\Big|_{\Lambda 1\text{ 次}} \tag{2.73}$$

となる．ただし，$\tilde{a}_k(x,x)$ は 2.1 節の軸性 U(1) 異常項にも現れるヒートカーネル $K(x,x';s) = e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')$ の展開係数

$$a_k(x,x) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right)^k + \cdots \tag{G.7}$$

において

$$\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} \to \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} + \Lambda \tag{2.74}$$

の置き換えをすることで得られる：

$$\tilde{a}_k(x,x) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} + \Lambda\right)^k + \cdots . \tag{2.75}$$

ただし，右辺第 1 項はガンマ行列を最大 $2k$ 個含み，第 2 項以降の $\cdots$ の項に含まれるガンマ行列の個数は $2k$ より少ない．(2.73) の $s \to 0$ の極限で s の次数が 0 次より高いオーダーの項は消えることを考慮すると生き残る項の添え字 k は条件

$$k - n - 1 \leq 0 \tag{2.76}$$

を満たすことがわかる．さらに，スピノールの添え字に対するトレースで残る項は γ_5 があるため最低 $2n$ 個のガンマ行列を含んでいなければならない．上で述べたように，$\tilde{a}_k(x,x)$ は最大 $2k$ 個の γ^μ を含む．したがって，生き残る項の添え字 k は条件

$$2k \geq 2n \tag{2.77}$$

を満たす．条件 (2.76) と (2.77) より

$$k = n, n+1 \tag{2.78}$$

が得られる．したがって，(2.73) は

$$\begin{aligned}
(2.73) &= -\frac{1}{(4\pi)^n}\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}\gamma_5\left(\frac{1}{s}\tilde{a}_n + \tilde{a}_{n+1}\right)\Big|_{\Lambda 1\,\text{次}} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^n}\mathrm{Tr}\gamma_5\tilde{a}_{n+1}\Big|_{\Lambda 1\,\text{次}} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^n}\mathrm{Tr}\gamma_5\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} + \Lambda\right)^{n+1}\Big|_{\Lambda 1\,\text{次}} \\
&= \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\mathrm{Tr}\Lambda\gamma_5\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right)^n \\
&= \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}\mathrm{Tr}\Lambda F_{\mu_1\nu_1}\cdots F_{\mu_n\nu_n},
\end{aligned} \tag{2.79}$$

すなわち，

$$\int dx\Lambda^a(x)G^a_{\mathrm{cov}}(x) = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}\mathrm{Tr}\Lambda F_{\mu_1\nu_1}\cdots F_{\mu_n\nu_n} \tag{2.80}$$

と得られる．(2.79) の 1 行目では $\tilde{a}_n$ の Λ 1 次の項にはガンマ行列が $(2n-2)$ 個しか含まれないので消える．また，2 行目で (2.75) を用い，4 行目で $\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}\gamma^{\nu_n} = 2^n(-i)^n\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}$ を用いた．(2.80) から $\Lambda^a(x)$ を外すと，結局

$$G^a_{\mathrm{cov}}(x) = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}\mathrm{tr}T^a F_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots F_{\mu_n\nu_n}(x) \tag{2.81}$$

が得られる．(2.81) を共変的ゲージ異常項 [1,2] という．(2.81) の導出でヒートカーネルの展開係数 $\tilde{a}_{n+1}(x,x)$ が共変的ゲージ異常項に寄与することから，$2n$ 次元の共変的ゲージ異常項は $2n+2$ 次元の軸性 U(1) 異常項と関係してると考えられる．

第 3 章

整合的カレントと共変的カレント

この章では，まず，整合的カレントの定義と第 2 章で述べた共変的カレントの定義との違いを述べる．そして，整合的ゲージ異常項が満たす Wess–Zumino の整合性条件 [5] およびそれに対応する共変的ゲージ異常項 が満たす条件式を示す．最後に，ゲージ異常項の相殺条件について考える．

3.1　整合的な正則化と共変的な正則化

（2.21）のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + iA_\mu^a T^a \frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi \tag{2.21}$$

を考える．このラグランジアンはゲージ変換のもとで不変であるが，量子化された後には一般に有効作用は不変ではない．有効作用 $W[A_\mu^a]$ は

$$\begin{aligned}\delta_\alpha W[A_\mu^a] &= \int dx \frac{\delta W}{\delta A_\mu^a(x)}\delta_\alpha A_\mu^a(x) \\ &= i\int dx \alpha^a(x) G^a(x)\end{aligned} \tag{3.1}$$

と変換する．ただし，ゲージ異常項 $G^a(x)$ を

$$G^a(x) = D_\mu \langle J^{\mu a}(x)\rangle \tag{3.2}$$

と定義した．カレントの真空期待値 $\langle J^{\mu a}(x)\rangle$ は

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} W[A_\nu^b]. \tag{3.3}$$

で与えられる．また，積分 $\int dx$ は $2n$ 次元空間で行うものとした．以下，断らないときはこの記法を用いる．今の段階では $W[A_\nu^b]$ が発散しているので $\langle J^{\mu a}(x)\rangle$ も発散している．すなわち，これらの表式は形式的な意味しか持っていない．カレント (3.3) に意味を持たせるには，適切な正則化を用いればよい．

正則化には整合的な正則化か共変的な正則化がよく用いられる．整合的に正則化されたカレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}}$ は有効作用 $W[A_\nu^b]$ の正則化として定義される．正則化された有効作用 $W_{\mathrm{reg}}[A_\nu^b]$ を用いて正則化されたカレント

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} W_{\mathrm{reg}}[A_\nu^b] \tag{3.4}$$

を定義する．(3.4) で与えた整合的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}}$ は積分可能条件を満たす：

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\mathrm{cons}} - \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(x')}\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}} = 0. \tag{3.5}$$

もし，$W_{\mathrm{reg}}[A_\nu^b]$ がゲージ不変であるならば，$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}}$ はゲージ変換のもとで共変的に変換する．ところが，異常項が現れるゲージ理論においては $W_{\mathrm{reg}}[A_\nu^b]$ はゲージ不変ではないので，$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}}$ は共変的に変換しない．

第 2 章で述べたように，共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ はゲージ変換のもとで共変的になるように正則化されたカレントの期待値である．$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}}$ とは対照的に $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ はゲージ変換のもとで共変的に変換する．したがって，異常項が現れる理論では $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ を (3.4) の形で表すことができない．とくに，共変的カレントが積分可能条件 (3.5) を満たさないことには注意する必要がある．これらの期待値は A_ν^b の汎関数である．汎関数の性質に注意が必要なときは，$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}[A_\nu^b]$ のような記号を用いる．

これらの正則化されたカレントを (3.2) に代入すると以下のゲージ異常項

$$G^a_{\mathrm{cov}}(x) = D_\mu\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}} \tag{3.6}$$

と

$$G^a_{\mathrm{cons}}(x) = D_\mu\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}} \tag{3.7}$$

を得る．ただし，$G^a_{\mathrm{cov}}(x)$ は共変的ゲージ異常項，$G^a_{\mathrm{cons}}(x)$ は整合的ゲージ異常項である．積分可能条件 (3.5) より，整合的ゲージ異常項 $G^a_{\mathrm{cons}}(x)$ は次節 3.2 で説明する Wess–Zumino の整合性条件 [5] を満たす．

3.2　正則化されたカレントとゲージ異常項のゲージ変換

局所ゲージ変換の生成子

この節では，共変的カレント, 共変的異常項, 整合的カレント, 整合的異常項のそれぞれに対するゲージ場 $A_\mu^a(x)$ の無限小ゲージ変換のもとでの変換則について具体的に見る．まず，ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ の任意汎関数 $f\,[A_\mu^a]$ が，無限小ゲージ変換（1.39）

$$\delta A_\mu^a(x) = -\partial_\mu\alpha^a(x) + f^{abc}A_\mu^b(x)\alpha^c(x) \tag{1.39}$$

のもとで，どのように変化するかを考える：

$$
\begin{aligned}
f[A_\nu^d] \to f[A_\nu'^d] &= f[A_\nu^d + \delta A_\nu^d] \\
&= f[A_\nu^d] + \delta f[A_\nu^d]\ .
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$\delta f[A_\nu^d]$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\delta f[A_\nu^d] &= \int dx\, \frac{\delta f[A_\nu^d]}{\delta A_\mu^a(x)} \delta A_\mu^a(x) \\
&= \int dx\, \frac{\delta f[A_\nu^d]}{\delta\, A_\mu^a(x)} \big(-\partial_\mu \alpha^a(x) + f^{abc} A_\mu^b(x) \alpha^c(x) \big) \\
&= \int dx\, \alpha^a(x\,) \left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} - f^{abc} A_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu^c(x)} \right) f[A_\nu^d] \\
&\equiv \int dx\, \alpha^a(x) L^a(x)\, f[A_\nu^d]
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

となる．ここで，

$$
L^a(x) \equiv \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} - f^{abc} A_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu^c(x)}
\tag{3.10}
$$

とおいた．すなわち，$L^a(x)$ は $f\,[A_\nu^d]$ に対する局所ゲージ変換の生成子である．したがって，容易に確かめられるように $L^a(x)$ は交換関係

$$
\Big[L^a(x), L^b(x') \Big] = f^{abc} \delta(x - x') L^c(x)
\tag{3.11}
$$

を満たすことがわかる．

整合的カレントの無限小ゲージ変換

整合的異常項 $G^a_{\mathrm{cons}} = D_\mu \langle J^{\mu a} \rangle_{\mathrm{cons}}$ は無限小ゲージ変換の生成子 $L^a(x)$ を用いて

$$
G^a_{\mathrm{cons}}(x) = \frac{1}{i} L^a(x) W_{\mathrm{reg}} \big[A_\nu^d \big]
\tag{3.12}
$$

と表される．

式（3.4）の両辺に左から $L^b(x')$ を作用させると，

$$
\begin{aligned}
L^b(x')\, \langle J^{\mu a}(x) \rangle_{\mathrm{cons}} = \frac{1}{i} &\left[L^b(x'), \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \right] W_{\mathrm{reg}} \\
&+ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} L^b(x') W_{\mathrm{reg}}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

が得られる．この式の右辺第 1 項の交換子積は，

$$
\left[L^b(x')\,, \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \right] = -f^{abc} \delta(x - x') \frac{\delta}{\delta A_\mu^c(x)}
\tag{3.14}
$$

と計算される．これを式（3.13）に用いると

$$L^b(x')\left\langle J^{\mu a}(x)\right\rangle_{\rm cons} = -f^{abc}\delta(x-x')\left\langle J^{\mu c}(x)\right\rangle_{\rm cons} + \frac{\delta G^b(x')_{\rm cons}}{\delta A^a_\mu(x)} \tag{3.15}$$

が得られる．ただし，式（3.12）を用いた．この式の右辺第 1 項は随伴表現の変換則に従って変換した項であり，第 2 項はその変換則を破る項である．

整合的異常項の無限小ゲージ変換

交換関係（3.11）を用いると整合的異常項 $G^a_{\rm cons}$ が満たす条件式が得られる：式（3.11）の両辺を有効作用 $W_{\rm reg}[A^a_\mu]$ に作用させると，整合的異常項 $G^a_{\rm cons}$ がゲージ場 $A^a_\mu(x)$ の無限小ゲージ変換のもとで満たす条件式

$$L^a(x)G^b_{\rm cons}(x') - L^b(x')G^a_{\rm cons}(x) = f^{abc}\delta(x-x')G^c_{\rm cons}(x) \tag{3.16}$$

が得られる．これを Wess–Zumino の整合性条件という．

共変的カレントの無限小ゲージ変換

3.1 節で述べたように，共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}$ は，ゲージ場 $A^a_\mu(x)$ の無限小ゲージ変換のもとで

$$\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} = -f^{abc}\alpha^b(x)\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \tag{3.17}$$

と変換する．一方，式（3.9）より，ゲージ場 $A^a_\mu(x)$ の無限小ゲージ変換のもとでの共変的カレントの変化は，

$$\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} = \int dx'\alpha^b(x')L^b(x')\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} \tag{3.18}$$

とも書ける．式（3.17）と式（3.18）を比較すると，

$$L^b(x')\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} = -f^{abc}\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \tag{3.19}$$

が得られる．

共変的異常項の無限小ゲージ変換

式（3.19）の両辺の変数 x に関する共変微分をとると，

$$\begin{aligned} &L^b(x')\partial_\mu\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} - f^{adc}A^d_\mu(x)L^b(x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \\ &\qquad = -f^{abc}\partial_\mu\left\{\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}\right\} + f^{adc}f^{cbe}\delta(x-x')A^d_\mu(x)\langle J^{\mu e}(x)\rangle_{\rm cov} \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる．左辺第 2 項において，$A^d_\mu(x)$ と $L^b(x')$ の順序を交換すると，

$$\begin{aligned} &(\text{式（3.20）の左辺}) \\ &= L^b(x')\Big\{\partial_\mu\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} - f^{adc}A^d_\mu(x)\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}\Big\} + f^{adc}\Big[L^b(x'), A^d_\mu(x)\Big]\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \end{aligned} \tag{3.21}$$

となる．ここで，

$$\Big[L^b(x'), A^d_\mu(x)\Big] = \partial'_\mu \delta^d_b \delta(x-x') - f^{bed} A^e_\mu(x')\delta(x-x') \tag{3.22}$$

となることを用いると，式（3.20）は，

$$\begin{aligned} &L^b(x') G^a_{\rm cov}(x) + f^{adc}\left\{\partial'_\mu \delta^d_b \delta(x-x') - f^{bed} A^e_\mu(x')\delta(x-x')\right\}\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \\ &\quad = -f^{abc}\partial_\mu\left\{\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}\right\} + f^{adc} f^{cbe}\delta(x-x') A^d_\mu(x)\langle J^{\mu e}(x)\rangle_{\rm cov} \end{aligned} \tag{3.23}$$

となる．さらに，この式の左辺第 3 項と右辺第 2 項で，Jacobi 恒等式（A.31）

$$f^{abe} f^{ced} + f^{bce} f^{aed} + f^{cae} f^{bed} = 0 \tag{A.31}$$

を用いると，

$$\begin{aligned} L^b(x')\, G^a_{\rm cov}(x) = &-f^{abc}\partial'_\mu\left(\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}\right) - f^{abc}\partial_\mu\left(\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}\right) \\ &+ f^{bad} f^{edc} A^e_\mu \delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \end{aligned} \tag{3.24}$$

となる．右辺を整理すると，共変的異常項の変換則

$$L^b(x')\, G^a_{\rm cov}(x) = -f^{abc}\delta(x-x')\, G^c_{\rm cov}(x) \tag{3.25}$$

が得られる．すなわち，共変的異常項 $G^a_{\rm cov}(x)$ は無限小ゲージ変換のもとで随伴表現の変換則に従って変換する．式（3.25）から，

$$L^a(x)\, G^b_{\rm cov}(x') - L^b(x')\, G^a_{\rm cov}(x) = 2f^{abc}\delta(x-x')\, G^c_{\rm cov}(x) \tag{3.26}$$

が導かれる．この式と Wess–Zumino の整合性条件（3.16）と比較すると右辺が因子 2 だけ異なった形をしている．

3.3 ゲージ異常項の相殺条件

式（3.15）は，$G^b_{\rm cons}(x') = 0$, すなわち， 整合的異常項が現れないとき，

$$L^b(x')\,\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons} = -f^{abc}\delta(x-x')\,\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cons} \tag{3.27}$$

となる．このとき，整合的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons}$ はゲージ変換のもとで共変的に変換する．したがって，このとき，整合的カレントは共変的カレントでもあるから

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons} = \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} \tag{3.28}$$

が成り立つ．ここで，両辺の共変微分による発散をとると，

$$G^a_{\rm cons}(x) = G^a_{\rm cov}(x) \tag{3.29}$$

が得られる．この式でいま，$G^a_{\rm cons} = 0$ であるから，$G^a_{\rm cov} = 0$ が得られる．すなわち， 整合的異常項が相殺されていれば，共変的異常項も相殺されていることがわかる．

逆に，$G^a_{\rm cov} = 0$ のとき，$G^a_{\rm cons} = 0$ となることが言えると，ゲージ異常項の相殺条件が，共変的異常項と整合的異常項で完全に一致することが言える．これについては，第 5 章で述べる．

第 4 章

Bardeen と Zumino による整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式

この章では，Bardeen と Zumino による整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式の導出 [11] について述べる．はじめに，ここで用いられる外微分形式についてまとめる．次に，整合的異常項が Wess–Zumino の整合性条件 [5] の解として得られることを見る．そして，正則化による不定性の自由度を利用して整合的異常項から定められる整合的カレントに局所的な項を加え，共変的カレントを構成する．得られた共変的カレントの共変微分から整合的異常項と共変的異常項との関係式が得られる．

4.1 外微分形式

外微分形式（exterior differential form）を導入する．

p-form

p-form（p 次微分形式）を

$$\omega^{(p)} = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_p} \tag{4.1}$$

で定義する．ただし，

$$dx^{\mu_k} dx^{\mu_l} = -dx^{\mu_l} dx^{\mu_k} \tag{4.2}$$

である．また，$\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}$ は rank p の反対称テンソル場である．0-form は

$$\omega^{(0)} = \omega \tag{4.3}$$

である．ただし，ω はスカラー場である．

外微分

外微分 d を

$$d = dx^\mu \partial_\mu \tag{4.4}$$

で定義する．d を $\omega^{(p)}$ に作用すると $(p+1)$-from

$$d\omega^{(p)} = \frac{1}{(p+1)!}(p+1)\partial_{[\mu_0}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p]}dx^{\mu_0}dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_p} \tag{4.5}$$

が得られる．

冪零性

定義 (4.4) から

$$d^2 = 0 \tag{4.6}$$

である．

積の微分公式

2 つの場 $\omega^{(p)}$，$\eta^{(q)}$ の積に対する微分は

$$d(\omega^{(p)}\eta^{(q)}) = d\omega^{(p)}\eta^{(q)} + (-1)^p\omega^{(p)}d\eta^{(q)} \tag{4.7}$$

と表される．

Stokes の定理

$$\int_C d\omega^{(p)} = \int_{\partial C}\omega^{(p)}. \tag{4.8}$$

ただし，C は左辺の積分領域であり，∂C は C の境界である．

交換子積の定義

行列値の微分形式に対して交換子積は

$$[\omega^{(p)}, \eta^{(q)}] = \omega^{(p)}\eta^{(q)} - (-1)^{pq}\eta^{(q)}\omega^{(p)} \tag{4.9}$$

と表される．

トレースの性質

行列値の微分形式に対してトレースの性質は

$$\mathrm{tr}(\omega^{(p)}\eta^{(q)}) = (-1)^{pq}\mathrm{tr}\,\eta^{(q)}\omega^{(p)} \tag{4.10}$$

と表される．

4.2 整合的ゲージ異常項

ゲージ場と場の強さ

ゲージ場を

$$A_\mu = -iA_\mu^a \lambda^a \tag{4.11}$$

で定義する．この章でのゲージ場の notation は前章までと異なることに注意する．ただし，$A_\mu^a \in \boldsymbol{R}$ であり，λ^a はゲージ群の生成子で $(\lambda^a)^\dagger = \lambda^a$ である．これも前章までとは異なる notation である．一般の場 ϕ に対する共変微分を

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi \tag{4.12}$$

で定義する．この notation も前章までと異なる．

ゲージ場を 1-form

$$A = A_\mu dx^\mu \tag{4.13}$$

で表す．場の強さ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{4.14}$$

を 2-form

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{4.15}$$

で表す．これと (4.13) から

$$F = dA + A^2 \tag{4.16}$$

が得られる．

随伴表現に従う場に対する共変微分

随伴表現に従う p-from の場 $X^{(p)}$ に対する共変微分を

$$DX^{(p)} = \frac{1}{p!} D_\mu X_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^\mu dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_p} \tag{4.17}$$

で定義する．ただし，

$$D_\mu X_{\mu_1 \cdots \mu_p} = \partial_\mu X_{\mu_1 \cdots \mu_p} + [A_\mu, X_{\mu_1 \cdots \mu_p}] \tag{4.18}$$

である．共変微分の notation が前章までの共変微分と異なることに注意する．(4.17) の右辺を変形すると

$$DX^{(p)} = dX^{(p)} + [A, X^{(p)}] \tag{4.19}$$

が得られる．随伴表現に従う 2 つの場 $X^{(p)}$，$Y^{(q)}$ の積に対する共変微分に対して

$$D(X^{(p)} Y^{(q)}) = DX^{(p)} \cdot Y^{(q)} + (-1)^p X^{(p)} DY^{(q)} \tag{4.20}$$

が成り立つ．

Bianchi 恒等式

Bianchi 恒等式

$$D_\rho F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0 \tag{4.21}$$

の両辺に $1/3 dx^\rho dx^\mu dx^\nu$ をかけると

$$DF = 0 \tag{4.22}$$

が得られる．この式は $F = dA + A^2$ の外微分からも得られる．

整合的ゲージ異常項

ゲージ変換を T_Λ で表す．ゲージ場 A (4.13) に対しては

$$T_\Lambda A = d\Lambda + [A, \Lambda] \tag{4.23}$$

となる．ただし，Λ はゲージ変換の変換パラメータである．正則化された有効作用 $W_{\mathrm{reg}}[A]$ のゲージ変換で整合的ゲージ異常項 G_{cons} は次のように与えられる：

$$T_\Lambda W_{\mathrm{reg}}[A] = \Lambda \cdot G_{\mathrm{cons}}. \tag{4.24}$$

ただし，

$$\Lambda \cdot G_{\mathrm{cons}} = \int \Lambda^a G^{a(\nu)}_{\mathrm{cons}}, \tag{4.25}$$

$$G^{a(\nu)}_{\mathrm{cons}} = -G^a_{\mathrm{cons}} d^\nu x = D_\mu J^{\mu a}_{\mathrm{cons}} d^\nu x, \tag{4.26}$$

$$J^{\mu a}_{\mathrm{cons}}(x) = \frac{\delta W_{\mathrm{reg}}[A]}{\delta A^a_\mu(x)} \tag{4.27}$$

であり，時空次元を ν とした．整合的カレント (4.27) の notation は第 3 章とは異なることに注意する．整合的異常項 G_{cons} は Wess–Zumino の整合性条件

$$T_{\Lambda_1}(\Lambda_2 \cdot G_{\mathrm{cons}}) - T_{\Lambda_2}(\Lambda_1 \cdot G_{\mathrm{cons}}) = [\Lambda_1, \Lambda_2] \cdot G_{\mathrm{cons}} \tag{4.28}$$

を満たす．以下では，代数的方法と呼ばれる Chern–Simons form を用いる方法で (4.28) の一般解として整合的異常項 G_{cons} を求める．

Chern–Simons form

以下で定義される symmetric invariant polynomial $P(F_1, F_2, \cdots, F_n)$ を考える．ただし，$F_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ は Lie 代数の要素である．$P(F_1, F_2, \cdots, F_n)$ は以下の性質を持つ：

1. P の値は実数あるいは複素数.
2. 任意の 2 つの F_i の入れ替えで不変

   任意の i，j に対して

$$P(F_1, \cdots, F_i, \cdots, F_j, \cdots, F_n) = P(F_1, \cdots, F_j, \cdots, F_i, \cdots, F_n). \tag{4.29}$$

3. 各変数に関して線形（多重線形）

$$
\begin{aligned}
&P(F_1, \cdots, \alpha F_i + \beta F_i', F_{i+1}, \cdots, F_n) \\
&= \alpha P(F_1, \cdots, F_i, F_{i+1}, \cdots, F_n) + \beta P(F_1, \cdots, F_i', F_{i+1}, \cdots, F_n).
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

4. ゲージ対称性

任意の $N \times N$ 行列 Λ に対して

$$
P([F_1, \Lambda], F_2, \cdots, F_n) + P(F_1, [F_2, \Lambda], \cdots, F_n) + \cdots + P(F_1, \cdots, F_{n-1}, [F_n, \Lambda]) = 0. \tag{4.31}
$$

ここで，場の強さ F (4.15) を用いて $F = F_1 = F_2 = \cdots = F_n$ と P の変数を form に拡張して，Bianchi 恒等式

$$
dF + [A, F] = 0 \tag{4.32}
$$

を用いると

$$
dP(F, \cdots, F) = 0 \tag{4.33}
$$

が得られる．ただし，上述の P の性質 3 と 4 を用いた．ここで，t を実数として

$$
A_t = tA \tag{4.34}
$$

$$
F_t = tdA + t^2 A^2 \tag{4.35}
$$

と置く．P の性質 2 と 3 を用いると

$$
\frac{d}{dt} P(F_t, \cdots, F_t) = nP(dA, F_t, \cdots, F_t) + nP(\{A_t, A\}, F_t, \cdots, F_t) \tag{4.36}
$$

が得られる．P の性質 4 を用いると

$$
\frac{d}{dt} P(F_t, \cdots, F_t) = ndP(A, F_t, \cdots, F_t) \tag{4.37}
$$

が得られる．この式を t に関して 0 から 1 まで積分すると

$$
P(F, \cdots, F) = d\omega_{2n-1}(A, F) \tag{4.38}
$$

が得られる．ただし，

$$
\omega_{2n-1}(A, F) = n \int_0^1 dt P(F_t, \cdots, F_t, A) \tag{4.39}
$$

とした．ω_{2n-1} は Chern–Simons form，(4.38) は転入公式（transgression formula）と呼ばれる．

BRST 変換

$$
v = -iv^a \lambda^a \tag{4.40}
$$

とする．ただし，v^a は実 Grassmann 数の場 [59]

$$
\{v^a, v^b\} = 0 \tag{4.41}
$$

で

$$\{v^a, dx^\mu\} = 0 \tag{4.42}$$

を満たすとする，BRST 変換 [60–62] を

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} A = -Dv = -dv - \{A, v\} \tag{4.43}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} v = -v^2 \tag{4.44}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} F = Fv - vF \tag{4.45}$$

で定義する．$\boldsymbol{\delta}_B$ は

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2 = d\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} d = 0 \tag{4.46}$$

を満たす．

descent equation

$$\mathcal{A} = A + v \tag{4.47}$$

を導入し，それに対応する field strength を

$$\mathcal{F} = (d + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}})\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \tag{4.48}$$

とする．(4.43) と (4.44) を用いると

$$\mathcal{F} = F \tag{4.49}$$

が得られる．これを水平性条件（horizontality condition）という．t を実数として

$$\mathcal{A}_t = t\mathcal{A} \tag{4.50}$$

$$\mathcal{F}_t = (d + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}})\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^2 \tag{4.51}$$

と置く．P の性質 2，3，4 を用いると

$$\frac{d}{dt} P(\mathcal{F}_t, \cdots, \mathcal{F}_t) = n(d + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}) P(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \cdots, \mathcal{F}_t) \tag{4.52}$$

が得られる．この式の両辺を t に関して 0 から 1 まで積分すると

$$P(\mathcal{F}, \cdots, \mathcal{F}) = (d + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}})\omega_{2n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \tag{4.53}$$

が得られる．ただし，

$$\omega_{2n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = n \int_0^1 dt P(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \cdots, \mathcal{F}_t) \tag{4.54}$$

である．

(4.49) より

$$P(\mathcal{F}, \cdots, \mathcal{F}) = P(F, \cdots, F) \tag{4.55}$$

が得られる．この式に (4.38) と (4.53) を用いると

$$(d+\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}})\omega_{2n-1}(A+v,F)=d\omega_{2n-1}(A,F) \tag{4.56}$$

が得られる．ここで，$\omega_{2n-1}(A+v,F)$ を v の冪で展開する：

$$\omega_{2n-1}(A+v,F)=\omega^0_{2n-1}(A,F)+\omega^1_{2n-2}(v,A,F)+\cdots+\omega^{2n-1}_0(v). \tag{4.57}$$

ただし，上の添え字は v の次数，下の添え字は微分形式の次数を示す．上式を (4.56) に用いると

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\omega^0_{2n-1}+d\omega^1_{2n-2}=0, \tag{4.58}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\omega^1_{2n-2}+d\omega^2_{2n-3}=0, \tag{4.59}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\omega^{2n-2}_1+d\omega^{2n-1}_0=0, \tag{4.60}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\omega^{2n-1}_0=0 \tag{4.61}$$

が得られる．これを descent equation（降下方程式）という．

整合性条件と整合的ゲージ異常項

(4.59) と Stokes の定理 (4.8) より

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\int\omega^1_{2n-2}=0 \tag{4.62}$$

が得られる．一方．有効作用 $W_{\mathrm{reg}}[A]$ の BRST 変換から整合的ゲージ異常項 G^a_{cons}

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}W_{\mathrm{reg}}[A]=v\cdot G_{\mathrm{cons}} \tag{4.63}$$

が得られる．ただし，

$$v\cdot G_{\mathrm{cons}}=\int dxv^aG^a_{\mathrm{cons}} \tag{4.64}$$

と表記した．(4.63) の BRST 変換から

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(v\cdot G_{\mathrm{cons}})=0 \tag{4.65}$$

が得られる．この式は Wess–Zumino の整合性条件 (4.28)

$$T_{\Lambda_1}(\Lambda_2\cdot G_{\mathrm{cons}})-T_{\Lambda_2}(\Lambda_1\cdot G_{\mathrm{cons}})=[\Lambda_1,\Lambda_2]\cdot G_{\mathrm{cons}} \tag{4.28}$$

と同等である．式 (4.65) の解として (4.62) より

$$v\cdot G_{\mathrm{cons}}(A,F)=\int\omega^1_{2n-2}(v,A,F) \tag{4.66}$$

を選ぶことができる．ここで，

$$\omega_{2n-1}(\mathcal{A},\mathcal{F})=n\int_0^1 dtP(\mathcal{A},\mathcal{F}_t,\cdots,\mathcal{F}_t) \tag{4.54}$$

の右辺に

$$\mathcal{F}_t = F_t + (t^2 - t)\{A, v\} + (t^2 - t)v^2 \tag{4.67}$$

を用い v の 1 次で展開すると，(4.66) の右辺は

$$\int \omega^1_{2n-2} = n(n-1)\int_0^1 dt(1-t)\int P(dv, A, F_t, \cdots, F_t) \tag{4.68}$$

となる．したがって，整合的ゲージ異常項 $G_{\text{cons}}(A, F)$ は，結局

$$v \cdot G_{\text{cons}}(A, F) = n(n-1)\int_0^1 dt(1-t)\int P(dv, A, F_t, \cdots, F_t) \tag{4.69}$$

と求まる．

4.3 整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式

ゲージ変換のもとでの整合的カレントの変換則

$$\delta A = B \tag{4.70}$$

と置くと，これによる $W_{\text{reg}}[A]$ の変分から

$$\delta W_{\text{reg}}[A] = B \cdot J_{\text{cons}} \tag{4.71}$$

が得られる．ただし，J_{cons} は整合的カレントであり，

$$B \cdot J_{\text{cons}} = \int B^a J^{(\nu-1)a}_{\text{cons}}, \tag{4.72}$$

$$J^{(\nu-1)}_{\text{cons}} = \frac{1}{(\nu-1)!}\varepsilon_{\mu\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}} J^{\mu}_{\text{cons}} dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_{\nu-1}} \tag{4.73}$$

である．ここで，

$$(\delta T_\Lambda - T_\Lambda\delta)W_{\text{reg}}[A] = [B, \Lambda]\cdot J_{\text{cons}} \tag{4.74}$$

である．これに (4.24) と (4.71) を用いるとゲージ変換のもとでの整合的カレントの変換則

$$T_\Lambda(B \cdot J_{\text{cons}}) = B \cdot [J_{\text{cons}}, \Lambda] + \delta(\Lambda \cdot G_{\text{cons}}) \tag{4.75}$$

が得られる．この式の右辺第 1 項は整合的カレントが随伴表現の変換則に従って変換した項，第 2 項はその変換則に従わなかった項を示す．いま，B がゲージ変換 T_Λ のもとで

$$T_\Lambda B = [B, \Lambda] \tag{4.76}$$

と随伴表現の変換則に従って変換することを要請すると

$$(\delta T_\Lambda - T_\Lambda\delta)W_{\text{reg}}[A] = 0 \tag{4.77}$$

が得られる．これに (4.24) と (4.71) を用いると

$$T_\Lambda(B\cdot J_{\rm cons})=\delta(\Lambda\cdot G_{\rm cons}) \tag{4.78}$$

が得られる．$G_{\rm cons}=0$ のとき，$J_{\rm cons}$ はゲージ変換のもとで共変的に変換し，$G_{\rm cons}\neq 0$ のときはそのように変換しないことがわかる．

整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式

整合的カレント $J_{\rm cons}$ に局所的な項を付け加えることができる不定性の自由度を利用して共変的カレント $J_{\rm cov}$ を構成する：

$$J_{\rm cov}=J_{\rm cons}+X(x). \tag{4.79}$$

共変的ゲージ異常項 $G_{\rm cov}$ は共変的カレント $J_{\rm cov}$ の共変発散で与えられる：

$$G_{\rm cov}=-DJ_{\rm cov}. \tag{4.80}$$

これに (4.79) を用いると，整合的ゲージ異常項と共変的ゲージ異常項との関係式

$$G_{\rm cov}=G_{\rm cons}-DX \tag{4.81}$$

が得られる．以下では実際に X をうまく選ぶことで共変的ゲージ異常項が構成できることを示す．

整合的カレントと共変的カレントの差

共変的カレント $J_{\rm cov}$ はゲージ変換のもとで

$$T_\Lambda J_{\rm cov}=[J_{\rm cov},\Lambda] \tag{4.82}$$

と変換する．この式を用いると

$$T_\Lambda(B\cdot J_{\rm cov})=0 \tag{4.83}$$

が得られる．この式に (4.78) と (4.79) を用いると

$$T_\Lambda(B\cdot X)=-\delta(\Lambda\cdot G_{\rm cons}[A,F]) \tag{4.84}$$

が得られる．これが整合的ゲージ異常項により X を定める式である．これと (4.66)

$$v\cdot G_{\rm cons}(A,F)=\int\omega^1_{2n-2}(v,A,F) \tag{4.66}$$

より

$$\boldsymbol{\delta}_{\rm B}(B\cdot X)=-\delta\int\omega^1_{2n-2}(v,A,F) \tag{4.85}$$

が得られる．

(4.85) の右辺を変形することを考える．

$$\delta A = B, \tag{4.86}$$
$$\delta F = dB + \{A, B\}, \tag{4.87}$$
$$\delta v = 0 \tag{4.88}$$

において

$$\delta = dl + ld \tag{4.89}$$

と置く．このとき，l は上の 3 つの式を再現するために

$$lA = 0, \tag{4.90}$$
$$lF = B, \tag{4.91}$$
$$lv = 0, \tag{4.92}$$
$$lB = 0, \tag{4.93}$$
$$l\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} l = 0 \tag{4.94}$$

を満たさなければならない．(4.89) を ω^1_{2n-2} に作用すると

$$\begin{aligned}\delta\omega^1_{2n-2} &= dl\omega^1_{2n-2} + ld\omega^1_{2n-2} \\ &= dl\omega^1_{2n-2} - l\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\omega^0_{2n-1}\end{aligned} \tag{4.95}$$

が得られる．ただし，1 行目の右辺第 1 項で (4.58)

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\omega^0_{2n-1} + d\omega^1_{2n-2} = 0 \tag{4.58}$$

を用いた．(4.95) の両辺を全空間で積分すると

$$\begin{aligned}\delta\int_\Omega \omega^1_{2n-2} &= \int_\Omega dl\omega^1_{2n-2} - \int_\Omega l\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\omega^0_{2n-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} l\omega^1_{2n-2} + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\int_\Omega l\omega^0_{2n-1} \\ &= \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\int_\Omega l\omega^0_{2n-1} \\ &= \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\int_\Omega l\omega_{2n-1}\end{aligned} \tag{4.96}$$

が得られる．ただし，1 行目の右辺第 1 項で Stokes の定理を用い，2 行目の第 1 項で Ω の境界上で任意の B に対して $l\omega^1_{2n-2} = 0$ であることを用いた．また，最後に上付きの添え字 0 を省略した．(4.96) を (4.85) に用いると

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(B\cdot X) = -\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\int l\omega_{2n-1} \tag{4.97}$$

が得られる．この式を満たす X としては

$$B\cdot X = -\int l\omega_{2n-1} \tag{4.98}$$

がある．この式は (4.97) の一般解ではないが，共変的カレント J_{cov} を構成するための X としては十分である．(4.98) から X を求めることができるが，ここではそれはしない．

共変的ゲージ異常項の構成

$$F_t = tF + (t^2 - t)A^2 \tag{4.99}$$

の両辺に l を作用させると

$$lF_t = tB \tag{4.100}$$

となる．これと (4.39)

$$\omega_{2n-1}(A, F) = n\int_0^1 dtP(F_t, \cdots, F_t, A) \tag{4.39}$$

を用いると (4.98) から

$$B \cdot X = -n(n-1)\int_0^1 dtt\int P(B, A, F_t, \cdots, F_t) \tag{4.101}$$

が得られる．いま，B は任意だから

$$B = -\theta Dv \tag{4.102}$$

とできる．ただし，θ は

$$\{\theta, v^a\} = 0, \tag{4.103}$$

$$\{\theta, dx^\mu\} = 0 \tag{4.104}$$

を満たす．

$$Dv \cdot X = v \cdot DX \tag{4.105}$$

と (4.102) を (4.101) に用いると

$$v \cdot DX = -n(n-1)\int_0^1 dt\, t\int P(Dv, A, F_t, \cdots, F_t) \tag{4.106}$$

が得られる．(4.66)

$$v \cdot G_{\text{cons}} = \int \omega^1_{2n-2}(v, A, F) \tag{4.66}$$

に (4.68)

$$\int \omega^1_{2n-2} = n(n-1)\int_0^1 dt(1-t)\int P(dv, A, F_t, \cdots, F_t) \tag{4.68}$$

に代入したものと (4.106) を用いると，共変的ゲージ異常項は，結局

$$\begin{aligned} v \cdot G_{\mathrm{cov}} &= v \cdot G_{\mathrm{cons}} - v \cdot DX \\ &= n(n-1) \int_0^1 dt \int P(dv + t\{A, v\}, A, F_t, \cdots, F_t) \\ &= n(n-1) \int_0^1 dt \int P(v, dA + \{A_t, A\}, F_t, \cdots, F_t) \\ &= n \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \int P(v, F_t, \cdots, F_t) \\ &= n \int P(v, F, \cdots, F) \end{aligned} \tag{4.107}$$

と得られる．

第 5 章

Banerjee らによる共変的ゲージ異常項と整合的ゲージ異常項との関係式

Banerjee らは正則化された有効作用を共変的カレントを用いて定義することにより共変的ゲージ異常項と整合的ゲージ異常項の同等性の証明を試みた [15]．この同等性の証明にはこれら 2 つのアノマリーの関係式が用いられる．この章では，Banerjee ら [15] による共変的ゲージ異常項と整合的ゲージ異常項との関係式について述べる．この関係式には共変的カレントの functional curl が現れる．彼らはこの関係式を導出する過程で functional curl と共変的異常項との関係式を示した．この関係式を用いると共変的異常項が $G^a_{\rm cov} = 0$ のとき，整合的異常項が $G^a_{\rm cons} = 0$ となることが示せる．これと，第 3 章の議論とから，ゲージ異常項の相殺条件が，共変的異常項と整合的異常項の相殺条件が一致することが言える．

5.1　共変的カレントと整合的カレントとの関係式

Banerjee ら [15] に従い，共変的カレントと整合的カレントとの関係式を導出する．有効作用 $W[A^a_\mu]$ にパラメータ g を以下のように導入する：

$$W_g = W[gA^a_\mu]. \tag{5.1}$$

もし，$g = 1$ とすると，W_g はもとの有効作用 $W[A^a_\mu]$ に戻る．W_g を用いると $W[A^a_\mu]$ を

$$W[A^a_\mu] = \int_0^1 dg \frac{\partial W_g}{\partial g} + W_{g=0} \tag{5.2}$$

と表すことができる．g 依存性は gA^a_μ を通してだけ現れるので

$$W[A^a_\mu] = \int_0^1 dg \int dx \, \frac{\delta W_g}{\delta\big(gA^a_\mu(x)\big)} A^a_\mu(x) \tag{5.3}$$

を得る．ただし，$W_{g=0}$ の項は A^a_μ に関して定数なので落とした．カレントの期待値の定義 (3.3) から (5.3) を

$$W[A_\mu^a] = i\int_0^1 dg \int dx\, A_\mu^a(x)\langle J^{\mu a}(x)\rangle^g \tag{5.4}$$

と書き直す．ただし，以下の記法

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle^g = \langle J^{\mu a}(x)\rangle[gA_\nu^b] \tag{5.5}$$

を用いた．(5.4) はカレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle^g$ がまだ正則化されてないので形式的な意味しか持っていない．文献 [15] の処方の重要な点は，正則化された有効作用 $W[A_\mu^a]_{\rm reg}$ を構成するために，(5.4) において共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}^g = \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}[gA_\nu^b]$ を $\langle J^{\mu a}(x)\rangle^g$ に代入することである：

$$W[A_\mu^a]_{\rm reg} = i\int_0^1 dg \int dx\, A_\mu^a(x)\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}^g. \tag{5.6}$$

正則化された有効作用 (5.6) から整合的カレントを得ることができる．(5.6) の $A_\mu^a(x)$ に関する汎関数微分をとると共変的カレントと整合的カレントとの関係式 [15] を得る：

$$\begin{aligned}
&\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons} \\
&= \int_0^1 dg\langle J^{\mu a}\rangle_{\rm cov}^g + \int_0^1 dg\int dx \int dx' A_\nu^b(x')\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}^g}{\delta A_\mu^a(x)} \\
&= \langle J^{\mu a}\rangle_{\rm cov} - \int_0^1 dg\, g\frac{\partial\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}^g}{\partial g} + \int_0^1 dg\int dx\int dx' A_\nu^b(x')\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}^g}{\delta A_\mu^a(x)} \\
&= \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} + \int_0^1 dg\int dx' gA_\nu^b(x')\left\{\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}^g}{\delta\left(gA_\mu^a(x)\right)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}^g}{\delta\left(gA_\nu^b(x')\right)}\right\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

ただし，2 行目の第 1 項に部分積分を適用し，最終行では g 依存性が gA_μ^a を通してだけ現れることを用いた．最終行第 2 項の被積分関数に共変的カレントの functional curl が現れる．(5.7) の functional curl は以下の functional curl

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A_\mu^a(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A_\nu^b(x')} \tag{5.8}$$

で A_μ^a に gA_μ^a を代入すれば得られる．異常項が現れる理論においては共変的カレントは積分可能条件 (3.5) を満たさないので，この functional curl はゼロではない．*1 (5.7) の共変微分による divergence をとると共変的ゲージ異常項と整合的ゲージ異常項との関係式を得る：

$$G_{\rm cons}^a(x) = G_{\rm cov}^a(x) + D_\mu^{ac}\int_0^1 dg\int dx' gA_\nu^b(x')\left\{\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}^g}{\delta\left(gA_\mu^c(x)\right)} - \frac{\delta\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}^g}{\delta\left(gA_\nu^b(x')\right)}\right\}. \tag{5.9}$$

ただし，$D_\mu^{ac} = \delta^{ac}\partial_\mu - f^{adc}A_\mu^d$ である．

Banerjee ら [15] は共変的カレントの functional curl が $x = x'$ でデルタ関数型の振るまい

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A_\mu^a(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A_\nu^b(x')} \propto \delta(x-x') \tag{5.10}$$

*1 functional curl のパリティを保存する項は消えることがわかる．式 (6.9) 参照．

をすることを用いることによって評価した．詳しくは次節 5.2 で述べるが，(5.10) を用いることで彼らは functional curl が共変的ゲージ異常項を用いて表されることを示した：

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')} = -2\frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)}. \tag{5.11}$$

この式を (5.9) に用い，彼らは文献 [11] の結果と一致する整合的ゲージ異常項を導出した．上で与えた文献 [15] の議論において (5.10) の役割は重要である．しかし，文献 [15] には (5.10) の詳細な証明は示されていない．これらのことから，次章では functional curl がデルタ関数に比例することの詳細な証明を与える．

その前に，次節 5.2 では Banerjee らによる functional curl の評価を見る．

5.2 Banerjee らによる共変的カレントの functional curl の評価

共変的カレントの functioal curl (5.8)

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')} \tag{5.8}$$

の第 1 項の x'^{ν} に関する共変微分は，

$$\begin{aligned}
&D'^{bc}_\nu \frac{\delta\langle J^{\nu c}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} \\
&= \left\{\delta^{bc}\partial'_\nu - f^{bec}A^e_\nu(x')\right\}\frac{\delta\langle J^{\nu c}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} \\
&= \frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)}\left\{\delta^{bc}\partial'_\nu - f^{bec}A^e_\nu(x')\right\}\langle J^{\nu c}(x')\rangle_{\rm cov} + f^{bac}\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \\
&= \frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta A^a_\mu(x)} + f^{bac}\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

である．ただし，3 行目で，

$$\left\{\delta^{bc}\partial'_\nu - f^{bec}A^e_\nu(x')\right\}\langle J^{\nu c}(x')\rangle_{\rm cov} = D'^{bc}_\nu\langle J^{\nu c}(x')\rangle_{\rm cov} = G^b_{\rm cov}(x') \tag{5.13}$$

を用いた．

一方，共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}$ の無限小ゲージ変換は，式（3.19）より、

$$L^b(x')\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} = \left\{\delta^{bc}\partial'_\nu - f^{bec}A^e_\nu(x')\right\}\frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^c_\nu(x')} = f^{bac}\delta(x-x')\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov} \tag{5.14}$$

と書ける．これを式（5.12）の最右辺第 2 項に代入し，整理すると，

$$\left\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\right\}\left\{\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')}\right\} = \frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta A^a_\mu(x)} \tag{5.15}$$

が得られる．ここで，式（5.15）右辺の $G^c_{\rm cov}(x')$ はゲージ場の field strength $F^{\ d}_{\rho\sigma}(x')$ の関数であるから，

$$\delta G^c_{\rm cov}(x') = \int dx'' \frac{\delta G^{\ c}_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ d}_{\rho\sigma}(x'')} \delta F^{\ d}_{\rho\sigma}(x'') \tag{5.16}$$

と書ける．

$$\delta F^{\ d}_{\rho\sigma} = D_\rho \delta A^d_\sigma - D_\sigma \delta A^d_\rho \tag{5.17}$$

を (5.16) に用いると，

$$\begin{aligned} \delta G^c_{\rm cov}(x') &= 2\int dx'' \frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ d}_{\rho\sigma}(x'')} D''^{de}_\rho \delta A^e_\sigma(x'') \\ &= -2\int dx'' \left(D''^{ed}_\rho \frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ d}_{\rho\sigma}(x'')} \right) \delta A^e_\sigma(x'') \end{aligned} \tag{5.18}$$

が得られる．すなわち，

$$\frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta A^a_\mu(x)} = 2\Big\{ \delta^{\,ab}\partial_\nu - f^{aeb} A^e_\nu(x) \Big\} \frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ b}_{\mu\nu}(x)} \tag{5.19}$$

が得られる．

ここで，第 2 章で導出した共変的異常項（2.81）

$$G^a_{\rm cov}(x) = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!} \varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n} {\rm tr} T^a F_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots F_{\mu_n\nu_n}(x) \tag{2.81}$$

を用いる．これを，式（5.19）右辺に用いると

$$\frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ b}_{\mu\nu}(x)} = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n (n-1)!} \varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1\cdots\mu_{n-1}\nu_{n-1}} {\rm Str} T^b T^c F_{\mu_1\nu_1}\cdots F_{\mu_{n-1}\nu_{n-1}} \delta(x-x') \tag{5.20}$$

が得られる．ただし，記号 Str はゲージ群の生成子 T^a に関して完全に対称化したもののトレースをとることを意味する [63, 64]．たとえば，3 つの行列 A, B, C に対しては，

$$\begin{aligned} {\rm Str}\left(ABC\right) &= \frac{1}{3!}{\rm tr}\left(ABC + ACB + BAC + BCA + CAB + CBA\right) \\ &= \frac{1}{2}{\rm tr}\Big(A\{B, C\}\Big) \end{aligned} \tag{5.21}$$

である．式（5.20）に $\delta(x-x')$ が含まれていることと Bianchi 恒等式（1.54）

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} + i\,\left[A_{[\mu}, F_{\nu\lambda]}\right] = 0 \tag{1.54}$$

を用いると，

$$\Big\{ \delta^{\,ab}\partial_\nu - f^{aeb} A^e_\nu(x) \Big\} \frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ b}_{\mu\nu}(x)} = -\Big\{ \delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb} A^e_\nu(x') \Big\} \frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ a}_{\mu\nu}(x)} \tag{5.22}$$

を導くことができる（式（5.22）が成立することは付録 D 参照）. 式（5.15)，(5.19)，(5.22）より，

$$\Big\{ \delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb} A^e_\nu(x') \Big\} \left\{ \frac{\delta \langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')} + 2\frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta F^{\ a}_{\mu\nu}(x)} \right\} = 0 \tag{5.23}$$

が得られる．ここで，Bnerjee らの論文 [15] には証明の詳細は示されていないが共変的カレントの functional curl が $x = x'$ でデルタ関数型の振るまいをすると書かれている：

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')} \propto \delta(x - x'). \tag{5.24}$$

これを認め，(5.20) を用いると (5.23) の $\{\quad\}$ 内を

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')} + 2\frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \equiv T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x - x') \tag{5.25}$$

の形に表すことができる．ここで，$T^{\mu\nu\,ab}(x')$ は微分演算子を含まない適当な関数である．これを用いると，式（5.23）は，

$$\Big\{\delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x - x') = 0 \tag{5.26}$$

と書ける．さらに，この式は，

$$T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x - x') = 0 \tag{5.27}$$

と変形できる．これより，

$$T^{\mu\nu\,ab}(x) = 0 \tag{5.28}$$

となることがわかる（式（5.28）までの計算は付録 E 参照）．したがって，(5.11)

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')} = -2\frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \tag{5.11}$$

が得られる．

5.3 ゲージ異常項の相殺条件

式（5.11）で，共変的異常項 $G^b_{\rm cov}(x') = 0$ のとき，共変的カレントが式（3.5）で述べた積分可能性条件

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')} = 0 \tag{5.29}$$

を満たす．したがって，このとき，共変的カレントは整合的カレントでもあるから，

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} = \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons} \tag{5.30}$$

が成り立つ．ここで，両辺の共変微分による発散をとると，

$$G^a_{\rm cov}(x) = G^a_{\rm cons}(x) \tag{5.31}$$

が得られる．この式でいま，$G^a_{\rm cov}(x) = 0$ であるから，$G^a_{\rm cons}(x) = 0$ が得られる．すなわち，共変的異常項が相殺されていれば，整合的異常項も相殺されていることがわかる．

3.3 節の議論と，いまの議論とから，ゲージ異常項の相殺条件が，共変的異常項と整合的異常項で完全に一致することが言えた．

第 6 章

共変的カレントの functional curl の評価

この章では，最初に Fujikawa と Suzuki [18] による共変的カレントの functional curl の形式的なレベルでの評価を述べる．そして，彼らが得た表式は Banerjee ら [15] の functional curl と共変的ゲージ異常項との関係式に一致することが示される．次に，我々が行ったヒートカーネルの方法を用いた functional curl の直接的なレベルでの評価 [26] について述べる．この評価により得られた結果も上述の Banerjee らの結果を再現することが示される．Fujikawa らと我々の評価はどちらも functional curl がデルタ関数に比例するということの証明になっている．

6.1 Fujikawa と Suzuki による形式的なレベルでの functional curl の評価

Fujikawa と Suzuki [18] は以下のようにして共変的カレントの functional curl を求めた．functional curl を求めるには次のような量を用いるのが便利である：

$$
\begin{aligned}
\langle \delta S \rangle &\equiv \int dx \langle J^{\mu a}(x) \rangle_{\rm cov} \delta A_\mu^a(x) \\
&= -i \int dx \lim_{s\to 0} \lim_{x'\to x} {\rm tr} \frac{1+\gamma_5}{2} \delta \not{D} \frac{1}{\not{D}} e^{-s\not{D}^2} \delta(x-x') \\
&= -i \lim_{s\to 0} {\rm Tr} \frac{1+\gamma_5}{2} \delta \not{D} \frac{1}{\not{D}} e^{-s\not{D}^2}.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

ただし，2 行目で共変的カレントの具体形 (2.62)

$$
\langle J^{\mu a}(x) \rangle_{\rm cov} = \lim_{s\to 0} \lim_{x'\to x} {\rm tr}\, \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma^\mu T^a \frac{1}{\not{D}} e^{-s\not{D}^2} \delta(x-x') \tag{2.62}
$$

を用いた．また，3 行目の Tr はガンマ行列，ゲージ群の行列のトレースに加えて関数空間に関するトレースも含むことを意味する．functional curl は

$$
\delta_1 \langle \delta_2 S \rangle - \delta_2 \langle \delta_1 S \rangle \tag{6.2}
$$

を計算することにより得られる．(6.1) を用いると

$$
\begin{aligned}
\delta_1\langle\delta_2 S\rangle &= \delta_1\left(-i\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\right)\\
&= i\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\frac{1}{\not{D}}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}+\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\frac{1}{\not{D}}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}s\delta_1\not{D}\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2}\right.\\
&\left.+\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}s\delta_1\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2}\right)
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

が得られる．ただし，

$$
\delta\frac{1}{\not{D}} = -\frac{1}{\not{D}}\delta\not{D}\frac{1}{\not{D}} \tag{6.4}
$$

と一般的な演算子 X に対する恒等式

$$
\delta e^X = \int_0^1 d\alpha e^{(1-\alpha)X}\delta X \mathrm{e}^{\alpha X} \tag{6.5}
$$

を用いた．部分積分

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\not{D}}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}s\delta_1\not{D}\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2}\\
&= \frac{1}{\not{D}}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)e^{-\alpha s\not{D}^2}\\
&= -\frac{1}{\not{D}}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}+\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}+s\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-\alpha s\not{D}^2}
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

を (6.3) の 2 行目の Tr 内の第 2 項に代入すると

$$
\begin{aligned}
\delta_1\langle\delta_2 S\rangle &= i\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}+s\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-\alpha s\not{D}^2}\right.\\
&\left.+s\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_1\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2}\right)
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

が得られる．(6.3) で $1\leftrightarrow 2$ とし，Tr の性質を用いると以下が得られる：

$$
\begin{aligned}
\delta_2\langle\delta_1 S\rangle &= i\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}\delta_2\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}+s\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_2\not{D}\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2}\right.\\
&\left.+s\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_1\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_2\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2}\right)\\
&= i\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}+s\frac{1+\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-\alpha s\not{D}^2}\delta_1\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\right.\\
&\left.+s\frac{1-\gamma_5}{2}\delta_2\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-\alpha s\not{D}^2}\delta_1\not{D}e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\right).
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

(6.7)，(6.8) より，結局

$$
\delta_1\langle\delta_2 S\rangle-\delta_2\langle\delta_1 S\rangle = i\lim_{s\to 0}s\,\mathrm{Tr}\gamma_5\delta_2\not{D}\int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_1\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2} \tag{6.9}
$$

が得られる．このように，$1 \leftrightarrow 2$ の反対称化の操作で $1/\not{D}$ を含む項とパリティを保存する項はすべてキャンセルしている．(6.9) を変形すると

$$\begin{aligned}
&\delta_1\langle\delta_2 S\rangle - \delta_2\langle\delta_1 S\rangle \\
&= i\lim_{s\to 0} s\int dx\int dx'\,\mathrm{tr}\gamma_5\delta_2\not{D}'\int_0^1 d\alpha\left(e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2}\delta(x'-x)\right)\delta_1\not{D}e^{-\alpha s\not{D}^2}\delta(x-x') \\
&= -i\lim_{s\to 0} s\int dx\int dx'\delta_1 A^a_\mu(x)\delta_2 A^b_\nu(x') \\
&\qquad\times\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\nu T^b\int_0^1 d\alpha\left(e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2}\delta(x'-x)\right)\gamma^\mu T^a e^{-\alpha s\not{D}^2}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{6.10}$$

が得られるから，形式的なレベルでの functional curl は

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^b_\nu(x')} \\
&= -i\lim_{s\to 0} s\,\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\nu T^b\int_0^1 d\alpha\left(e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2}\delta(x'-x)\right)\gamma^\mu T^a e^{-\alpha s\not{D}^2}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{6.11}$$

であることがわかる [18]．ただし，$\not{D}' = \gamma^\mu(\partial'_\mu + iA^a_\mu(x')T^a)$ である．(6.11) を変形すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^b_\nu(x')} \\
&= \frac{i}{2}\lim_{s\to 0} s\,\mathrm{tr}\gamma_5 T^b\int_0^1 d\alpha\left(e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\delta(x'-x)\right)T^a e^{-\alpha s\not{D}^2}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{6.12}$$

が得られる．スピノールの添え字に対するトレースで残る項は γ_5 があるため最低 $2n$ 個のガンマ行列を含んでいなければならない．したがって，この変形ではガンマ行列が反交換することを用いた．形式的なレベルで表された共変的異常項 (2.67)

$$G^a_{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma_5 T^a e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{2.67}$$

を恒等式 (6.5) を用いて場の強さで変分し，(6.12) と比較すると再び (5.11)

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^b_\nu(x')} = -2\frac{\delta G^b_{\mathrm{cov}}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \tag{5.11}$$

が得られる [18]．以上の証明は，共変的異常項が最終的に (2.81)

$$G^a_{\mathrm{cov}}(x) = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}\mathrm{tr}T^a F_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots F_{\mu_n\nu_n}(x) \tag{2.81}$$

と表されることから，functional curl が $x = x'$ でデルタ関数型の振るまいをすること (5.24)

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^b_\nu(x')} \propto \delta(x-x') \tag{5.24}$$

の証明にもなっている．

6.2 ヒートカーネルの方法を用いた直接的なレベルでの functional curl の評価

以下では，functional curl の形式的なレベルでの表式 (6.11) をヒートカーネルの方法を用いて直接評価する [26]．functional curl (6.11) はヒートカーネル $K(x,x';s)$ を用いると

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)}-\frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')}$$
$$=-i\lim_{s\to 0}s\,\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\nu T^b\int_0^1 d\alpha K(x',x;(1-\alpha)s)\gamma^\mu T^a K(x,x';\alpha s) \tag{6.13}$$

と表される．ただし，$K(x,x';s)$ は

$$K(x,x';s)=e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{6.14}$$

と定義される．ヒートカーネルの展開

$$K(x,x';s)=\frac{1}{(4\pi s)^n}e^{(x-x')^2/4s}\sum_{k=0}^\infty a_k(x,x')s^k \tag{6.15}$$

を (6.13) に用いると，

$$(6.13)=-i\frac{1}{(4\pi)^{2n}}\int_0^1 d\alpha\sum_{k,l}(1-\alpha)^{k-n}\alpha^{l-n}s^{1+k+l-2n}e^{(x-x')^2/4\alpha(1-\alpha)s}$$
$$\times\,\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\nu T^b a_k(x',x)\gamma^\mu T^a a_l(x,x') \tag{6.16}$$

となる．ただし，記号 $\lim\limits_{s\to 0}$ を省略した．右辺に現れる Gauss 型の関数は自由な理論のヒートカーネルと考えることができる．すなわち，

$$K_0(x,x';s)=\frac{1}{(4\pi s)^n}e^{(x-x')^2/4s} \tag{6.17}$$

と定義すれば $K_0(x,x';s)$ は

$$\frac{\partial}{\partial s}K_0(x,x';s)=-\Box K_0(x,x';s),\quad K_0(x,x';0)=\delta(x-x') \tag{6.18}$$

を満たす．ただし，$\Box=\partial_\mu\partial^\mu$ である． (6.18) の形式的な解は

$$K_0(x,x';s)=e^{-s\Box}\delta(x-x') \tag{6.19}$$

と書ける．$e^{-s\Box}$ を s に関して Taylor 展開すると[*1]，

$$e^{(x-x')^2/4s}=(4\pi s)^n\sum_{k=0}^\infty\frac{(-s\Box)^k}{k!}\delta(x-x') \tag{6.20}$$

---

*1 (6.20) のテスト関数を用いた証明は付録 F 参照

となる．この公式と積分公式

$$\int_0^1 d\alpha(1-\alpha)^{k+m}\alpha^{l+m} = \frac{(k+m)!(l+m)!}{(k+l+2m+1)!} \tag{6.21}$$

とから (6.16) は

$$\begin{aligned}(6.16) = &-i\frac{1}{(4\pi)^n}\sum_{k,l,m}\frac{1}{m!}\frac{(k+m)!(l+m)!}{(k+l+2m+1)!}s^{1+k+l+m-n} \\ &\times \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\nu T^b a_k(x',x)\gamma^\mu T^a a_l(x,x')(-\Box)^m\delta(x-x')\end{aligned} \tag{6.22}$$

と書ける．s の次数のオーダーが 0 次より高い項は $s\to 0$ の極限で消えることに注意すると，生き残る項の添え字 k, l, m は条件

$$1+k+l+m-n \le 0 \tag{6.23}$$

を満たすことがわかる．さらに，スピノールの添え字に対するトレースで残る項は γ_5 があるため最低 $2n$ 個のガンマ行列を含んでいなければならない．付録 G で示されるように，$a_k(x,x')$ は最大 $2k$ 個のガンマ行列を含む． したがって，生き残る項の添え字 k と l は条件

$$2+2k+2l \ge 2n \tag{6.24}$$

を満たす．条件 (6.23) と (6.24) より

$$m = 0, \tag{6.25}$$

$$l = n-k-1 \tag{6.26}$$

が得られる．したがって, (6.22) は

$$\begin{aligned}&(6.22) \\ &= -i\frac{1}{(4\pi)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k-1)!}{n!}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\nu T^b a_k(x,x)\gamma^\mu T^a a_{n-k-1}(x,x)\delta(x-x')\end{aligned} \tag{6.27}$$

となる．$a_k(x,x)$ はガンマ行列を $2k$ 個含む項から始まる (G.7) で与えられる：

$$a_k(x,x) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right)^k + \cdots \tag{G.7}$$

ただし，右辺の $\cdots$ の項に含まれるガンマ行列の個数は $2k$ 個より少ない．この式 (G.7) を (6.27), に用いると functional curl の最終的な表式

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta A^b_\nu(x')} \\ &= -2\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n(n-1)!}\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1\cdots\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\mathrm{Str}T^aT^bF_{\mu_1\nu_1}\cdots F_{\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\delta(x-x')\end{aligned} \tag{6.28}$$

を得る．したがって，我々の評価は functional curl が $x=x'$ でデルタ関数型の振るまいをすること (5.24)

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)}-\frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')}\propto\delta(x-x') \tag{5.24}$$

の直接的な証明になっている．この表式を共変的異常項の最終的な表式 (2.81)

$$G^a_{\rm cov}(x)=\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}{\rm tr}T^aF_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots F_{\mu_n\nu_n}(x) \tag{2.81}$$

と比較すると再び (5.11)

$$\frac{\delta\langle J^{\nu b}(x')\rangle_{\rm cov}}{\delta A^a_\mu(x)}-\frac{\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}}{\delta A^b_\nu(x')}=-2\frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \tag{5.11}$$

を得る．

第 7 章

Osabe と Suzuki のカレントの差の評価

Osabe と Suzuki は共変的カレントと整合的カレントを異なる指数関数型の正則化因子を用いて定義し，それらのカレントの差を議論した [20]．このカレントの差には functional curl は現れない．この章では，はじめに彼らが定義した整合的カレントから得られる整合的異常項は整合性条件を満たすということを示す．共変的カレントとしては前章までで用いていたものを用いる．彼らはこれらのカレントの差の表式を形式的な形で表わした．最後に，この形式的な表式の最終的な表式をヒートカーネルの方法により 2 次元と 4 次元で導出した我々の評価法 [26] について述べる．得られた結果は，Bardeen と Zumino の結果 [11] と一致する．

7.1　Osabe と Suzuki のカレントの差

整合性条件

Osabe ら [20] は整合的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons}$ を

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons} = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x} {\rm tr}\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a \frac{1}{\not{D}} e^{-s\not{D}\not{\partial}}\delta(x-x') \tag{7.1}$$

と定義した．$e^{-s\not{D}\not{\partial}}$ は正則化因子である．このカレントが整合的カレントであることは，(7.1) の共変発散から得られる整合的異常項 $G^a_{\rm cons}$

$$G^a_{\rm cons} = D_\mu\langle J^{\mu a}\rangle_{\rm cons} = \partial_\mu\langle J^{\mu a}\rangle_{\rm cons} - f^{abc}A^b_\mu\langle J^{\mu c}\rangle_{\rm cons} \tag{7.2}$$

が整合性条件を満たすことで確認できる．この式に (7.1) を用いると，整合的異常項の具体形は第 2 章で共変的異常項を求めたときの計算と同様にして

$$G^a_{\rm cons}(x) = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x} {\rm tr}T^a\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-s\not{D}\not{\partial}} - {\rm tr}\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-s\not{\partial}\not{D}}\right)\delta(x-x') \tag{7.3}$$

と得られる．

以下では整合的異常項 $G^a_{\rm cons}(x)$ (7.3) が整合性条件を満たすことを確認する [20]．これを確認するのに第 3 章で導出した整合性条件の形よりもこれから導く形の方が扱いやすいので，先にその形

で整合性条件を導出し直す：ゲージ変換の変換パラメータを $\alpha(x)=\alpha^a(x)T^a$ とし，ゲージ場 A_μ に対するゲージ変換を

$$\delta_\alpha A_\mu = -\partial_\mu \alpha + i[\alpha, A_\mu] \tag{7.4}$$

と書く．これを用いると

$$[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]A_\mu = -i\delta_{[\alpha_1,\alpha_2]}A_\mu \tag{7.5}$$

が得られる．さらに，ゲージ場 A_μ の任意汎関数 $f[A]$ に対して

$$\begin{aligned}
[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}]f[A] &= \int dx \int dx' \left(\frac{\delta^2 f[A]}{\delta A^a_\mu(x)\delta A^b_\nu(x')} - \frac{\delta^2 f[A]}{\delta A^b_\nu(x')\delta A^a_\mu(x)} \right) \delta_{\alpha_1} A^a_\mu(x) \delta_{\alpha_2} A^b_\nu(x') \\
&\quad + \int dx \frac{\delta f[A]}{\delta A^a_\mu(x)} [\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}] A^a_\mu(x) \\
&= -i \int dx \frac{\delta f[A]}{\delta A^a_\mu(x)} \delta_{[\alpha_1,\alpha_2]} A^a_\mu(x) \\
&= -i\delta_{[\alpha_1,\alpha_2]} f[A]
\end{aligned} \tag{7.6}$$

が得られる．ただし，1 行目で積分可能条件と (7.5) を用いた．(7.6) から $f[A]$ をはずすと

$$[\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}] = -i\delta_{[\alpha_1,\alpha_2]} \tag{7.7}$$

が得られる．これを有効作用 $W_{\text{reg}}[A^a_\mu]$ に作用すると，整合性条件

$$\delta_{\alpha_1} \int dx \alpha^a_2(x) G^a_{\text{cons}}(x) - \delta_{\alpha_2} \int dx \alpha^a_1(x) G^a_{\text{cons}}(x) = -i \int dx [\alpha_1(x), \alpha_2(x)]^a G^a_{\text{cons}}(x) \tag{7.8}$$

が得られる．

整合的異常項 G^a_{cons} (7.3) が整合性条件 (7.8) を満たすことを確認する：(7.3) を用いると (7.8) の左辺第 1 項は

$$\begin{aligned}
&\delta_{\alpha_1} \int dx\, \alpha^a_2\, G^a_{\text{cons}} \\
&= \delta_{\alpha_1} \int dx\, \alpha^a_2\, \text{tr} T^a \left(\frac{1+\gamma_5}{2} e^{-s\not{D}\not{\partial}} - \frac{1-\gamma_5}{2} e^{-s\not{\partial}\not{D}} \right) \delta(x-x') \\
&= \delta_{\alpha_1} \text{Tr}\, \alpha_2 \left(\frac{1+\gamma_5}{2} e^{-s\not{D}\not{\partial}} - \frac{1-\gamma_5}{2} e^{-s\not{\partial}\not{D}} \right) \\
&= -is \int_0^1 d\beta\, \text{Tr}\, \alpha_2 \left(\frac{1+\gamma_5}{2} e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}} [\alpha_1, \not{D}] \not{\partial} e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}} - \frac{1-\gamma_5}{2} e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}} \not{\partial} [\alpha_1, \not{D}] e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}} \right)
\end{aligned} \tag{7.9}$$

となる．ただし，3 行目の Tr はガンマ行列，ゲージ群の行列のトレースに加えて関数空間に関するトレースも含むことを意味する．また，3 行目で一般的な演算子 X に対する恒等式

$$\delta e^X = \int_0^1 d\beta e^{(1-\beta)X} \delta X \mathrm{e}^{\beta X} \tag{7.10}$$

と

$$\delta_\alpha \not{D} = i[\alpha, \not{D}] \tag{7.11}$$

を用いた．(7.9) で $1 \leftrightarrow 2$ として変形すると

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\alpha_2}\int dx\,\alpha_1^a\,G^a_{\rm cons} \\
&= -is\int_0^1 d\beta\,{\rm Tr}\,\alpha_1\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}[\alpha_2,\not{D}]\not{\partial}e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}\not{\partial}[\alpha_2,\not{D}]e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right) \\
&= -is\int_0^1 d\beta\,{\rm Tr}\,\alpha_2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\not{D}\not{\partial}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}\alpha_1 e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}\not{\partial}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}\alpha_1 e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}\not{D}\right. \\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1+\gamma_5}{2}\not{D}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}\alpha_1 e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\not{\partial}+\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}\alpha_1 e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\not{\partial}\not{D}\right) \\
&= -is\int_0^1 d\beta\,{\rm Tr}\,\alpha_2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}\not{D}\not{\partial}\alpha_1 e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}\not{\partial}\alpha_1\not{D}e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right. \\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}\not{D}\alpha_1\not{\partial}e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}+\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}\alpha_1\not{\partial}\not{D}e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right) \\
&= is\int_0^1 d\beta\,{\rm Tr}\,\alpha_2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}\not{D}[\alpha_1,\not{\partial}]e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}[\alpha_1,\not{\partial}]\not{D}e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right)
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

が得られる．ただし，2 行目で Tr の性質を，3 行目で任意の演算子 X，Y に対して成り立つ

$$
Xe^{YX}=e^{XY}X \tag{7.13}
$$

を用いた．(7.9) と (7.12) より，結局

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\alpha_1}\int dx\,\alpha_2^a\,G^a_{\rm cons}-\delta_{\alpha_2}\int dx\,\alpha_1^a\,G^a_{\rm cons} \\
&= -is\int_0^1 d\beta\,{\rm Tr}\,\alpha_2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}[\alpha_1,\not{D}]\not{\partial}e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}\not{\partial}[\alpha_1,\not{D}]e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right) \\
&\quad -is\int_0^1 d\beta\,{\rm Tr}\,\alpha_2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}\not{D}[\alpha_1,\not{\partial}]e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}[\alpha_1,\not{\partial}]\not{D}e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right) \\
&= -is\int_0^1 d\beta\,{\rm Tr}\,\alpha_2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}[\alpha_1,\not{D}\not{\partial}]e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}[\alpha_1,\not{\partial}\not{D}]e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right) \\
&= i\int_0^1 d\beta\frac{\partial}{\partial\beta}{\rm Tr}\alpha_2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{D}\not{\partial}}\alpha_1 e^{-\beta s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-(1-\beta)s\not{\partial}\not{D}}\alpha_1 e^{-\beta s\not{\partial}\not{D}}\right) \\
&= -i{\rm Tr}\,[\alpha_1,\alpha_2]\left(\frac{1+\gamma_5}{2}e^{-s\not{D}\not{\partial}}-\frac{1-\gamma_5}{2}e^{-s\not{\partial}\not{D}}\right) \\
&= -i\int dx[\alpha_1,\alpha_2]^a G^a_{\rm cons}
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

が得られる．以上から，(7.3) が整合性条件 (7.8) を満たすので，(7.1) が整合的カレントであることが確認できた．

カレントの差

後の計算を簡潔に記すため整合的カレント (7.1) を

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons}=\lim_{s\to 0}{\rm tr}\Big\langle x\Big|\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}\not{\partial}}\Big|x\Big\rangle \tag{7.15}$$

と書く．一方，共変的カレント (2.62) を

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}=\lim_{s\to 0}{\rm tr}\Big\langle x\Big|\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\Big|x\Big\rangle. \tag{7.16}$$

と書く．

Osabe らの共変的カレントと整合的カレントの差の表式の導出 [20] は本質的に以下のように説明できる [26]：$\not{D}_g=\gamma^\mu D^g_\mu=\gamma^\mu(\partial_\mu+igA_\mu)$ を導入し，等式

$$e^{-s\not{D}^2}-e^{-s\not{D}\not{\partial}}=\int_0^1 dg\frac{d}{dg}e^{-s\not{D}\not{D}_g}, \tag{7.17}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
&\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons}-\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}\\
&=-\lim_{s\to 0}\int_0^1 dg\frac{d}{dg}{\rm tr}\Big\langle x\Big|\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}\not{D}_g}\Big|x\Big\rangle\\
&=-\lim_{s\to 0}\int_0^1 dg\int_0^1 d\alpha\,{\rm tr}\Big\langle x\Big|\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\frac{1}{\not{D}}e^{-(1-\alpha)s\not{D}\not{D}_g}\left(-s\not{D}\frac{d\not{D}_g}{dg}\right)e^{-\alpha s\not{D}\not{D}_g}\Big|x\Big\rangle\\
&=\lim_{s\to 0}s\int_0^1 dg\int_0^1 d\alpha\,{\rm tr}\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu T^a\Big\langle x\Big|e^{-(1-\alpha)s\not{D}_g\not{D}}\frac{d\not{D}_g}{dg}e^{-\alpha s\not{D}\not{D}_g}\Big|x\Big\rangle.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

を得る．ただし，3 行目で以下の恒等式を用いた：

$$e^{-s\not{D}\not{D}_g}\not{D}=\not{D}e^{-s\not{D}_g\not{D}}. \tag{7.19}$$

(7.18) は Osabe と Suzuki のカレントの差 [20] と同等である．

7.2 Osabe と Suzuki のカレントの差に対するヒートカーネルの方法による評価

ここで，ヒートカーネルの方法を用いてカレントの差 (7.18) を計算する [26]．ヒートカーネル

$$K_g(x,x';s)=\langle x|e^{-s\not{D}\not{D}_g}|x'\rangle, \tag{7.20}$$

$$\tilde{K}_g(x,x';s)=\langle x|e^{-s\not{D}_g\not{D}}|x'\rangle, \tag{7.21}$$

を導入し，(7.18) を

$$\begin{aligned}
&\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons}-\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}\\
&=\frac{i}{2}\lim_{s\to 0}s\int_0^1 dg\int_0^1 d\alpha\int dx'{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a\tilde{K}_g(x,x';(1-\alpha)s)\not{A}'K_g(x',x;\alpha s),
\end{aligned} \tag{7.22}$$

と表す．ただし，$A\!\!\!/' = \gamma^\nu A_\nu(x')$ である．また，パリティが保存しない項だけが異常項に寄与するので，パリティが保存する項は除いた．K_g と $\tilde{K}_g$ は独立ではない．実際，関係式

$$D\!\!\!\!/_g D\!\!\!\!/ = (D\!\!\!\!/ D\!\!\!\!/_g)^\dagger\,, \tag{7.23}$$

により，これらは

$$\tilde{K}_g(x,x';s) = K_g(x',x;s)^\dagger. \tag{7.24}$$

を満たす．$K_g(x,x';s)$ と $\tilde{K}_g(x,x';s)$ を $2n$ 次元で以下のように展開する：

$$K_g(x,x';s) = \frac{1}{(4\pi s)^n} e^{(x-x')^2/4s} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,x') s^k, \tag{7.25}$$

$$\tilde{K}_g(x,x';s) = \frac{1}{(4\pi s)^n} e^{(x-x')^2/4s} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k(x,x') s^k. \tag{7.26}$$

(7.24) より

$$\tilde{b}_k(x,x') = b_k(x',x)^\dagger \tag{7.27}$$

であることがわかる．展開式 (7.25) と (7.26) を (7.22) に用いると

$$\begin{aligned}(7.22) = \frac{i}{2}\frac{1}{(4\pi)^{2n}}\int_0^1 dg \int_0^1 d\alpha \int dx' \sum_{k,l} (1-\alpha)^{k-n}\alpha^{l-n} s^{1+k+l-2n} \\ \times e^{(x-x')^2/4\alpha(1-\alpha)s} \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a \tilde{b}_k(x,x') A\!\!\!/' b_l(x',x),\end{aligned} \tag{7.28}$$

を得る．ただし，記号 $\lim\limits_{s\to 0}$ を省略した．(6.20) と (6.21) により (7.28) は

$$\begin{aligned}(7.28) = \frac{i}{2}\frac{1}{(4\pi)^n}\int_0^1 dg \int dx' \sum_{k,l,m} \frac{1}{m!}\frac{(k+m)!(l+m)!}{(k+l+2m+1)!} s^{1+k+l+m-n} \\ \times \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a \tilde{b}_k(x,x') A\!\!\!/' b_l(x',x)(-\Box)^m \delta(x-x')\end{aligned} \tag{7.29}$$

となる．右辺において $s \to 0$ の極限で s の次数が 0 次より高い項は消えるので，生き残る項の添え字 k, l, m は条件

$$1 + k + l + m - n \le 0 \tag{7.30}$$

を満たす．

以下では，2 次元と 4 次元で考える．

2 次元 $(n = 1)$ では，条件 (7.30) は

$$k + l + m \le 0, \tag{7.31}$$

となる．これは $k = l = m = 0$ を意味する．したがって，(7.29) より

$$\begin{aligned}\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cons}} - \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}} &= \frac{i}{8\pi}\int_0^1 dg \int dx' \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a \tilde{b}_0(x,x') A\!\!\!/' b_0(x',x)\delta(x-x') \\ &= \frac{1}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\mathrm{tr} T^a A_\nu(x),\end{aligned} \tag{7.32}$$

が得られる．ただし，coincidence limit $b_0(x,x)=\tilde{b}_0(x,x)=\mathbf{1}$ ((H.4)，(7.27)) を用いた．これは以前の結果 [11,15] に一致する．

4 次元では $(n=2)$，条件 (7.30) は

$$k+l+m-1\leq 0. \tag{7.33}$$

となる．この条件の解は $(k,l,m)=(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$．である．この 4 つの解に対する項を計算すると

$$\begin{aligned}
&\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons}-\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}\\
&=\frac{i}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^1 dg\int dx'{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a\left(\frac{1}{s}\tilde{b}_0(x,x')A\!\!\!/'b_0(x',x)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\tilde{b}_1(x,x')A\!\!\!/'b_0(x',x)+\frac{1}{2}\tilde{b}_0(x,x')A\!\!\!/'b_1(x',x)-\frac{1}{3!}\tilde{b}_0(x,x')A\!\!\!/'b_0(x',x)\Box\right)\delta(x-x')\\
&=\frac{i}{2}\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^1 dg\left(\frac{1}{s}{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a[\tilde{b}_0]A\!\!\!/[b_0]\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a[\tilde{b}_1]A\!\!\!/[b_0]+\frac{1}{2}{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a[\tilde{b}_0]A\!\!\!/[b_1]-\frac{1}{3!}\left[\Box'{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a\tilde{b}_0A\!\!\!/'b_0\right]\right),
\end{aligned}\tag{7.34}$$

を得る．ただし，coincidence limit を表記するのに $[\partial_\alpha b_0]=\lim_{x'\to x}\partial_\alpha b_0(x,x')$ のように Synge の記号を用いた．$[b_0]=[\tilde{b}_0]=\mathbf{1}$ だから，(7.34) の被積分関数の第 1 項はスピノールの添え字に対するトレースで消える．coincidence limit (H.4), (H.16) と (7.27) を用いると第 2 項と第 3 項は

$$\frac{1}{2}{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a[\tilde{b}_1]A\!\!\!/[b_0]=i(1+g)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}T^aA_\gamma\partial_\beta A_\alpha+(1+g^2)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}T^aA_\alpha A_\beta A_\gamma, \tag{7.35}$$

$$\frac{1}{2}{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a[\tilde{b}_0]A\!\!\!/[b_1]=i(1+g)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}A_\gamma T^a\partial_\beta A_\alpha+(1+g^2)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}T^aA_\alpha A_\beta A_\gamma. \tag{7.36}$$

となる．(7.34) の最後の項は以下のように計算できる：

$$\begin{aligned}
\Box'(\tilde{b}_0A\!\!\!/'b_0)&=(\Box'\tilde{b}_0)A\!\!\!/'b_0+\tilde{b}_0A\!\!\!/'\Box'b_0+\tilde{b}_0(\Box'A\!\!\!/')b_0\\
&\quad+2(\partial'_\alpha\tilde{b}_0)(\partial'^\alpha A\!\!\!/')b_0+2\tilde{b}_0(\partial'_\alpha A\!\!\!/')\partial'^\alpha b_0+2(\partial'_\alpha\tilde{b}_0)A\!\!\!/'\partial'^\alpha b_0.
\end{aligned}\tag{7.37}$$

(7.37) の coincidence limit は (H.4), (H.14), (H.15), (7.27) を用いて評価できる．したがって，

$$\left[\Box'{\rm tr}\gamma_5\gamma^\mu T^a\tilde{b}_0A\!\!\!/'b_0\right]=2i(1-g)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}\{T^a,A_\gamma\}\partial_\beta A_\alpha+8(1-g)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}T^aA_\alpha A_\beta A_\gamma. \tag{7.38}$$

を得る．これらのことから，結局

$$\begin{aligned}
&\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cons}-\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}\\
&=\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}\{T^a,A_\gamma\}\partial_\beta A_\alpha-\frac{i}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}{\rm tr}T^aA_\alpha A_\beta A_\gamma,
\end{aligned}\tag{7.39}$$

を得る．これは以前の結果 [11,15] に一致する．

第Ⅱ部

重力異常項

第 8 章

曲がった空間の場の理論

この章では，曲がった空間の場の理論で用いられる基礎事項をまとめる．とくに，local Lorentz ベクトルに対する共変微分を導入する．最後に Lie 微分についてまとめる．

8.1　曲がった空間と接空間

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x)$ と world 基底 $\boldsymbol{E}_\mu(x)$

D 次元の曲がった空間上に沿って world 座標 x^μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, D-1)$ をとる．空間の各点における接空間上で x^μ に沿った基底ベクトル（接ベクトル）を $\boldsymbol{E}_\mu(x)$ とする．$\boldsymbol{E}_\mu(x)$ を world 基底と呼ぶ．world 基底の内積は

$$\boldsymbol{E}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{E}_\nu(x) = g_{\mu\nu}(x) \tag{8.1}$$

となる．$g_{\mu\nu}(x)$ は計量テンソルである．また，

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x) \tag{8.2}$$

である．

$\boldsymbol{E}_\mu(x)$ は一般座標変換

$$x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x) \tag{8.3}$$

のもとで

$$\boldsymbol{E}'_\mu(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \boldsymbol{E}_\alpha(x) \tag{8.4}$$

と変換する．(8.1) と (8.4) より一般座標変換のもとで $g_{\mu\nu}(x)$ は

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \tag{8.5}$$

と変換することがわかる．

世界距離の 2 乗

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \tag{8.6}$$

は一般座標変換のもとで不変である.

接空間上にベクトル場 $\boldsymbol{V}(x)$ が与えられたとする. $\boldsymbol{V}(x)$ の μ 成分を $V^\mu(x)$ とすると $\boldsymbol{V}(x)$ は

$$\boldsymbol{V}(x) = V^\mu(x)\boldsymbol{E}_\mu(x) \tag{8.7}$$

と表される.

$\boldsymbol{V}(x)$ は座標系によらない量なので, 一般座標変換のもとで $V^\mu(x)$ は, (8.4), (8.7) より

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} V^\alpha(x) \tag{8.8}$$

と変換することがわかる. すなわち, $\boldsymbol{E}_\mu(x)$ の変換行列 $(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu})$ と $V^\mu(x)$ の変換行列 $(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha})$ とは逆行列の関係にある.

計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ の逆行列と添え字の上げ下げ

$(g_{\mu\nu})$ の逆行列を $(g^{\mu\nu})$ とする：

$$g_{\mu\nu}(x)g^{\nu\rho}(x) = \delta_\mu^\rho \ . \tag{8.9}$$

$V_\mu(x)$ を

$$V_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x)V^\nu(x) \tag{8.10}$$

と定義する. (8.9) と (8.10) より

$$V^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x)V_\nu(x) \tag{8.11}$$

が得られる. このように, $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ を用いて添え字の上げ下げを行うことができる.

world ベクトル

(8.5), (8.8) および (8.10) より $V_\mu(x)$ は一般座標変換のもとで

$$V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V_\alpha(x) \tag{8.12}$$

と変換することがわかる. これは world 座標の基底ベクトルの変換則 (8.4) と同じ変換則である. このことから $V_\mu(x)$ は world 座標の共変ベクトルと呼ばれる. これに対し $V^\mu(x)$ はこれらとの変換則の違いから world 座標の反変ベクトルと呼ばれる. $V^\mu(x)$, $V_\mu(x)$ は world ベクトルとも呼ばれる.

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x)$ と world 基底 $\boldsymbol{E}_\mu(x)$ に独立な基底 $\boldsymbol{e}_a(x)$

次に, 曲がった空間の各点における接空間上に world 基底 $\boldsymbol{E}_\mu(x)$ とは独立に基底ベクトル $\boldsymbol{e}_a(x)$ $(a = 0, 1, 2, \ldots, D-1)$ をとる. $\boldsymbol{e}_a(x)$ の内積は

$$\boldsymbol{e}_a(x) \cdot \boldsymbol{e}_b(x) = \eta_{ab} \tag{8.13}$$

となる．η_{ab} は Minkowski 空間の計量テンソルである．$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, \dots, -1)$ である．

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x)$ の a 成分を $V^a(x)$ とすると $\boldsymbol{V}(x)$ は

$$\boldsymbol{V}(x) = V^a(x)\boldsymbol{e}_a(x) \tag{8.14}$$

とも表される．

local Lorentz 変換と local Lorentz 基底

曲がった空間の各点において基底ベクトル $\boldsymbol{e}_a(x)$ にはとり方の任意性がある．したがって，接空間上に world 基底 $\boldsymbol{E}_\mu(x)$ とは独立な新たな基底ベクトル $\boldsymbol{e}'_a(x)$ をとる．$\boldsymbol{e}'_a(x)$ の内積も $\boldsymbol{e}_a(x)$ の内積 (8.13) と同じ値を持つとする：

$$\boldsymbol{e}'_a(x) \cdot \boldsymbol{e}'_b(x) = \eta_{ab} \quad . \tag{8.15}$$

$\boldsymbol{e}'_a(x)$ は $\boldsymbol{e}_a(x)$ の重ね合わせで表すことができる．それは一次変換で

$$\boldsymbol{e}'_a(x) = L_a{}^b(x)\boldsymbol{e}_b(x) \tag{8.16}$$

と書ける．(8.13), (8.15), (8.16) を満たす $(L_a{}^b)$ を Lorentz 変換の変換行列という．この変換は接空間で行われるので local Lorentz 変換と呼ばれる．このことから，$\boldsymbol{e}_a(x)$ を local Lorentz 基底という．

計量テンソル η_{ab} の逆行列と添え字の上げ下げ

(η_{ab}) の逆行列を (η^{ab}) とする：

$$\eta_{ab}\eta^{bc} = \delta^a_c \quad . \tag{8.17}$$

$V_a(x)$ を

$$V_a(x) = \eta_{ab}V^b(x) \tag{8.18}$$

と定義する．(8.17) と (8.19) より

$$V^a(x) = \eta^{ab}V_b(x) \tag{8.19}$$

が得られる．このように，η_{ab}, η^{ab} を用いて添え字の上げ下げを行うことができる．

(8.15) に (8.16) を代入すると local Lorentz 変換の行列 L が満たす関係式

$$L_a{}^c L_b{}^d \eta_{cd} = \eta_{ab} \tag{8.20}$$

が得られる．この式の両辺に η^{ae} をかけると

$$L^e{}_d L_b{}^d = \delta^e_b \tag{8.21}$$

が得られる．ただし

$$L^e{}_d = \eta^{ae}\eta_{cd}L_a{}^c \tag{8.22}$$

とした．(8.21) より $(L^e{}_d)$ は $(L_b{}^d)$ の転置・逆行列であることがわかる．

local Lorentz ベクトル

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x)$ は基底のとり方によらない量だから, $V^a(x)$ は local Lorentz 変換のもとで (8.14), (8.16) および (8.21) より

$$V'^a(x) = L^a{}_b(x) V^b(x) \tag{8.23}$$

と変換することがわかる. (8.19) とこれより $V_a(x)$ は local Lorentz 変換のもとで

$$V'_a(x) = L_a{}^b(x) V_b(x) \tag{8.24}$$

と変換することがわかる. これは local Lorentz 系の基底ベクトルの変換則 (8.16) と同じ変換則である. このことから $V_a(x)$ は local Lorentz 系の共変ベクトルと呼ばれる. これに対し $V^a(x)$ はこれらとの変換則の違いから local Lorentz 系の反変ベクトルと呼ばれる. $V^a(x)$, $V_a(x)$ は local Lorentz ベクトルとも呼ばれる. これ以降も world 座標の添え字をギリシャ文字で, local Lorentz ベクトルの添え字を ローマ字で表すものとする.

無限小 local Lorentz 変換

$|\epsilon_a{}^b(x)|$ が十分小さいとして $L_a{}^b(x)$ を

$$L_a{}^b(x) = \delta_a^b + \epsilon_a{}^b(x) \tag{8.25}$$

と展開する. この式を無限小 local Lorentz 変換という. これを (8.20) に代入すると

$$\epsilon_{ab}(x) = -\epsilon_{ba}(x) \tag{8.26}$$

が得られる. (8.25) を (8.22) に代入すると

$$L^a{}_b(x) = \delta_b^a + \epsilon^a{}_b(x) \tag{8.27}$$

が得られる. これと (8.23) より V^a の無限小 local Lorentz 変換は

$$V'^a(x) = V^a(x) + \epsilon^a{}_b(x) V^b(x) \tag{8.28}$$

となることがわかる. ここで, この式の右辺第 2 項を

$$\delta_{\mathrm{lL}} V^a(x) = \epsilon^a{}_b(x) V^b(x) \tag{8.29}$$

と書く. これと (8.19) より

$$\delta_{\mathrm{lL}} V_a(x) = -\epsilon^b{}_a(x) V_b(x) \tag{8.30}$$

であることがわかる. ただし, ϵ の反対称性 (8.26) を用いた.

vielbein

local Lorentz 基底 $\boldsymbol{e}_a(x)$ の μ 成分を ${e_a}^\mu(x)$ とし, 曲がった空間の計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を用いると (8.13) は

$$g_{\mu\nu}(x){e_a}^\mu(x){e_b}^\nu(x) = \eta_{ab} \tag{8.31}$$

と書ける. すなわち, $g_{\mu\nu}(x)$ と η_{ab} とは ${e_a}^\mu(x)$ を通して関係している. ${e_a}^\mu(x)$ は添え字 a に関して local Lorentz ベクトルであり, 添え字 μ に関して world ベクトルである. この ${e_a}^\mu(x)$ を vielbein（多脚場）という. ${e_a}^\mu$ と逆行列の関係にあるものとして ${e^b}_\mu$ を

$${e_a}^\mu {e^b}_\mu = \delta_a^b \tag{8.32}$$

で定義する. したがって

$${e_a}^\mu {e^a}_\nu = \delta_\nu^\mu \tag{8.33}$$

も成立する.

$${e^c}_\mu = g_{\mu\nu}{e_b}^\nu \eta^{bc} \tag{8.34}$$

で添え字の上げ下げを定義する. これより

$$\eta_{ab}{e_a}^\mu {e^b}_\nu = g_{\mu\nu} \tag{8.35}$$

が得られる.

$$g = \det g_{\mu\nu} \ , \tag{8.36}$$

$$e = \det {e^a}_\mu \tag{8.37}$$

とすると, (8.35) より

$$e = \sqrt{-g} \tag{8.38}$$

が得られる.

共変微分（world ベクトル、スカラー、計量テンソル）

曲がった空間では基底 $\boldsymbol{E}_\mu(x)$ が空間点ごとに異なる. したがって, world ベクトルの微分 $\partial_\lambda V^\mu$, $\partial_\lambda V_\mu$ は一般座標変換のもとで共変的に変換しない（一般座標変換の既約表現ではない）. 一般座標変換のもとで共変的な微分は以下の world ベクトルに対する共変微分（covariant derivative）と呼ばれるものである：

$$D_\lambda V^\mu(x) = \partial_\lambda V^\mu(x) + {\Gamma^\mu}_{\rho\lambda}(x)V^\rho(x) \ , \tag{8.39}$$

$$D_\lambda V_\mu(x) = \partial_\lambda V_\mu(x) - {\Gamma^\rho}_{\mu\lambda}(x)V_\rho(x) \ . \tag{8.40}$$

ただし, Γ は Christoffel 記号であり,

$${\Gamma^\mu}_{\rho\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\rho g_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho\lambda}) \tag{8.41}$$

である．また

$$\Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} \tag{8.42}$$

である．$\Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda}(x)$ は一般座標変換のもとで

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\rho\lambda}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}. \tag{8.43}$$

と変換する．右辺第１項はテンソルの変換則従って変換した項であり，第２項はテンソルの変換則に従わなかった項（非斉次項）である．

スカラー場 $\phi(x)$ は一般座標変換のもとで不変である：

$$\phi'(x') = \phi(x). \tag{8.44}$$

したがって，スカラー場に対する共変微分は通常の微分である：

$$D_{\mu}\phi(x) = \partial_{\mu}\phi(x) \ \ . \tag{8.45}$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は共変微分に対して定数である：

$$D_{\lambda}g_{\mu\nu}(x) = \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(x) - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}(x)g_{\sigma\nu}(x) - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}(x)g_{\mu\sigma}(x) = 0 \ \ . \tag{8.46}$$

曲率テンソル（world ベクトル）

交換子積 $[D_{\mu}, D_{\nu}]$ を world ベクトル V^{λ}, V_{λ} に作用すると

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]V^{\lambda} = R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}V^{\rho} \tag{8.47}$$

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]V_{\lambda} = -R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}V_{\rho} \tag{8.48}$$

が得られる．ここで

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} \tag{8.49}$$

である．$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}$ は Riemann の曲率テンソルと呼ばれ，添え字の入れ替えに対して

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\rho\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\nu\mu} = R_{\rho\lambda\nu\mu} = R_{\mu\nu\lambda\rho} \tag{8.50}$$

の性質を持つ．

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{8.51}$$

を定義する．$R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソルと呼ばれ，添え字の入れ替えに対して対称である：

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \tag{8.52}$$

また，

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{8.53}$$

を定義する．R はスカラー曲率と呼ばれる．

8.2 local Lorentz ベクトルに対する共変微分

共変微分（local Lorentz ベクトル）

local Lorentz 基底 $\boldsymbol{e}_a(x)$ は曲がった空間の空間点ごとの接空間で異なる. したがって, local Lorentz ベクトルの微分 $\partial_\mu V^a$, $\partial_\mu V_a$ は local Lorentz 変換のもとで共変的に変換しない（local Lorentz 変換の既約表現ではない）:

$$\partial_\mu V'^a(x) = \partial_\mu (L^a{}_b(x) V^b(x)) \neq L^a{}_b(x) \partial_\mu V^b(x). \tag{8.54}$$

local Lorentz 変換のもとで共変的な微分, すなわち, 共変微分を構成する. $\boldsymbol{V}(x)$ を x から微小距離だけ離れた $x+dx$ に平行移動したものを

$$\boldsymbol{V}_\parallel(x+dx) = V_\parallel^a(x+dx)\boldsymbol{e}_a(x+dx) \tag{8.55}$$

とする. $\boldsymbol{V}(x+dx)$

$$\boldsymbol{V}(x+dx) = V^a(x+dx)\boldsymbol{e}_a(x+dx) \tag{8.56}$$

から $\boldsymbol{V}_\parallel(x+dx)$ を引いたものを $D\boldsymbol{V}(x+dx)$ とする：

$$D\boldsymbol{V}(x+dx) = \boldsymbol{V}(x+dx) - \boldsymbol{V}_\parallel(x+dx)\ . \tag{8.57}$$

$D\boldsymbol{V}(x+dx)$ は同一点でのベクトルの差だからベクトルである.

$\boldsymbol{e}_a(x)$ を $x+dx$ に平行移動したものを $\boldsymbol{e}_{\parallel a}(x+dx)$ とすると, $\boldsymbol{V}_\parallel(x+dx)$ は

$$\boldsymbol{V}_\parallel(x+dx) = V^a(x)\boldsymbol{e}_{\parallel a}(x+dx) \tag{8.58}$$

と書ける.

$\boldsymbol{e}_a(x)$ の μ 成分 $e_a{}^\mu(x)$ と $\boldsymbol{e}_a(x+dx)$ の μ 成分 $e_a{}^\mu(x+dx)$ が無限小 local Lorentz 変換で

$$e_a{}^\mu(x+dx) = L'_a{}^b e_b{}^\mu(x) \tag{8.59}$$

と結ばれているとする. ここで

$$L'_a{}^b = \delta_b^a + \epsilon'_a{}^b(x) \tag{8.60}$$

である. $\epsilon'_a{}^b(x)$ は dx のオーダーの微小量である. また $e_a{}^\mu(x)$ と $\boldsymbol{e}_{\parallel a}(x+dx)$ の μ 成分 $e_{\parallel a}{}^\mu(x+dx)$ が無限小 local Lorentz 変換で

$$e_{\parallel a}{}^\mu(x+dx) = L''^b_a e_b{}^\mu(x) \tag{8.61}$$

と結ばれているとする. ここで

$$L''^b_a = \delta_b^a + \epsilon''^b_a(x) \tag{8.62}$$

である. $\epsilon''^b_a(x)$ は dx のオーダーの微小量である.

$\boldsymbol{e}_{\|a}(x+dx)$ は $\boldsymbol{e}_a(x+dx)$ の重ね合わせで表すことができる．すなわち，${e_a}^\mu(x)$ が ${e_a}^\mu(x+dx)$, ${e_{\|a}}^\mu(x+dx)$ とそれぞれ無限小 local Lorentz 変換で結ばれていることと, $\boldsymbol{e}_a(x+dx)$ が

$$\boldsymbol{e}_a(x+dx)\cdot\boldsymbol{e}_b(x+dx)=\eta_{ab}\ \ , \tag{8.63}$$

$\boldsymbol{e}_{\|a}(x+dx)$ が

$$\boldsymbol{e}_{\|a}(x+dx)\cdot\boldsymbol{e}_{\|b}(x+dx)=\eta_{ab} \tag{8.64}$$

を満たすことから, $\boldsymbol{e}_a(x+dx)$ と $\boldsymbol{e}_{\|a}(x+dx)$ は無限小 local Lorentz 変換で結ばれることがわかる：

$$\boldsymbol{e}_{\|a}(x+dx)={M_a}^b\boldsymbol{e}_b(x+dx). \tag{8.65}$$

ただし,

$${M_a}^b=\delta^a_b+{\epsilon_a}^b(x) \tag{8.66}$$

である. ${\epsilon_a}^b(x)$ は dx のオーダーの微小量である．したがって,

$${\epsilon_a}^b(x)=dx^\mu{\omega_a}^b{}_\mu(x) \tag{8.67}$$

とする. ${\omega_a}^b{}_\mu(x)$ をスピン接続という. (8.26) より

$${\omega_a}^b{}_\mu(x)=-{\omega^b}_{a\mu}(x) \tag{8.68}$$

であることがわかる. (8.65), (8.66), (8.67) を (8.58) に用いると

$$\boldsymbol{V}_\|(x+dx)=(V^a(x)-{\omega^a}_{b\mu}(x)V^b(x)dx^\mu)\boldsymbol{e}_a(x+dx) \tag{8.69}$$

が得られる. ただし, 途中 (8.68) を用いた. これと (8.55) を比較すると

$$V^a_\|(x+dx)=V^a(x)-{\omega^a}_{b\mu}(x)V^b(x)dx^\mu \tag{8.70}$$

であることがわかる. (8.57) に (8.56), (8.69) を用いると

$$D\boldsymbol{V}(x+dx)=(\partial_\mu V^a(x)+{\omega^a}_{b\mu}(x)V^b(x))dx^\mu\boldsymbol{e}_a(x+dx) \tag{8.71}$$

が得られる. ここで

$$D_\mu V^a(x)=\partial_\mu V^a(x)+{\omega^a}_{b\mu}(x)V^b(x) \tag{8.72}$$

とする. この式は local Lorentz 変換のもとで共変的に変換することが (8.71) からわかる. (8.72) を local Lorentz ベクトルに対する共変微分という.

共変ベクトル V_a に対する共変微分は

$$D_\mu V_a=\partial_\mu V_a-{\omega^b}_{a\mu}V_b \tag{8.73}$$

である.

Minkowski 空間の計量テンソル η^{ab} は共変微分に対して定数である：

$$D_\mu\eta_{ab}=0\ \ . \tag{8.74}$$

曲率テンソル（local Lorentz ベクトル）

交換子積 $[D_\mu, D_\nu]$ を local Lorentz ベクトル V^a, V_a に作用すると

$$[D_\mu, D_\nu]V^a = R^a{}_{b\mu\nu}V^b \ , \tag{8.75}$$

$$[D_\mu, D_\nu]V_a = -R^b{}_{a\mu\nu}V_b \tag{8.76}$$

が得られる. ここで

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{c\mu}\omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu}\omega^c{}_{b\mu} \tag{8.77}$$

である. $R^a{}_{b\mu\nu}$ を曲率テンソルという.

全共変微分

vielbein に対して

$$D_\mu e^a{}_\lambda = \partial_\mu e^a{}_\lambda + \omega^a{}_{b\mu}e^b{}_\lambda - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}e^a{}_\sigma = 0 \ , \tag{8.78}$$

$$D_\mu e_a{}^\lambda = \partial_\mu e_a{}^\lambda - \omega^b{}_{a\mu}e_b{}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}e_a{}^\sigma = 0 \tag{8.79}$$

を要請する. これらを全共変微分（full covariant derivative）という. (8.78) あるいは (8.79) から $\omega_{ab\mu}$ を vielbein で表した式

$$\omega_{ab\mu} = \frac{1}{2}(e_b{}^\lambda C_{\lambda\mu a} - e_a{}^\lambda C_{\lambda\mu b} + e_b{}^\lambda e_a{}^\rho e^c{}_\mu C_{\lambda\rho c}) \tag{8.80}$$

が得られる．ただし，$C_{\lambda\mu a} = \partial_\lambda e_{a\mu} - \partial_\mu e_{a\lambda}$ とした．

$R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$ と $R^a{}_{b\mu\nu}$ の関係

V^a を vielbein を用いて

$$V^a = e^a{}_\lambda V^\lambda \tag{8.81}$$

と表す. これを (8.75) の左辺に代入し, (8.78) を用いると

$$[D_\mu, D_\nu]V^a = e^a{}_\lambda e_b{}^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}V^b \tag{8.82}$$

が得られる. これと (8.75) の右辺より

$$R^a{}_{b\mu\nu} = e^a{}_\lambda e_b{}^\sigma R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \tag{8.83}$$

であることがわかる.

8.3　Lie 微分

Lie 微分（スカラー, world ベクトル）

world 座標 x^μ の無限小一般座標変換を $|\xi|$ が十分小さいとして

$$x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x) \tag{8.84}$$

で定義する.

スカラー場 $\phi(x)$ の一般座標変換のもとでの変換則は

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{8.85}$$

である．$\phi(x)$ の Lie 微分を

$$\delta_{\mathrm{gc}}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \tag{8.86}$$

で定義する．(8.84)，(8.85) を (8.86) に用いると

$$\delta_{\mathrm{gc}}\phi = \xi^\lambda \partial_\lambda \phi \tag{8.87}$$

が得られる.

world ベクトル $V^\mu(x)$ の一般座標変換のもとでの変換則は

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda(x) \tag{8.88}$$

である．$V^\mu(x)$ の Lie 微分を

$$\delta_{\mathrm{gc}} V^\mu(x) = V'^\mu(x) - V^\mu(x) \tag{8.89}$$

で定義する．(8.84)，(8.88) を (8.89) に用いると

$$\delta_{\mathrm{gc}} V^\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda V^\mu - \partial_\lambda \xi^\mu \cdot V^\lambda \tag{8.90}$$

が得られる．これを共変微分を用いて書き直すと

$$\delta_{\mathrm{gc}} V^\mu = \xi^\lambda D_\lambda V^\mu - D_\lambda \xi^\mu \cdot V^\lambda \tag{8.91}$$

と書けることがわかる.

同様にして world ベクトル V_μ に対する Lie 微分は

$$\delta_{\mathrm{gc}} V_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda V_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \cdot V_\lambda \tag{8.92}$$

となることがわかる. これを共変微分を用いて書き直すと

$$\delta_{\mathrm{gc}} V_\mu = \xi^\lambda D_\lambda V_\mu + D_\mu \xi^\lambda \cdot V_\lambda \tag{8.93}$$

と書けることがわかる.

無限小 local Lorentz 変換（vielbein）

vielbein $e^a{}_\mu$，$e_a{}^\mu$ は添え字 a に関しては local Lorentz ベクトルだから，これらに対する無限小 local Lorentz 変換は

$$\delta_{\rm lL} e^a{}_\mu = \epsilon^a{}_b e^b{}_\mu \ , \tag{8.94}$$

$$\delta_{\rm lL} e_a{}^\mu = -\epsilon^b{}_a e_b{}^\mu \tag{8.95}$$

である．

Lie 微分（vielbein）

vielbein $e^a{}_\mu$，$e_a{}^\mu$ は添え字 μ に関しては world ベクトルだから，これらに対する Lie 微分は

$$\delta_{\rm gc} e^a{}_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda e^a{}_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \cdot e^a{}_\lambda \ , \tag{8.96}$$

$$\delta_{\rm gc} e_a{}^\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda e_a{}^\mu - \partial_\lambda \xi^\mu \cdot e_a{}^\lambda \tag{8.97}$$

である．

無限小 local Lorentz 変換（world ベクトル）

world ベクトル V^μ, V_μ は local Lorentz 系ではスカラーである．したがって，無限小 local Lorentz 変換のもとで不変である：

$$\delta_{\rm lL} V^\mu = 0 \ , \tag{8.98}$$

$$\delta_{\rm lL} V_\mu = 0. \tag{8.99}$$

実際，(8.81) を world ベクトルについて解いた

$$V^\mu = e_a{}^\mu V^a \tag{8.100}$$

を (8.98) の左辺に代入し, $e_a{}^\mu$, V^a の local Lorentz 変換に対する変換則を用いると (8.98) が確認できる．V_μ を vielbein を用いて

$$V_\mu = e^a{}_\mu V_a \tag{8.101}$$

と表す．これを用い, 上と同様にすると (8.99) も確認できる．

Lie 微分（local Lorentz ベクトル）

local Lorentz ベクトル V^a, V_a は world 座標系ではスカラーである．したがって Lie 微分に対して

$$\delta_{\rm gc} V^a = \xi^\lambda \partial_\lambda V^a \ , \tag{8.102}$$

$$\delta_{\rm gc} V_a = \xi^\lambda \partial_\lambda V_a \tag{8.103}$$

である. 実際, (8.81) を (8.102) の左辺に代入し, ${e^a}_\lambda$, V^λ の Lie 微分に対する変換則を用いると (8.102) が確認できる. (8.101) を local Lorentz ベクトルについて解いた

$$V_a = {e_a}^\lambda V_\lambda \tag{8.104}$$

を用い, 上と同様にすると (8.103) も確認できる.

vielbein に対する Lie 微分と local Lorentz 変換

vielbein に対する Lie 微分 (8.96)

$$\delta_{\mathrm{gc}} {e^a}_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda {e^a}_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \cdot {e^a}_\lambda \tag{8.96}$$

に共変微分 (8.78) を用いると

$$\delta_{\mathrm{gc}} {e^a}_\mu = -\xi^\lambda {\omega^a}_{b\lambda} {e^b}_\mu + D_\mu \xi^a \tag{8.105}$$

が得られる. ところが，この式の右辺第 1 項は local Lorentz 変換のもとで共変的に変換しない.

ここで

$$\delta_{\mathrm{cov}} \equiv \delta_{\mathrm{gc}}(\xi) + \delta_{\mathrm{lL}}(\epsilon = \xi\omega) \tag{8.106}$$

を定義する. ただし，$|\xi|$ が十分小さいとして

$${\epsilon^a}_b \equiv \xi^\lambda {\omega^a}_{b\lambda} \tag{8.107}$$

とした. (8.106) を ${e^a}_\mu$ に作用すると

$$\delta_{\mathrm{cov}} {e^a}_\mu = D_\mu \xi^a \tag{8.108}$$

が得られる. ただし, (8.78) を用いた. この式は local Lorentz 変換，一般座標変換のもとで共変的に変換する.

(8.106) を ${e_a}^\mu$ に作用すると，上と同様にして

$$\delta_{\mathrm{cov}} {e_a}^\mu = -D_a \xi^\mu \tag{8.109}$$

が得られる. この式も local Lorentz 変換，一般座標変換のもとで共変的に変換する.

第 9 章

整合的エネルギー運動量テンソルと共変的エネルギー運動量テンソル

この章では，エネルギー運動量テンソルの正則化による定義を与える．正則化されたエネルギー運動量テンソルとしては共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルが考えられる．これらから，共変的重力異常項と整合的重力異常項が得られることを見る．

9.1 整合的な正則化と共変的な正則化

local Lorentz 変換不変性と一般座標変換不変性からの帰結

スピン 1/2 カイラルフェルミオン $\tilde{\psi}_L$ が重力場 ${e_a}^\mu(x)$ と相互作用する系の作用 $S[{e_a}^\mu, \tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L]$ は $2n$ 次元空間において

$$S[{e_a}^\mu, \tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L] = \frac{1}{2}\int dx \tilde{\bar{\psi}}_L i {e_a}^\mu \gamma^a (D_\mu - \overleftarrow{D_\mu})\tilde{\psi}_L \tag{9.1}$$

で与えられる．ただし，Dirac 場を ψ として weight 1/2 のスピノール密度 $\tilde{\psi}_L \equiv \sqrt{e}\psi_L = \sqrt{e}\frac{1-\gamma_5}{2}\psi$ を基本的な場とした[*1]．ここで，$e = \det {e^a}_\mu$ であり，${e^a}_\mu$ は ${e_a}^\mu$ の転置・逆行列である．local Lorentz 系の計量は $\eta_{ab} = -\delta_{ab}$ である．したがって，計量 $g_{\mu\nu} = {e^a}_\mu {e^b}_\nu \eta_{ab}$ の signature は Euclid 的 : $\operatorname{sgn} g_{\mu\nu} = (-,-,\cdots,-)$ としてある．γ^a は反エルミートな Dirac のガンマ行列，$\gamma_5 = i^n \gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}$ である．また，D_μ，$\overleftarrow{D_\mu}$ は weight 1/2 のスピノールに対する共変微分で

[*1] 経路積分において，$\tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L$ を積分測度にとると積分測度の非カイラルな項（パリティを保存する項）が一般座標変換のもとで不変であることが知られている [66].

あり，

$$D_\mu \tilde{\psi}_L = \left(\partial_\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \frac{1}{4}\omega_{ij\mu}\gamma^{ij}\right)\tilde{\psi}_L \ , \tag{9.2}$$

$$\tilde{\overline{\psi}}_L \overleftarrow{D_\mu} = \tilde{\overline{\psi}}_L \left(\overleftarrow{\partial_\mu} - \frac{1}{2}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\omega_{ij\mu}\gamma^{ij}\right) \ , \tag{9.3}$$

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2}[\gamma^i, \gamma^j] \ , \tag{9.4}$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij} \tag{9.5}$$

である．ただし，$\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}$ は Christoffel 記号，$\omega_{ij\mu}$ はスピン接続である．

作用 (9.1) は local Lorentz 変換

$$\delta_{\mathrm{lL}} e_a{}^\mu = -\lambda^b{}_a e_b{}^\mu \ , \qquad (\lambda^{ab} = -\lambda^{ba} \ll 1) \tag{9.6}$$

のもとで不変である：

$$\delta_{\mathrm{lL}} S = 0 \ . \tag{9.7}$$

これは

$$\begin{aligned} 0 &= \int dx \left(\frac{\delta S}{\delta \psi}\delta_{\mathrm{lL}}\psi + \delta_{\mathrm{lL}}\overline{\psi}\cdot\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}} + \frac{\delta S}{\delta e_a{}^\mu(x)}\delta_{\mathrm{lL}} e_a{}^\mu(x)\right) \\ &= \int dx \frac{\delta S}{\delta e_a{}^\mu(x)}\delta_{\mathrm{lL}} e_a{}^\mu(x) \\ &= \int dx e(x) T_{[ab]}(x)\lambda^{ab}(x) \end{aligned} \tag{9.8}$$

と展開できる．ただし，1 行目で運動方程式

$$\frac{\delta S}{\delta\psi} = 0, \tag{9.9}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}} = 0 \tag{9.10}$$

を用い，2 行目で (9.6) を用いた．また，エネルギー運動量テンソルを

$$eT^a{}_\mu \equiv \frac{\delta S}{\delta e_a{}^\mu} \tag{9.11}$$

で定義した．(9.8) から $\lambda^{ab}(x)$ をはずすと

$$eT_{[ab]} = 0 \tag{9.12}$$

が得られる．

作用 (9.1) は一般座標変換のもとでも不変である．一般座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$ ($\xi^\mu \ll 1$) を考えるときは $e_a{}^\mu$ に対して変換

$$\delta_{\mathrm{cov}} e_a{}^\mu = -D_a \xi^\mu \qquad (\xi^\mu \ll 1) \tag{9.13}$$

を考える．ただし，$\delta_{\rm cov} = \delta_{\rm gc}(\xi) + \delta_{\rm lL}(\xi^\lambda \omega^a{}_{b\lambda})$ である．(9.13) を用いると作用 (9.1) の一般座標変換不変性は

$$\delta_{\rm cov} S = 0 \tag{9.14}$$

と書ける．これに運動方程式 (9.9)，(9.10) を用いると

$$D_\mu \left(e T^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{9.15}$$

が得られる．ただし，導出の途中で部分積分をした．D_μ は weight 1 のテンソルに対する共変微分である．

整合的エネルギー運動量テンソルと共変的エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソルの真空期待値 $\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle$ は有効作用 $W[e_b{}^\nu]$ を用いて表される：

$$\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle = \frac{\delta}{\delta e_a{}^\mu(x)} W[e_b{}^\nu]. \tag{9.16}$$

これを (9.12) に用いると

$$\langle e T_{[ab]}\rangle \neq 0 \tag{9.17}$$

となり，local Lorentz 不変性が失われる．これを Lorentz 異常項という．また，(9.16) を (9.15) に用いると

$$D_\mu \langle e T^{\mu\nu}\rangle \neq 0 \tag{9.18}$$

となり，一般座標変換不変性が失われる．これを Einstein 異常項という．Lorentz 異常項と Einstein 異常項は重力異常項と呼ばれる．

(9.16) では，$W[e_b{}^\nu]$ が発散しているので $\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle$ はよく定義されていない．エネルギー運動量テンソル $\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle$ に意味を持たせるために共変的な正則化と整合的な正則化のうち，どちらかの正則化を適用する．整合的に正則化されたエネルギー運動量テンソル $\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cons}$ は正則化された有効作用 $W[e_b{}^\nu]_{\rm reg}$ を用いて以下のように定義できる：

$$\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cons} = \frac{\delta}{\delta e_a{}^\mu(x)} W[e_b{}^\nu]_{\rm reg}. \tag{9.19}$$

共変的エネルギー運動量テンソル $\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}$ はエネルギー運動量テンソルの真空期待値を一般座標変換と local Lorentz 変換のもとで共変的になるように正則化したものである．これらの期待値は $e_a{}^\mu(x)$ の汎関数である．汎関数の性質に注意する必要があるときは $\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}[e_b{}^\nu]$ のような記号を用いる．

重力異常項としては整合的エネルギー運動量テンソル $\langle e T^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cons}$ に対する整合的 Lorentz 異常項

$$L^{\rm cons}_{ab} \equiv \langle e T_{[ab]}\rangle_{\rm cons}, \tag{9.20}$$

整合的 Einstein 異常項

$$E^\nu_{\rm cons} \equiv D_\mu \langle e T^{\mu\nu}\rangle_{\rm cons} \tag{9.21}$$

と共変的エネルギー運動量テンソル $\langle eT^a_{\ \mu}(x)\rangle_{\rm cov}$ に対する共変的 Lorentz 異常項

$$L^{\rm cov}_{ab} \equiv \langle eT_{[ab]}\rangle_{\rm cov}, \tag{9.22}$$

共変的 Einstein 異常項

$$E^{\nu}_{\rm cov} \equiv D_\mu \langle eT^{\mu\nu}\rangle_{\rm cov} \tag{9.23}$$

の 4 つがある．

4 つの重力異常項を以下に表で示す．

	Einstein 異常項	Lorentz 異常項
共変的異常項	$D_\mu\langle eT^{\mu\nu}\rangle_{\rm cov}$	$\langle eT_{[ab]}\rangle_{\rm cov}$
整合的異常項	$D_\mu\langle eT^{\mu\nu}\rangle_{\rm cons}$	$\langle eT_{[ab]}\rangle_{\rm cons}$

第 10 章

Bardeen と Zumino による整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式

この章では，Barden と Zumino [11] による整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式の導出について述べる．はじめに，重力理論を外微分形式で表す．次に，整合的 Einstein 異常項を求める．そして，整合的 Einstein 異常項から決まる整合的エネルギー運動量テンソルに正則化による不定性の自由度を利用して局所的な項を加え，共変的エネルギー運動量テンソルを構成する．得られた共変的エネルギー運動量テンソルの共変微分から整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式が得られる．最後に，整合的 Einstein 異常項と整合的 Lorentz 異常項が同等であることを見る．

10.1 重力理論と外微分形式

外微分形式の導入

内部積（(odd) inner product）を導入する．内部積を i_ξ と書く．0-form ω に対して

$$i_\xi \omega = 0 \tag{10.1}$$

を定義する．さらに

$$i_\xi dx^\mu = \xi^\mu, \tag{10.2}$$
$$\{i_\xi, dx^\mu\} = 0 \tag{10.3}$$

を定義する．また

$$i_\xi^2 = 0 \tag{10.4}$$

である．i_ξ を用いて

$$\mathcal{L}_\xi = di_\xi + i_\xi d \tag{10.5}$$

を定義すると，p-form $\omega^{(p)}$ に対して

$$\mathcal{L}_\xi = \delta^\xi_{\rm gc} \tag{10.6}$$

であることがわかる．すなわち，$\mathcal{L}_\xi$ は微分形式に対する Lie 微分を表す．また，$\mathcal{L}_\xi$ は d と可換である：

$$\mathcal{L}_\xi d = d\mathcal{L}_\xi. \tag{10.7}$$

スカラー密度 $\mathcal{D}$ に対する Lie 微分は

$$\delta^\xi_{\rm gc}\mathcal{D} = \partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{D}) \tag{10.8}$$

である．これより，

$$\delta^\xi_{\rm gc}\int \mathcal{D}dx = \int \partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{D})dx = 0 \tag{10.9}$$

が得られる．時空次元が p のとき，p-form $\omega^{(p)}$ に対する Lie 微分は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi\omega^{(p)} &= (di_\xi + i_\xi d)\omega^{(p)} \\
&= d(i_\xi\omega^{(p)}) \\
&= \partial_\lambda(\xi^\lambda\omega^{(p)})
\end{aligned} \tag{10.10}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi\int\omega^{(p)} &= \int\mathcal{L}_\xi\omega^{(p)} \\
&= \int\partial_\lambda(\xi^\lambda\omega^{(p)}) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{10.11}$$

すなわち，

$$\mathcal{L}_\xi\int\omega^{(p)} = 0 \tag{10.12}$$

が得られる．

Christoffel 記号と Riemann テンソルの Lie 微分

スカラー場 A に対する Lie 微分は

$$\delta^\xi_{\rm gc}A = \xi^\mu\partial_\mu A \tag{10.13}$$

である．ただし，$\xi^\mu \ll 1$ である．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に対する Lie 微分は

$$\begin{aligned}
\delta^\xi_{\rm gc}g_{\mu\nu} &= \xi^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi^\lambda g_{\lambda\mu} + \partial_\nu\xi^\lambda g_{\mu\lambda} \\
&= D_\mu\xi_\nu + D_\nu\xi_\mu
\end{aligned} \tag{10.14}$$

と書ける．ただし，D_μ は world ベクトルに対する共変微分

$$D_\mu\xi_\nu = \partial_\mu\xi_\nu - \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda\xi_\lambda \tag{10.15}$$

である．

Christoffel 記号 $\Gamma_{\lambda_\mu}{}^{\rho}$

$$\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\sigma g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\sigma} - \partial_\mu g_{\lambda\sigma}) \tag{10.16}$$

と Riemann テンソル $R_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho}$

$$R_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho} = \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\sigma}\Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\rho} \tag{10.17}$$

に対する Lie 微分はそれぞれ

$$\delta^\xi_{\mathrm{gc}}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} = \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} + \partial_\lambda \xi^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}{}^{\rho} + \partial_\mu \xi^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\sigma}\partial_\sigma \xi^\rho - \partial_\lambda \partial_\mu \xi^\rho \tag{10.18}$$

と

$$\delta^\xi_{\mathrm{gc}} R_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho} = \xi^\sigma D_\sigma R_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho} + D_\nu \xi^\sigma R_{\sigma\lambda\mu}{}^{\rho} + D_\lambda \xi^\sigma R_{\nu\sigma\mu}{}^{\rho} + D_\mu \xi^\sigma R_{\nu\lambda\sigma}{}^{\rho} - D_\sigma \xi^\rho R_{\nu\lambda\mu}{}^{\sigma} \tag{10.19}$$

で与えられる．

$\Gamma_{\lambda_\mu}{}^{\rho}$ (10.16) を用いて 1-form

$$(\Gamma)_\mu{}^\rho = (\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho}) dx^\lambda \tag{10.20}$$

を定義する．これを用いると Riemann テンソルに対応する 2-form

$$(R)_\mu{}^\rho = (d\Gamma + \Gamma^2)_\mu{}^\rho = \frac{1}{2} R_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho} dx^\nu dx^\lambda \tag{10.21}$$

が得られる．ここで，

$$\Lambda_\mu{}^\rho = -\partial_\mu \xi^\rho \tag{10.22}$$

と置くと，(10.18) は

$$\delta^\xi_{\mathrm{gc}}\Gamma = \mathcal{L}_\xi \Gamma + T_\Lambda \Gamma \tag{10.23}$$

と書ける．ただし，添え字 μ，ρ を省略し，

$$T_\Lambda \Gamma = d\Lambda + [\Gamma, \Lambda] \tag{10.24}$$

とした．同様にして (10.19) は

$$\delta^\xi_{\mathrm{gc}} R = \mathcal{L}_\xi R + T_\Lambda R \tag{10.25}$$

と書ける．ただし，

$$T_\Lambda R = [R, \Lambda] \tag{10.26}$$

とした．

10.2　整合的 Einstein 異常項

整合的 Einstein 異常項 $E^{\xi}_{\rm cons}$ を $g_{\mu\nu}$ の汎関数で表した正則化された有効作用 $W_{\rm reg}[g_{\mu\nu}]$ の Lie 微分 $\delta^{\xi}_{\rm gc}$

$$E^{\xi}_{\rm cons} = \delta^{\xi}_{\rm gc} W_{\rm reg}[g_{\mu\nu}] \tag{10.27}$$

で定義する．整合的エネルギー運動量テンソル密度を

$$T^{\mu\nu}_{\rm cons} = 2\frac{\delta W_{\rm reg}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{10.28}$$

で定義する．これは第 9 章の notation とは異なることに注意する．(10.28) を用いると (10.27) は

$$E^{\xi}_{\rm cons} = -\int dx \xi_\nu D_\mu T^{\mu\nu}_{\rm cons} \tag{10.29}$$

と書ける．ただし，積分は ν 次元時空の積分である．また

$$D_\mu T^{\mu\nu}_{\rm cons} = \partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm cons} - \Gamma_{\mu\rho}{}^{\nu} T^{\mu\rho}_{\rm cons} \tag{10.30}$$

である．

一般座標変換を表す Lie 微分 $\delta^{\xi}_{\rm gc}$ が交換関係

$$[\delta^{\xi_1}_{\rm gc}, \delta^{\xi_2}_{\rm gc}] = \delta^{[\xi_2,\xi_1]}_{\rm gc} \tag{10.31}$$

を満たすことに注意しよう．ただし，

$$([\xi_1,\xi_2])^\mu = \xi_1^\lambda \partial_\lambda \xi_2^\mu - \xi_2^\lambda \partial_\lambda \xi_1^\mu \tag{10.32}$$

である．(10.31) を $W_{\rm reg}[g_{\mu\nu}]$ に作用すると，整合的 Einstein 異常項に対する整合性条件

$$\delta^{\xi_1}_{\rm gc} E^{\xi_2}_{\rm cons} - \delta^{\xi_2}_{\rm gc} E^{\xi_1}_{\rm cons} = E^{[\xi_2,\xi_1]}_{\rm cons} \tag{10.33}$$

が得られる．ゲージ理論においては，整合的ゲージ異常項は (4.66)

$$v \cdot G_{\rm cons}(A,F) = \int \omega^1_{2n-2}(v,A,F) \tag{4.66}$$

の形で表された．この式の両辺に $\theta\,(=\text{odd})$ を掛け，$\Lambda = \theta v$ とすると

$$\Lambda \cdot G_{\rm cons}(A,F) = \int \omega^1_{2n-2}(\Lambda,A,F) \tag{10.34}$$

となる．ここで，ゲージ理論と重力理論を

$$\Lambda \to \Lambda = (\Lambda_\mu{}^\rho), \tag{10.35}$$
$$A \to \Gamma = (\Gamma_\mu{}^\rho), \tag{10.36}$$
$$F \to R = (R_\mu{}^\rho) \tag{10.37}$$

で対応させる．これらを用いて (10.34) を

$$\Lambda \cdot G_{\text{cons}}(\Gamma, R) = \int \text{tr}\Lambda G_{\text{cons}}(\Gamma, R) = \int \omega^1_{2n-2}(\Lambda, \Gamma, R) \tag{10.38}$$

と読み替える．この式で (10.22)

$$\Lambda_\mu{}^\rho = -\partial_\mu \xi^\rho \tag{10.22}$$

であったことを思い出して，整合的 Einstein 異常項 E^ξ_{cons} が

$$E^\xi_{\text{cons}} = -\int \partial_\rho \xi^\mu G_\mu{}^\rho(\Gamma, R) = \int \omega^1_{2n-2}(\Lambda, \Gamma, R) \tag{10.39}$$

で与えられると予想する．この予想が正しいことは (10.39) で表される E^ξ_{cons} が整合性条件 (10.33) の解であることを確認すればよい．以下でこれを確認する．

$$E^\xi_{\text{cons}} = -\int \partial_\rho \xi^\mu G_\mu{}^\rho(\Gamma, R) \tag{10.40}$$

を (10.33) の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} E^{[\xi_2,\xi_1]}_{\text{cons}} &= -\int \partial_\rho [\xi_2, \xi_1]^\mu G_\mu{}^\rho \\ &= \int (\xi_1^\lambda \partial_\lambda \partial_\rho \xi_2^\mu - \xi_2^\lambda \partial_\lambda \partial_\rho \xi_1^\mu) G_\mu{}^\rho + [\Lambda_1, \Lambda_2] \cdot G_{\text{cons}} \end{aligned} \tag{10.41}$$

が得られる．一方，

$$E^\xi_{\text{cons}} = \int \text{tr}\Lambda G_{\text{cons}}(\Gamma, R) \tag{10.42}$$

を用いると (10.33) の左辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \delta^{\xi_1}_{\text{gc}} E^{\xi_2}_{\text{cons}} &= \delta^{\xi_1}_{\text{gc}} \int \text{tr}\Lambda_2 G_{\text{cons}}(\Gamma, R) \\ &= \int \text{tr}\Lambda_2 \left(\frac{\partial G_{\text{cons}}(\Gamma, R)}{\partial \Gamma(x)} \delta^{\xi_1}_{\text{gc}} \Gamma(x) + \frac{\partial G_{\text{cons}}(\Gamma, R)}{\partial R(x)} \delta^{\xi_1}_{\text{gc}} R(x) \right) \\ &= \int \text{tr}\Lambda_2 \left(\frac{\partial G_{\text{cons}}(\Gamma, R)}{\partial \Gamma(x)} (\mathcal{L}_{\xi_1} + T_{\Lambda_1}) \Gamma(x) + \frac{\partial G_{\text{cons}}(\Gamma, R)}{\partial R(x)} (\mathcal{L}_{\xi_1} + T_{\Lambda_1}) R(x) \right) \\ &= \int \text{tr}\Lambda_2 \left(\mathcal{L}_{\xi_1} G_{\text{cons}}(\Gamma, R) + T_{\Lambda_1} G_{\text{cons}}(\Gamma, R) \right) \end{aligned} \tag{10.43}$$

となる．これを用いると

$$\begin{aligned} &\delta^{\xi_1}_{\text{gc}} E^{\xi_2}_{\text{cons}} - \delta^{\xi_2}_{\text{gc}} E^{\xi_1}_{\text{cons}} \\ &= \int (\text{tr}\Lambda_2 \mathcal{L}_{\xi_1} G_{\text{cons}} - \text{tr}\Lambda_1 \mathcal{L}_{\xi_2} G_{\text{cons}}) + \int (\text{tr}\Lambda_2 T_{\Lambda_1} G_{\text{cons}} - \text{tr}\Lambda_1 T_{\Lambda_2} G_{\text{cons}}) \end{aligned} \tag{10.44}$$

が得られる．ここで，

$$\mathcal{L}_\xi G_{\text{cons}} = \partial_\lambda (\xi^\lambda G_{\text{cons}}) \tag{10.45}$$

だから

$$\int (\mathrm{tr}\Lambda_2\mathcal{L}_{\xi_1}G_{\mathrm{cons}} - \mathrm{tr}\Lambda_1\mathcal{L}_{\xi_2}G_{\mathrm{cons}}) = \int (\xi_1^\lambda\partial_\lambda\partial_\rho\xi_2^\mu - \xi_2^\lambda\partial_\lambda\partial_\rho\xi_1^\mu)G_\mu^\rho \tag{10.46}$$

が得られる．ゲージ理論の整合性条件は

$$T_{\Lambda_1}(\Lambda_2\cdot G_{\mathrm{cons}}) - T_{\Lambda_2}(\Lambda_1\cdot G_{\mathrm{cons}}) = [\Lambda_1,\Lambda_2]\cdot G_{\mathrm{cons}} \tag{4.28}$$

であった．この式で置き換え (10.35)∼(10.37) を行うと

$$\int \mathrm{tr}\Lambda_2 T_{\Lambda_1}G_{\mathrm{cons}}(\Gamma,R) - \int \mathrm{tr}\Lambda_1 T_{\Lambda_2}G_{\mathrm{cons}}(\Gamma,R) = [\Lambda_1,\Lambda_2]\cdot G_{\mathrm{cons}}[\Gamma,R] \tag{10.47}$$

が得られる．(10.46) と (10.47) を (10.44) に用いると

$$\delta_{\mathrm{gc}}^{\xi_1}E_{\mathrm{cons}}^{\xi_2} - \delta_{\mathrm{gc}}^{\xi_2}E_{\mathrm{cons}}^{\xi_1} = \int (\xi_1^\lambda\partial_\lambda\partial_\rho\xi_2^\mu - \xi_2^\lambda\partial_\lambda\partial_\rho\xi_1^\mu)G_\mu{}^\rho + [\Lambda_1,\Lambda_2]\cdot G_{\mathrm{cons}} = E_{\mathrm{cons}}^{[\xi_2,\xi_1]} \tag{10.48}$$

が得られる．2 番目の等号では (10.41) を用いた．以上より，(10.39) で与えられる E_{cons}^{ξ} が Einstein 異常項に対する整合性条件の解，すなわち，整合的 Einstein 異常項であることがわかった．(10.38) より

$$v\cdot G_{\mathrm{cons}}[\Gamma,R] = \int \omega_{2n-2}^1(v,\Gamma,R) \tag{10.49}$$

であることがわかる．この式の右辺は

$$\begin{aligned}\int \omega_{2n-2}^1(v,\Gamma,R) &= \int \delta\omega_{2n-1}(\Gamma,R)\\ &= \int v\frac{\partial\omega_{2n-1}(\Gamma,R)}{\partial\Gamma}\\ &= v\cdot\frac{\partial\omega_{2n-1}(\Gamma,R)}{\partial\Gamma}\end{aligned} \tag{10.50}$$

である．ただし，1 行目右辺の変分 δ は Γ に関する変分である．(10.49)，(10.50) より

$$G_{\mathrm{cons}}[\Gamma,R] = \frac{\partial\omega_{2n-1}(\Gamma,R)}{\partial\Gamma} \tag{10.51}$$

であることがわかる．

第 4 章で考えた symmetric inavariant polynomial $P(F,F,\cdots,F)$ で置き換え

$$F\to R \tag{10.52}$$

をする:

$$P(F,F,\cdots,F)\to P(R,R,\cdots,R). \tag{10.53}$$

ここで，(10.21) より

$$R^{\mathrm{T}} = -R \tag{10.54}$$

である．P の性質 2〜4 を用いると

$$P(R,R,\cdots,R)=(-1)^nP(R,R,\cdots,R) \tag{10.55}$$

であることが示せる．n が偶数でないと $P(R,R,\cdots,R)$ は値を持たない．したがって，$\omega^1_{2n-2}(\Lambda,\Gamma,R)$ が 0 でないためには，時空の次元が $4m-2$ 次元でなけらばならない．すなわち，Einstein 異常項は $4m-2$ 次元で現れる．

10.3 整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式

一般座標変換のもとでの整合的エネルギー運動量テンソルの変換則

先ず，

$$\delta^\xi_{\rm gc}=\int dx\delta^\xi_{\rm gc}g_{\mu\nu}(x)\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \tag{10.56}$$

$$\delta_\varphi=\int dx\varphi_{\mu\nu}(x)\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \tag{10.57}$$

$$\varphi_{\mu\nu}(x)=\delta_\varphi g_{\mu\nu}(x), \tag{10.58}$$

$$\delta^\xi_{\rm gc}\varphi_{\mu\nu}(x)=0 \tag{10.59}$$

を定義する．これらを用いると

$$(\delta^\xi_{\rm gc}\delta_\varphi-\delta_\varphi\delta^\xi_{\rm gc})W_{\rm reg}=-\frac{1}{2}\int dxT^{\mu\nu}_{\rm cons}\tilde{\delta}^\xi_{\rm gc}\varphi_{\mu\nu} \tag{10.60}$$

が得られる．ただし，

$$\tilde{\delta}^\xi_{\rm gc}\varphi_{\mu\nu}=\xi^\lambda\partial_\lambda\varphi_{\mu\nu}+\partial_\mu\xi^\lambda\varphi_{\lambda\nu}+\partial_\nu\xi^\lambda\varphi_\mu\lambda \tag{10.61}$$

とした．$g_{\mu\nu}$ に対しては

$$\tilde{\delta}^\xi_{\rm gc}g_{\mu\nu}=\delta_{\rm gc}g_{\mu\nu} \tag{10.62}$$

とする．一方，

$$(\delta^\xi_{\rm gc}\delta_\varphi-\delta_\varphi\delta^\xi_{\rm gc})W_{\rm reg}=\frac{1}{2}\int dx\varphi_{\mu\nu}\delta^\xi_{\rm gc}T^{\mu\nu}_{\rm cons}-\delta_\varphi E^\xi_{\rm cons} \tag{10.63}$$

である．(10.60) と (10.63) より

$$\int dx(\varphi_{\mu\nu}\delta^\xi_{\rm gc}T^{\mu\nu}_{\rm cons}+T^{\mu\nu}_{\rm cons}\tilde{\delta}^\xi_{\rm gc}\varphi_{\mu\nu})=2\delta_\varphi E^\xi_{\rm cons} \tag{10.64}$$

が得られる．(10.62) を考慮して左辺を

$$\int dx\tilde{\delta}^\xi_{\rm gc}(T^{\mu\nu}_{\rm cons}\varphi_{\mu\nu})=\tilde{\delta}^\xi_{\rm gc}\int dxT^{\mu\nu}_{\rm cons}\varphi_{\mu\nu} \tag{10.65}$$

と変形すると

$$\tilde{\delta}^\xi_{\rm gc}\int dxT^{\mu\nu}_{\rm cons}\varphi_{\mu\nu}=2\delta_\varphi E^\xi_{\rm cons} \tag{10.66}$$

が得られる．以下では $\tilde{\delta}^{\xi}_{\mathrm{gc}}$ も $\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}$ で表すことにする（これによる混乱はないだろう）．(10.66) より，$E^{\xi}_{\mathrm{cons}}=0$ のとき $T^{\mu\nu}_{\mathrm{cons}}$ はテンソル密度の変換則に従い，$E^{\xi}_{\mathrm{cons}}\neq 0$ のとき $T^{\mu\nu}_{\mathrm{cons}}$ はテンソル密度の変換則に従わないことがわかる．

整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式

整合的エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}_{\mathrm{cons}}$ に局所的な項を付け加えることができる不定性の自由度を利用して共変的エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}_{\mathrm{cov}}$ を構成する：

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{cov}}(x)=T^{\mu\nu}_{\mathrm{cons}}(x)+Y^{\mu\nu}(x). \tag{10.67}$$

共変的 Einstein 異常項 E^{ξ}_{cov} は共変的エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}_{\mathrm{cov}}$ の共変発散で与えられる：

$$E^{\xi}_{\mathrm{cov}}=-\int dx\xi_{\nu}D_{\mu}T^{\mu\nu}_{\mathrm{cov}}. \tag{10.68}$$

これに (10.67) を用いると，整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式

$$E^{\xi}_{\mathrm{cov}}=E^{\xi}_{\mathrm{cons}}-\int dx\xi_{\nu}D_{\mu}Y^{\mu\nu} \tag{10.69}$$

が得られる．以下では実際に $Y^{\mu\nu}$ をうまく選ぶことで共変的 Einstein 異常項が構成できることを示す．

整合的エネルギー運動量テンソルと共変的エネルギー運動量テンソルの差

共変的エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}_{\mathrm{cov}}$ は一般座標変換のもとで共変的に変換するから

$$\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\int dx T^{\mu\nu}_{\mathrm{cov}}\varphi_{\mu\nu}=0 \tag{10.70}$$

を満たす．この式に (10.66) と (10.67) を用いると

$$\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\int dx\varphi_{\mu\nu}Y^{\mu\nu}=-2\delta_{\varphi}(\Lambda\cdot G_{\mathrm{cons}}[\Gamma,R]) \tag{10.71}$$

が得られる．ただし，(10.42)

$$E^{\xi}_{\mathrm{cons}}=\Lambda\cdot G_{\mathrm{cons}}[\Gamma,R] \tag{10.42}$$

を用いた．式 (10.71) が整合的 Einstein 異常項により $Y^{\mu\nu}$ を定める式である．

(10.71) の右辺を変形することを考える．

$${\Gamma_{\lambda\mu}}^{\rho}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\sigma}g_{\lambda\mu}-\partial_{\lambda}g_{\mu\sigma}-\partial_{\mu}g_{\lambda\sigma}) \tag{10.72}$$

の変分をとると

$${B_{\lambda\mu}}^{\rho}=\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(D_{\sigma}\varphi_{\lambda\mu}-D_{\lambda}\varphi_{\mu\sigma}-D_{\mu}\varphi_{\lambda\sigma}) \tag{10.73}$$

が得られる．ただし，

$$B_{\lambda\mu}{}^{\rho} = \delta_\varphi \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} \tag{10.74}$$

とした．一方，ゲージ理論において (4.84)

$$T_\Lambda(B \cdot X) = -\delta(\Lambda \cdot G_{\text{cons}}[A, F]) \tag{4.84}$$

であった．ここで，

$$B = \delta A, \tag{10.75}$$

$$\delta = \int B \frac{\delta}{\delta A} \tag{10.76}$$

である．(4.84) で置き換え

$$A \to \Gamma, \tag{10.77}$$

$$F \to R, \tag{10.78}$$

$$\delta \to \delta_\varphi, \tag{10.79}$$

$$B \to B = (B_{\lambda\mu}{}^{\rho})dx^\lambda, \tag{10.80}$$

$$\Lambda \to \Lambda = (-\partial_\mu \xi^\rho) \tag{10.81}$$

を行うと

$$T_\Lambda(B \cdot X) = -\delta_\varphi(\Lambda \cdot G_{\text{cons}}[\Gamma, R]) \tag{10.82}$$

が得られる．これを (10.71) に用いると

$$\delta^\xi_{\text{gc}} \int dx \varphi_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} = 2T_\Lambda(B \cdot X) \tag{10.83}$$

が得られる．X は $(\nu-1)$-form である．

次に，(10.83) から δ^ξ_{gc} と T_Λ を外した式を得ることを考える．

$$\delta^\xi_{\text{gc}}(B \cdot X) = \delta^\xi_{\text{gc}}(\delta_\varphi \Gamma \cdot X) \tag{10.84}$$

の右辺を展開すると

$$\delta^\xi_{\text{gc}}(\delta_\varphi \Gamma \cdot X) = \delta_\varphi \delta^\xi_{\text{gc}} \Gamma \cdot X + \delta_\varphi \Gamma \cdot \delta^\xi_{\text{gc}} X \tag{10.85}$$

となる．ただし，

$$\delta^\xi_{\text{gc}} \delta_\varphi \Gamma = \delta_\varphi \delta^\xi_{\text{gc}} \Gamma \tag{10.86}$$

であることを用いた．ここで，

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \delta^\xi_{\text{gc}} \Gamma &= \delta_\varphi(\mathcal{L}_\xi \Gamma + T_\Lambda \Gamma) \\ &= \mathcal{L}_\xi B + T_\Lambda B \end{aligned} \tag{10.87}$$

と展開できる．ただし，1 行目で

$$\delta_\varphi \mathcal{L}_\xi \Gamma = \mathcal{L}_\xi \delta_\varphi \Gamma, \tag{10.88}$$

$$\delta_\varphi T_\Lambda \Gamma = T_\Lambda \delta_\varphi \Gamma \tag{10.89}$$

と (10.74) を用いた．また，X は Γ と R の多項式だから，

$$\begin{aligned}\delta^\xi_{\rm gc}X &= \frac{\partial X}{\partial \Gamma}\delta^\xi_{\rm gc}\Gamma + \frac{\partial X}{\partial R}\delta^\xi_{\rm gc}R \\ &= \mathcal{L}_\xi X + T_\Lambda X \end{aligned} \tag{10.90}$$

が得られる．これと (10.87) を (10.85) に用いると

$$\begin{aligned}\delta^\xi_{\rm gc}(B\cdot X) &= (\mathcal{L}_\xi B + T_\Lambda B)\cdot X + B\cdot(\mathcal{L}_\xi X + T_\Lambda X) \\ &= \mathcal{L}_\xi(B\cdot X) + T_\Lambda(B\cdot X) \\ &= T_\Lambda(B\cdot X)\end{aligned} \tag{10.91}$$

が得られる．ただし，2 行目で

$$\mathcal{L}_\xi(B\cdot X) = 0 \tag{10.92}$$

を用いた．(10.91) を (10.83) に用いると

$$\delta^\xi_{\rm gc}\int dx\varphi_{\mu\nu}Y^{\mu\nu} = 2\delta^\xi_{\rm gc}(B\cdot X) \tag{10.93}$$

が得られる．両辺から $\delta^\xi_{\rm gc}$ を外すと

$$\int dx\varphi_{\mu\nu}Y^{\mu\nu} = 2(B\cdot X) \tag{10.94}$$

が得られる．これで (10.83) から $\delta^\xi_{\rm gc}$ と T_Λ を外した式が得られた．この式の右辺は

$$\begin{aligned}2(B\cdot X) &= 2\int B_\mu{}^\rho X_\rho{}^\mu \\ &= 2\int B_{\lambda\mu}{}^\rho dx^\lambda \frac{1}{(\nu-1)!}(X_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}})_\rho{}^\mu dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_{\nu-1}} \\ &= 2\int d^\nu x B_{\lambda\mu}{}^\rho \frac{1}{(\nu-1)!}\varepsilon^{\lambda\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}}(X_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}})_\rho{}^\mu\end{aligned} \tag{10.95}$$

である．

$$*X^\lambda{}_\rho{}^\mu = \frac{1}{(\nu-1)!}\varepsilon^{\lambda\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}}(X_{\mu_1\cdots\mu_{\nu-1}})_\rho{}^\mu \tag{10.96}$$

と置き，$B_{\lambda\mu}{}^\rho$ (10.73) を用い，部分積分をすると

$$\begin{aligned}2(B\cdot X) &= 2\int dx\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(D_\sigma\varphi_{\lambda\mu} - D_\lambda\varphi_{\mu\sigma} - D_\mu\varphi_{\lambda\sigma}) * X^\lambda{}_\rho{}^\mu \\ &= -\int dx\varphi_{\mu\nu}(D_\sigma * X^{\nu\sigma\mu} - D_\lambda * X^{\lambda\nu\mu} - D_\lambda * X^{\mu\nu\lambda})\end{aligned} \tag{10.97}$$

が得られる．これを (10.94) に用い，$\varphi_{\mu\nu}$ を外すと

$$Y^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(D_\sigma * X^{\mu\sigma\nu} + D_\sigma * X^{\nu\sigma\mu} - D_\lambda * X^{\lambda\mu\nu} - D_\lambda * X^{\lambda\nu\mu} - D_\lambda * X^{\mu\nu\lambda} - D_\lambda * X^{\nu\mu\lambda}) \tag{10.98}$$

が得られる．したがって，(10.98) の $*X$ がわかれば整合的 Einstein 異常項と共変的 Einstein 異常項との関係式の最終的な表式が求まるが，ここではそれはしない．

共変的 Einstein 異常項の構成

(10.94) で

$$\varphi_{\mu\nu} = \delta^{\xi}_{\mathrm{gc}} g_{\mu\nu} = D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu \tag{10.99}$$

とすることを考える．

$$B|_{\varphi_{\mu\nu}=D_\mu\xi_\nu+D_\nu\xi_\mu} = \delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\Gamma \tag{10.100}$$

である．これと (10.99) を (10.94) に用いると

$$\begin{aligned} \int (D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu) Y^{\mu\nu} &= 2B \cdot X|_{B=\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\Gamma} \\ &= 2\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\Gamma \cdot X \end{aligned} \tag{10.101}$$

が得られる．(10.69) の右辺第 2 項は

$$-\int dx \xi_\nu D_\mu Y^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int dx (D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu) Y^{\mu\nu} \tag{10.102}$$

と変形できるから，(10.101) を用いると

$$-\int dx \xi_\nu D_\mu Y^{\mu\nu} = \delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\Gamma \cdot X \tag{10.103}$$

が得られる．この式に

$$\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\Gamma = \mathcal{L}_\xi \Gamma + D\Lambda \tag{10.104}$$

を用い，部分積分をすると

$$-\int dx \xi_\nu D_\mu Y^{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi \Gamma \cdot X - \Lambda \cdot DX \tag{10.105}$$

が得られる．これと (10.42)

$$E^{\xi}_{\mathrm{cons}} = \Lambda \cdot G_{\mathrm{cons}}[\Gamma, R] \tag{10.42}$$

を (10.69) に用いると

$$E^{\xi}_{\mathrm{cov}} = \Lambda \cdot G_{\mathrm{cons}} + \mathcal{L}_\xi \Gamma \cdot X - \Lambda \cdot DX \tag{10.106}$$

が得られる．

第 4 章でゲージ理論では，共変的ゲージ異常項は

$$\Lambda \cdot DJ_{\mathrm{cov}} = -nP(\Lambda, F, \cdots, F) \tag{10.107}$$

で表されることを見た．この式に

$$J_{\mathrm{cov}} = J_{\mathrm{cons}} + X \tag{10.108}$$

と

$$G_{\mathrm{cons}} = -DJ_{\mathrm{cons}} \tag{10.109}$$

を用いると

$$\Lambda\cdot G_{\text{cons}}-\Lambda\cdot DX=nP(\Lambda,F,\cdots,F) \tag{10.110}$$

が得られる．この式は重力理論では

$$\Lambda\cdot G_{\text{cons}}-\Lambda\cdot DX=nP(\Lambda,R,\cdots,R) \tag{10.111}$$

に置き換えられる．これを (10.106) に用いると

$$E^{\xi}_{\text{cov}}=nP(\Lambda,R,\cdots,R)+\mathcal{L}_{\xi}\Gamma\cdot X \tag{10.112}$$

が得られる．この式の右辺は明白に共変的な形をしていない．ここで，後に示す

$$\mathcal{L}_{\xi}\Gamma\cdot X=n\int P(i_{\xi}\Gamma,R,\cdots,R) \tag{10.113}$$

を用いる．ここで，

$$\begin{aligned} M_{\mu}{}^{\nu}&=\Lambda_{\mu}{}^{\nu}+(i_{\xi}\Gamma)_{\mu}{}^{\nu}\\ &=-\partial_{\mu}\xi^{\nu}+\xi^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu}\\ &=-D_{\mu}\xi^{\nu} \end{aligned} \tag{10.114}$$

を導入する．これと (10.113) を (10.112) に用いると，明白に共変的な形で

$$E^{\xi}_{\text{cov}}=nP(M,R,\cdots,R) \tag{10.115}$$

と得られる．

(10.113) の確認

最後に (10.113) が成り立つことを確認する．$\nu=2n-2$ 次元では，$(2n-1)$-form は消えるから

$$\text{tr}\Gamma^2X=0 \tag{10.116}$$

である．これを用いると

$$\begin{aligned} 0&=\int i_{\xi}\text{tr}\Gamma^2X\\ &=i_{\xi}\Gamma\cdot(\Gamma X+X\Gamma)+\Gamma^2\cdot i_{\xi}X \end{aligned} \tag{10.117}$$

が得られる．同様に

$$\text{tr}(d\Gamma)X=0 \tag{10.118}$$

より

$$\begin{aligned} 0&=\int i_{\xi}\text{tr}(d\Gamma)X\\ &=i_{\xi}d\Gamma\cdot X+d\Gamma\cdot i_{\xi}X \end{aligned} \tag{10.119}$$

が得られる．また，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi \Gamma \cdot X &= (d i_\xi + i_\xi d)\Gamma \cdot X \\
&= -i_\xi \Gamma \cdot dX + i_\xi d\Gamma \cdot X
\end{aligned}
\tag{10.120}
$$

である．ただし，1 行目で部分積分をした．この式に (10.119) を用いると

$$
\mathcal{L}_\xi \Gamma \cdot X = -i_\xi \Gamma \cdot dX - d\Gamma \cdot i_\xi X \tag{10.121}
$$

が得られる．この式から，(10.117) を辺々引くと

$$
\mathcal{L}_\xi \Gamma \cdot X = -i_\xi \Gamma \cdot DX - R \cdot i_\xi X \tag{10.122}
$$

が得られる．$\nu = 2n-2$ 次元では，$(2n-1)$-form は消えるから

$$
\omega_{2n-1}(\Gamma, R) = 0 \tag{10.123}
$$

である．これより

$$
\begin{aligned}
0 &= \int i_\xi \omega_{2n-1}(\Gamma, R) \\
&= \int (i_\xi \Gamma) \frac{\partial \omega_{2n-1}}{\partial \Gamma} + \int (i_\xi R) \frac{\partial \omega_{2n-1}}{\partial R}
\end{aligned}
\tag{10.124}
$$

が得られる．(10.51) より

$$
G_{\mathrm{cons}}[\Gamma, R] = \frac{\partial \omega_{2n-1}(\Gamma, R)}{\partial \Gamma} \tag{10.51}
$$

である．また，ゲージ理論において

$$
B \cdot X = -\int l\omega_{2n-1}(A, F) \tag{4.98}
$$

である．このとき

$$
lA = 0, \tag{10.125}
$$

$$
lF = B \tag{10.126}
$$

である．これらを用いると (4.98) の左辺は

$$
B \cdot X = lF \cdot X \tag{10.127}
$$

となり，右辺は

$$
\begin{aligned}
-\int l\omega_{2n-1}(A, F) &= -\int \left((lA) \frac{\partial \omega_{2n-1}(A, F)}{\partial A} + (lF) \frac{\partial \omega_{2n-1}(A, F)}{\partial F} \right) \\
&= -\int (lF) \frac{\partial \omega_{2n-1}(A, F)}{\partial F} \\
&= -lF \cdot \frac{\partial \omega_{2n-1}(A, F)}{\partial F}
\end{aligned}
\tag{10.128}
$$

となる．ただし，1 行目で (10.125) を用いた．これらより

$$X = -\frac{\partial \omega_{2n-1}(A, F)}{\partial F} \tag{10.129}$$

であることがわかる．これは重力理論では

$$X = -\frac{\partial \omega_{2n-1}(\Gamma, R)}{\partial R} \tag{10.130}$$

に置き換えられる．これと (10.51) を (10.124) に用いると

$$0 = i_\xi \Gamma \cdot G_{\mathrm{cons}} - i_\xi R \cdot X \tag{10.131}$$

が得られる．$\nu = 2n - 2$ 次元では，$(2n-1)$-form は消えるから

$$R \cdot X = 0 \tag{10.132}$$

である．これを用いると

$$i_\xi (R \cdot X) = 0 \tag{10.133}$$

が得られる．これと (10.131) を用いると

$$-R \cdot i_\xi X = i_\xi \Gamma \cdot G_{\mathrm{cons}} \tag{10.134}$$

が得られる．これを (10.122) に用いると

$$\mathcal{L}_\xi \cdot X = i_\xi \Gamma \cdot (G_{\mathrm{cons}} - DX) \tag{10.135}$$

が得られる．(10.111)

$$\Lambda \cdot G_{\mathrm{cons}} - \Lambda \cdot DX = nP(\Lambda, R, \cdots, R) \tag{10.111}$$

で

$$\Lambda = i_\xi \Gamma \tag{10.136}$$

としたものを (10.135) に用いると，結局 (10.113)

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma \cdot X = n \int P(i_\xi \Gamma, R, \cdots, R) \tag{10.113}$$

が得られる．

10.4 Einstein 異常項と Lorentz 異常項の同等性

整合的 Lorentz 異常項

vielbein の local Lorentz 変換のもとでの変換則は

$$\delta^\theta_{\mathrm{lL}} e_{\mu a} = -e_{\mu b} \theta^b{}_a \tag{10.137}$$

であり，一般座標変換のもとでの変換則は

$$\delta^{\xi}_{\rm gc} e_{\mu a} = \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} e_{\mu a} + \partial_{\mu}\xi^{\lambda} e_{\lambda a} \tag{10.138}$$

である．ただし，$\theta_{ab} = -\theta_{ba}$ である．

整合的 Lorentz 異常項 $L^{\theta}_{\rm cons}$ を $e_{\mu a}$ の汎関数で表した正則化された有効作用 $W_{\rm reg}[e_{\mu a}]$ の local Lorentz 変換

$$L^{\theta}_{\rm cons} = \delta^{\theta}_{\rm lL} W_{\rm reg}[e_{\mu a}] \tag{10.139}$$

で定義する．

local Lorentz 変換 $\delta^{\theta}_{\rm lL}$ は交換関係

$$\left[\delta^{\theta_1}_{\rm lL}, \delta^{\theta_2}_{\rm lL}\right] = \delta^{[\theta_1,\theta_2]}_{\rm lL} \tag{10.140}$$

を満たす．一般座標変換 $\delta^{\xi}_{\rm gc}$ とは交換関係

$$\left[\delta^{\theta}_{\rm lL}, \delta^{\xi}_{\rm gc}\right] = \delta^{\xi\cdot\partial\theta}_{\rm lL} \tag{10.141}$$

を満たす．(10.140) と (10.141) を $W_{\rm reg}[e_{\mu a}]$ に作用すると以下の整合性条件を得る：

$$\delta^{\theta_1}_{\rm lL} L^{\theta_2}_{\rm cons} - \delta^{\theta_2}_{\rm lL} L^{\theta_1}_{\rm cons} = L^{[\theta_1,\theta_2]}_{\rm cons}, \tag{10.142}$$

$$\delta^{\theta}_{\rm lL} E^{\xi}_{\rm cons} - \delta^{\xi}_{\rm gc} L^{\theta}_{\rm cons} = L^{\xi\cdot\partial\theta}_{\rm cons}. \tag{10.143}$$

整合性条件の解

重力異常項に対する整合性条件は次の 3 つである：

$$\delta^{\xi_1}_{\rm gc} E^{\xi_2}_{\rm cons} - \delta^{\xi_2}_{\rm gc} E^{\xi_1}_{\rm cons} = E^{[\xi_2,\xi_1]}_{\rm cons}, \tag{10.33}$$

$$\delta^{\theta_1}_{\rm lL} L^{\theta_2}_{\rm cons} - \delta^{\theta_2}_{\rm lL} L^{\theta_1}_{\rm cons} = L^{[\theta_1,\theta_2]}_{\rm cons}, \tag{10.142}$$

$$\delta^{\theta}_{\rm lL} E^{\xi}_{\rm cons} - \delta^{\xi}_{\rm gc} L^{\theta}_{\rm cons} = L^{\xi\cdot\partial\theta}_{\rm cons}. \tag{10.143}$$

ここで，

$$L^{\theta}_{\rm cons} = 0, \tag{10.144}$$

$$E^{\xi}_{\rm cons} = \Lambda\cdot G_{\rm cons}[\Gamma, R] \tag{10.145}$$

は上の 3 つの整合性条件の解である．このとき，$E^{\xi}_{\rm cons} = \Lambda\cdot G_{\rm cons}[\Gamma, R]$ をピュア（pure）整合的 Einstein 異常項という．これらのことから 10.2 節で導入した整合的 Einstein 異常項はピュア整合的 Einstein 異常項であることが確認できた．したがって，整合的エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}_{\rm cons}(x)$ は

$$T^{\mu\nu}_{\rm cons}(x) = T^{\nu\mu}_{\rm cons}(x) \tag{10.146}$$

を満たす．ここで，(10.67)

$$T^{\mu\nu}_{\rm cov}(x) = T^{\mu\nu}_{\rm cons}(x) + Y^{\mu\nu}(x). \tag{10.67}$$

において $Y^{\mu\nu}(x)=Y^{\nu\mu}(x)$ だから共変的エネルギー運動量テンソルに関して

$$T^{\mu\nu}_{\rm cov}(x)=T^{\nu\mu}_{\rm cov}(x) \tag{10.147}$$

が得られる．したがって，(10.115)

$$E^{\xi}_{\rm cov}=nP(M,R,\cdots,R) \tag{10.115}$$

はピュア共変的 Einstein 異常項であることがわかった．

次に，ピュア Lorentz 異常項の解として，$L^{\theta}_{\rm cons}\neq 0$，$E^{\xi}_{\rm cons}=0$ の解を探そう．下で見るように，その解は次のように表される：

$$L^{\theta}_{\rm cons}=\theta\cdot G_{\rm cons}[\alpha,R], \tag{10.148}$$

$$E^{\xi}_{\rm cons}=0. \tag{10.149}$$

ただし，α はスピン接続 $\alpha_{\mu ab}$ に対応する 1-form

$$\alpha_{ab}=\alpha_{\mu ab}dx^{\mu} \tag{10.150}$$

であり，R は Riemann テンソル $R_{\mu\nu ab}$ に対応する 2-form

$$R_{ab}=\frac{1}{2}R_{\mu\nu ab}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{10.151}$$

である．スピン接続は前章までは ω で表していたが，この章での ω と混同を避けるためこの章では α で表す．(10.149) は (10.33) の自明な解である．ゲージ理論の場合と同様に (10.148) は (10.142) の解である．また，

$$\begin{aligned}
\delta^{\xi}_{\rm gc}L^{\theta}_{\rm cons}&=\delta^{\xi}_{\rm gc}\left(\theta\cdot G_{\rm cons}[\alpha,R]\right)\\
&=\int {\rm tr}\theta\left(\frac{\partial G_{\rm cons}}{\partial\alpha}\delta^{\xi}_{\rm gc}\alpha+\frac{\partial G_{\rm cons}}{\partial R}\delta^{\xi}_{\rm gc}R\right)\\
&=\int {\rm tr}\theta\left(\frac{\partial G_{\rm cons}}{\partial\alpha}\mathcal{L}_{\xi}\alpha+\frac{\partial G_{\rm cons}}{\partial R}\mathcal{L}_{\xi}R\right)\\
&=\int {\rm tr}\theta\mathcal{L}_{\xi}G_{\rm cons}\\
&=-\int {\rm tr}(\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\theta)G_{\rm cons}\\
&=-L^{\xi\cdot\partial\theta}_{\rm cons}
\end{aligned} \tag{10.152}$$

だから，(10.148)，(10.149) は (10.143) の解である．ただし，2 行目で

$$\delta^{\xi}_{\rm gc}\alpha=\mathcal{L}_{\xi}\alpha \tag{10.153}$$

$$\delta^{\xi}_{\rm gc}R=\mathcal{L}_{\xi}R \tag{10.154}$$

を用い，4 行目で

$$\mathcal{L}_{\xi}G_{\rm cons}=\partial_{\lambda}(\xi^{\lambda}G_{\rm cons}) \tag{10.155}$$

を用い，部分積分をした．このとき，$L^\theta_{\mathrm{cons}} = \theta \cdot G_{\mathrm{cons}}[\alpha, R]$ をピュア整合的 Lorentz 異常項という．(10.151) より

$$R^{\mathrm{T}} = -R \tag{10.156}$$

だから，Einstein 異常項と同様に Lorentz 異常項も $(4m-2)$ 次元で現れることがわかる．

Einstein 異常項と Lorentz 異常項を結ぶ counterterm

vielbein $e_{\mu a}$ を

$$E = (e_{\mu a}) \tag{10.157}$$

と行列表示する．E に δ^ξ_{gc} を作用すると

$$\delta^\xi_{\mathrm{gc}} E = \xi^\lambda \partial_\lambda E - \Lambda E \tag{10.158}$$

が得られる．E に $\mathcal{L}_\xi$ を作用すると

$$\mathcal{L}_\xi E = \xi^\lambda \partial_\lambda E \tag{10.159}$$

が得られる．

$$T_\Lambda E = -\Lambda E \tag{10.160}$$

と書き，(10.159) を用いると (10.158) は

$$\delta^\xi_{\mathrm{gc}} E = \mathcal{L}_\xi E - T_\Lambda E \tag{10.161}$$

と書ける．E に $\delta^\theta_{\mathrm{lL}}$ を作用すると

$$\delta^\theta_{\mathrm{lL}} E = -E\theta \tag{10.162}$$

が得られる．

ここで，

$$E = e^H \tag{10.163}$$

によって H を定義する．さらに，

$$\Gamma_t = e^{-tH} \Gamma e^{tH} + e^{-tH} d e^{tH}, \tag{10.164}$$

$$R_t = d\Gamma_t + \Gamma_t^2 \tag{10.165}$$

を定義する．$t = 0$ のときは

$$\Gamma_0 = \Gamma, \tag{10.166}$$

$$R_0 = R \tag{10.167}$$

である．これらを用いてピュア整合的 Einstein 異常項を用いた counterterm

$$S[E, \Gamma] = \int_0^1 dt \int_x \mathrm{tr} H G_{\mathrm{cons}}(\Gamma_t, R_t) \tag{10.168}$$

を導入する．$S[E,\Gamma]$ (10.168) は一般座標変換のもとで

$$\begin{aligned}\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}S &= \int \frac{\delta S}{\delta E}\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}E + \int \frac{\delta S}{\delta \Gamma}\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\Gamma \\ &= \int \frac{\delta S}{\delta E}(\mathcal{L}_{\xi}E + T_{\Lambda}E) + \int \frac{\delta S}{\delta \Gamma}(\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}\Gamma + T_{\Lambda}\Gamma) \\ &= \mathcal{L}_{\xi}S + T_{\Lambda}S \\ &= T_{\Lambda}S, \end{aligned} \tag{10.169}$$

すなわち，

$$\delta^{\xi}_{\mathrm{gc}}S = T_{\Lambda}S \tag{10.170}$$

と変換する．ただし，3 行目で

$$\mathcal{L}_{\xi}S = 0 \tag{10.171}$$

を用いた．

ここで，

$$\Lambda_t = e^{-tH}\Lambda e^{tH} + e^{-tH}T_{\Lambda}e^{tH} \tag{10.172}$$

を定義する．$t=0$ のときは

$$\Lambda_0 = \Lambda \tag{10.173}$$

であり，$t=1$ のときは (10.160) より

$$\Lambda_1 = 0 \tag{10.174}$$

である．(10.164) と (10.172) を用いると

$$T_{\Lambda}\Gamma_t = d\Lambda_t + [\Gamma_t, \Lambda_t] = T_{\Lambda_t}\Gamma_t \tag{10.175}$$

が得られる．これを用いると

$$T_{\Lambda}R_t = [R_t, \Lambda_t] = T_{\Lambda_t}R_t \tag{10.176}$$

が得られる．また，(10.172) より

$$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial t} = T_{\Lambda}H + [\Lambda_t, H] \tag{10.177}$$

が得られる．同様にして

$$\frac{\partial \Gamma_t}{\partial t} = dH + [\Gamma_t, H] = T_H\Gamma_t, \tag{10.178}$$

$$\frac{\partial R_t}{\partial t} = [R_t, H] = T_H R_t \tag{10.179}$$

が得られる．

$S[E,\Gamma]$ (10.168) に T_{Λ} を作用すると

$$T_{\Lambda}S[E,\Gamma] = \int_0^1 dt \int_x \mathrm{tr}\left((T_{\Lambda}H)G_{\mathrm{cons}}(\Gamma_t, R_t) + HT_{\Lambda}G_{\mathrm{cons}}(\Gamma_t, R_t)\right) \tag{10.180}$$

となる．(10.175) と (10.176) より

$$T_{\Lambda_t} G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) = T_\Lambda G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) \tag{10.181}$$

が得られる．また，(10.178) と (10.179) より

$$T_H G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) = \frac{\partial G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t)}{\partial t} \tag{10.182}$$

が得られる．ここで，ゲージ理論の整合性条件

$$\int {\rm tr}\Lambda_2 T_{\Lambda_1} G_{\rm cons}(A, F) - \int {\rm tr}\Lambda_1 T_{\Lambda_2} G_{\rm cons}(A, F) = \int {\rm tr}[\Lambda_1, \Lambda_2] G_{\rm cons}(A, F) \tag{10.183}$$

で置き換え

$$\Lambda_2 \to H, \tag{10.184}$$
$$\Lambda_1 \to \Lambda_t, \tag{10.185}$$
$$A \to \Gamma_t, \tag{10.186}$$
$$F \to R_t \tag{10.187}$$

をすると

$$\int {\rm tr} H T_{\Lambda_t} G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) - \int {\rm tr}\Lambda_t T_H G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) = \int {\rm tr}[\Lambda_t, H] G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) \tag{10.188}$$

が得られる．(10.180) に (10.181) と (10.188) を用いると，結局

$$\begin{aligned}
\delta^\xi_{\rm gc} S &= \int_0^1 dt \int_x {\rm tr}\big\{(T_\Lambda H) G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) + \Lambda_t T_H G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) + [\Lambda_t, H] G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t)\big\} \\
&= \int_0^1 dt \int_x {\rm tr}\left(\frac{\partial \Lambda_t}{\partial t} G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) + \Lambda_t \frac{\partial G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t)}{\partial t}\right) \\
&= \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} \int_x {\rm tr}\Lambda_t G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) \\
&= -\int_x {\rm tr}\Lambda G_{\rm cons}(\Gamma, R) \\
&= -\Lambda \cdot G_{\rm cons} \\
&= -E^\xi_{\rm cons},
\end{aligned} \tag{10.189}$$

すなわち，

$$\delta^\xi_{\rm gc} S = -E^\xi_{\rm cons} \tag{10.190}$$

が得られる．ただし，1 行目で (10.177) と (10.182) を用いた．

一方，

$$\Gamma = E\alpha E^{-1} + E d E^{-1} \tag{10.191}$$

を (10.164)

$$\Gamma_t = e^{-tH} \Gamma e^{tH} + e^{-tH} d e^{tH} \tag{10.164}$$

に用いると

$$\Gamma_t = e^{(1-t)H}\alpha e^{-(1-t)H} + e^{(1-t)H}de^{-(1-t)H} \tag{10.192}$$

が得られる．(10.168)

$$S[E,\Gamma] = \int_0^1 dt \int_x \mathrm{tr} HG_{\mathrm{cons}}(\Gamma_t, R_t) \tag{10.168}$$

で変数変換

$$\tau = 1 - t \tag{10.193}$$

をすると

$$S[E,\Gamma] = \int_0^1 d\tau \int_x \mathrm{tr} HG_{\mathrm{cons}}(\Gamma_{1-\tau}, R_{1-\tau}) \tag{10.194}$$

となる．ここで，

$$\alpha_\tau = \Gamma_{1-\tau} = e^{\tau H}\alpha e^{-\tau H} + e^{\tau H}de^{-\tau H} \tag{10.195}$$

と置き，

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\tau = R_{1-\tau} &= d\Gamma_{1-\tau} + \Gamma_{1-\tau}^2 \\ &= d\alpha_\tau + d\alpha_\tau^2 \end{aligned} \tag{10.196}$$

と置く．改めて

$$R_\tau = \tilde{R}_\tau \tag{10.197}$$

と書くと，(10.194) はピュア整合的 Lorentz 異常項を用いて

$$S[E,\Gamma] = \int_0^1 d\tau \int_x \mathrm{tr} HG_{\mathrm{cons}}(\alpha_\tau, R_\tau) = S'[E,\alpha] \tag{10.198}$$

と表される．ただし，

$$\alpha_0 = \alpha, \tag{10.199}$$

$$R_0 = d\alpha + \alpha^2 = R \tag{10.200}$$

である．これらを用いると (10.190)

$$\delta_{\mathrm{gc}}^\xi S = -E_{\mathrm{cons}}^\xi \tag{10.190}$$

の導出と同様にして

$$\delta_{\mathrm{lL}}^\theta S' = \delta_{\mathrm{lL}}^\theta S = L_{\mathrm{cons}}^\theta \tag{10.201}$$

が得られる．

ここで，

$$\delta_{\mathrm{lL}} W_{\mathrm{reg}} = 0, \tag{10.202}$$

$$\delta_{\mathrm{gc}}^\xi W_{\mathrm{reg}} = E_{\mathrm{cons}}^\xi \tag{10.203}$$

の場合を考える．有効作用 $W_{\rm reg}$ に local な項を付け加えることができる不定性の自由度を利用して新しい有効作用 $W'_{\rm reg}$ を構成する：

$$W'_{\rm reg} = W_{\rm reg} + S. \tag{10.204}$$

ただし，S は (10.168)，(10.198)

$$S[E,\Gamma] = \int_0^1 dt \int_x {\rm tr} H G_{\rm cons}(\Gamma_t, R_t) = \int_0^1 d\tau \int_x {\rm tr} H G_{\rm cons}(\alpha_\tau, R_\tau) \tag{10.205}$$

である．$W'_{\rm reg}$ に $\delta^\xi_{\rm gc}$ を作用すると

$$\delta^\xi_{\rm gc} W'_{\rm reg} = 0 \tag{10.206}$$

となる．ただし，(10.190) を用いた．$W'_{\rm reg}$ に $\delta^\theta_{\rm lL}$ を作用すると

$$\delta^\theta_{\rm lL} W'_{\rm reg} = L^\theta_{\rm cons} \tag{10.207}$$

が得られる．ただし，(10.201) を用いた．すなわち，もとの有効作用 $W_{\rm reg}$ のもとでは重力異常項として Einstein 異常項だけ（ピュア整合的 Einstein 異常項）が存在したが，新しい有効作用 $W'_{\rm reg}$ のもとでは Lorentz 異常項だけ（ピュア整合的 Lorentz 異常項）が存在することがわかる．逆に，

$$\delta_{\rm lL} W'_{\rm reg} = L^\theta_{\rm cons}, \tag{10.208}$$
$$\delta^\xi_{\rm gc} W'_{\rm reg} = 0 \tag{10.209}$$

のとき，新しい有効作用 $W_{\rm reg}$ を構成する：

$$W_{\rm reg} = W'_{\rm reg} - S. \tag{10.210}$$

$W_{\rm reg}$ に $\delta^\theta_{\rm lL}$ を作用すると

$$\delta^\theta_{\rm lL} W_{\rm reg} = 0 \tag{10.211}$$

となる．ただし，(10.201) を用いた．$W_{\rm reg}$ に $\delta^\xi_{\rm gc}$ を作用すると

$$\delta^\xi_{\rm gc} W_{\rm reg} = E^\xi_{\rm cons} \tag{10.212}$$

が得られる．ただし，(10.190) を用いた．すなわち，有効作用 $W'_{\rm reg}$ のもとでは重力異常項として Lorentz 異常項だけ（ピュア整合的 Lorentz 異常項）が存在したが，新しい有効作用 $W_{\rm reg}$ のもとでは Einstein 異常項だけ（ピュア整合的 Einstein 異常項）が存在することがわかる．

以上より，ピュア整合的 Einstein 異常項とピュア整合的 Lorentz 異常項が同等であることがわかった．したがって，整合的重力異常項を考えるときはピュア整合的 Einstein 異常項かピュア整合的 Lorentz 異常項のどちらか一方を考えればよいことがわかる．

ピュア共変的 Einstein 異常項とピュア共変的 Lorentz 異常項との関係については 11.3 節で議論する．

第 11 章

共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルとの関係式

この章では，まず，重力場における軸性 U(1) 異常項について考える．次に共変的 Lorentz 異常項と共変的 Einstein 異常項を具体的なエネルギー運動量テンソルに基づいて述べる．共変的 Einstein 異常項を求める計算は軸性 U(1) 異常項と同様の計算に帰着される．また，Banerjee らのゲージ異常項における方法を重力異常項の場合に適用し，共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルとの関係式を導出する [26]．この関係式には共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl が現れる．ヒートカーネルの方法を用いてこの functional curl を 2 次元で評価する．

11.1　重力場における軸性 U(1) 異常項

次の作用

$$S[e_a{}^\mu, \tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}] = \frac{1}{2}\int dx \tilde{\bar{\psi}} i e_a{}^\mu \gamma^a (D_\mu - \overleftarrow{D_\mu})\tilde{\psi} \tag{11.1}$$

は一般座標変換不変性と局所 Lorentz 変換不変性の他に軸性 U(1) 変換

$$\tilde{\psi} \to \tilde{\psi}' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{11.2}$$

$$\tilde{\bar{\psi}} \to \tilde{\bar{\psi}}' = \tilde{\bar{\psi}} e^{i\alpha\gamma_5} \tag{11.3}$$

のもとでの不変性も持つ．ただし，$\alpha = \text{const.}$ である．これらの無限小変換（$\alpha \ll 1$）のもとで作用 (11.1) が不変であることから

$$\partial_\mu J_5^\mu = 0 \tag{11.4}$$

が得られる．ただし，J_5^μ は weight 1 の軸性ベクトルカレント密度

$$J_5^\mu = \tilde{\bar{\psi}} \gamma^\mu \gamma_5 \tilde{\psi} \tag{11.5}$$

であり，途中，運動方程式を用いた．$\tilde{\psi}$，$\tilde{\bar{\psi}}$ を量子化したときの J_5^μ の真空期待値 $\langle J_5^\mu(x)\rangle$ は

$$\begin{aligned}
\langle J_5^\mu(x)\rangle &= \langle\tilde{\bar{\psi}}(x)\gamma^\mu\gamma_5\tilde{\psi}(x)\rangle && (11.6)\\
&= -\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma_5\langle\tilde{\psi}(x)\tilde{\bar{\psi}}(x')\rangle && (11.7)\\
&= \lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu\frac{1}{\not{D}}\delta(x-x') && (11.8)
\end{aligned}$$

で与えられる．ただし，$\not{D}=\gamma^\mu D_\mu$，$\gamma^\mu=\gamma^a e_a{}^\mu$ であり，2 行目でプロパゲーター

$$\langle\tilde{\psi}(x)\tilde{\bar{\psi}}(x')\rangle = \frac{1}{\not{D}}\delta(x-x') \tag{11.9}$$

を用いた．$\langle J_5^\mu(x)\rangle$ は発散しているからこれを正則化する．正則化には，この系がもともと重力理論であるため，一般座標変換と局所 Lorentz 変換のもとでの不変性・共変性を壊さないような正則化が必要である．$\langle J_5^\mu(x)\rangle$ に cut-off パラメータ s を有限な値として Gauss 型の減衰因子 $e^{-s\not{D}^2}$ をかけて発散を有限に抑えて計算し，最終的に $s\to 0$ の極限をとるとすると，$\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ は

$$\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^\mu\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{11.10}$$

と書ける．$\not{D}$ が共変的なのでこの式は明らかに共変的であることがわかる．(11.10) で最初に $s\to 0$ をとると正則化する前の式 (11.8) に戻る．この式の発散をとると重力場における軸性 U(1) 異常項 [67–72]

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}} &= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\left(\mathrm{tr}\gamma_5\not{\partial}\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')+\mathrm{tr}\gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-s\not{D}^2}\not{\partial}\delta(x-x')\right)\\
&= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}2\mathrm{tr}\gamma_5 e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') && (11.11)
\end{aligned}$$

が得られる．ただし，$\not{\partial}=\gamma^\mu\partial_\mu$ であり，最初に

$$\partial'_\mu\delta(x-x') = -\partial_\mu\delta(x-x') \tag{11.12}$$

を用い，1 行目で $\not{\partial}=\not{D}+\gamma^\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}-\frac{1}{4}\omega_{ij\mu}\gamma^{ij}\right)$ を用いた．(11.11) は

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\mathrm{cov}} &= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}2\mathrm{tr}\gamma_5 K(x,x';s)\\
&= \lim_{s\to 0}2\mathrm{tr}\gamma_5 K(x,x;s) && (11.13)
\end{aligned}$$

と書ける．ただし，$K(x,x';s)$ はヒートカーネルで

$$K(x,x';s) = e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{11.14}$$

で定義される．$K(x,x;s)$ はヒートカーネルの方法で求めることができるが，高次元で $K(x,x;s)$ の展開係数を求める計算が非常に複雑になる．一様電磁場中のヒートカーネル [73] の場合と同様の方法を用いると，ヒートカーネルの展開係数を求めることなしに一般次元でも直接 $K(x,x;s)$ を複雑な計算を避けて求められることが知られている [74]：

$$K(x,x;s) = \frac{\sqrt{g}}{(4\pi s)^n}\det\left(\frac{\boldsymbol{R}s}{\sinh\boldsymbol{R}s}\right)^{1/2}. \tag{11.15}$$

ただし，

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu}=[D_\mu,D_\nu]=\frac{1}{4}R_{\mu\nu ij}\gamma^{ij} \tag{11.16}$$

である．したがって，(11.11) より

$$\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle_{\rm cov}=\lim_{s\to 0}\frac{2\sqrt{g}}{(4\pi s)^n}{\rm tr}\gamma_5{\rm exp}\left(-\frac{1}{2}{\rm Tr}\ln\frac{{\rm sinh}\boldsymbol{R}s}{\boldsymbol{R}s}\right) \tag{11.17}$$

が得られる．[*1]ただし，Tr は行列 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{R}_{\mu\nu})$ の添え字に対するトレースであり，行列 M に対する公式

$$\det M=\exp\left({\rm Tr}\ln M\right) \tag{11.18}$$

を用いた．ゲージ理論における軸性 U(1) 異常項 (2.20) は $2n$ 次元で現れたが，重力理論における軸性 U(1) 異常項は $4n$ 次元で現れることが知られている．

11.2 共変的 Lorentz 異常項と共変的 Einstein 異常項

共変的エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソルの定義 (9.11)

$$eT^a{}_\mu\equiv\frac{\delta S}{\delta e_a{}^\mu} \tag{9.11}$$

に作用の具体的表式 (9.1)

$$S[e_a{}^\mu,\tilde{\psi}_L,\tilde{\bar{\psi}}_L]=\frac{1}{2}\int dx\tilde{\bar{\psi}}_L ie_a{}^\mu\gamma^a(D_\mu-\overleftarrow{D_\mu})\tilde{\psi}_L \tag{9.1}$$

を用いると $eT^a{}_\mu$ の具体形

$$eT^a{}_\mu=\frac{1}{2}\tilde{\bar{\psi}}_L i\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\psi}_L+\frac{1}{4}D_\rho\left(\tilde{\bar{\psi}}_L i\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\psi}_L\right) \tag{11.19}$$

が得られる．ただし，$\overleftrightarrow{D_\mu}=\overrightarrow{D_\mu}-\overleftarrow{D_\mu}$ であり，

$$\gamma^{abc}\equiv\frac{1}{3!}\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]} \tag{11.20}$$

である．また，途中

$$\{\gamma^\mu,\gamma^{ij}\}=2\gamma^{\mu ij} \tag{11.21}$$

と

$$\delta\omega_{ij\lambda}=-(e^a{}_\lambda e_{\underline{i}\mu}D_{\underline{j}}+g_{\mu\lambda}\delta^a_{\underline{i}}D_{\underline{j}}+\delta^a_{\underline{i}}e_{\underline{j}\mu}D_\lambda)\delta e_a{}^\mu \tag{11.22}$$

を用いた．ただし，添え字につけた _ は $A_{\underline{i}}B_{\underline{j}}=1/2(A_iB_j-A_jB_i)$ を意味する．

[*1] この異常項は位相的な側面からは Atiya-Singer の指数定理の一般化となっていて，Dirac 示性数（genus）と呼ばれている．

経路積分の計算のため，$\tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L$ をエルミート演算子の固有関数系で展開する：エルミート演算子 $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$（$\not{D}^\dagger = \not{D}$）の固有値方程式

$$\not{D}\tilde{\phi_n} = \lambda_n \tilde{\phi_n} \quad (\lambda_n > 0 \ , n > 0) \ , \tag{11.23}$$

$$\not{D}\tilde{\phi}_{-n} = -\lambda_n \tilde{\phi}_{-n} \quad (\lambda_n > 0 \ , n > 0) \tag{11.24}$$

を考える．ただし，$\tilde{\phi}_{-n} \equiv \gamma_5 \tilde{\phi_n} \quad (n > 0)$ である．λ_n は local Lorentz 変換と一般座標変換のもとで不変である．ゼロモード $\lambda_n = 0$ は簡単のため無いものとする．$\tilde{\phi}_n$ の規格化を内積

$$\left(\tilde{\phi}_m, \tilde{\phi}_n\right) \equiv \delta_{mn} \tag{11.25}$$

で定義する．ただし，$\tilde{\phi}_n$ の内積を

$$\left(\tilde{\phi}_m, \tilde{\phi}_n\right) \equiv \int dx \tilde{\phi}_m^\dagger \tilde{\phi}_n \tag{11.26}$$

で定義した．

$\tilde{\phi}_n^L$，$\tilde{\phi}_n^R$ を

$$\tilde{\phi}_n^L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\phi_n} - \tilde{\phi}_{-n}\right) \ , \qquad \tilde{\phi}_n^R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\phi_n} + \tilde{\phi}_{-n}\right) \tag{11.27}$$

で定義すると

$$\left(\tilde{\phi}_m^{L(R)}, \tilde{\phi}_n^{L(R)}\right) = \delta_{mn} \ , \qquad \left(\tilde{\phi}_m^L, \tilde{\phi}_n^R\right) = 0 \tag{11.28}$$

と

$$\gamma_5 \tilde{\phi}_n^L = -\tilde{\phi}_n^L \ , \qquad \gamma_5 \tilde{\phi}_n^R = \tilde{\phi}_n^R \tag{11.29}$$

が得られる．

これらを用いて $\tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L$ をカイラルな基底の完全系 $\{\tilde{\phi}_n^L, \tilde{\phi}_n^R\}$ で展開する：

$$\tilde{\psi}_L = \sum_{n>0} a_n \tilde{\phi}_n^L \ , \tag{11.30}$$

$$\tilde{\bar{\psi}}_L = \sum_{n>0} b_n \tilde{\phi}_n^{R\dagger} \ . \tag{11.31}$$

ただし，a_n, b_n は Grassmann 数である．

経路積分の測度を

$$d\tilde{\psi}_L d\tilde{\bar{\psi}}_L \equiv \prod_{n>0} da_n db_n \tag{11.32}$$

で定義する．これと $eT^a{}_\mu$ の具体形 (11.19) と $\tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L$ の展開 (11.30), (11.31) をエネルギー運動量テンソルの真空期待値 $\langle eT^a{}_\mu \rangle$

$$\langle eT^a{}_\mu \rangle = \frac{\int d\tilde{\psi}_L d\tilde{\bar{\psi}}_L eT^a{}_\mu e^{S[e_a{}^\mu, \tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L]}}{\int d\tilde{\psi}_L d\tilde{\bar{\psi}}_L e^{S[e_a{}^\mu, \tilde{\psi}_L, \tilde{\bar{\psi}}_L]}} \tag{11.33}$$

に代入し，積分を実行すると

$$\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\phi}_n^L + \frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\phi}_n^L\right)\right] \tag{11.34}$$

が得られる．この式は n に関して無限個の和で表されているので発散している．

式 (11.34) に共変的な正則化を用いる．正則化因子としては Gauss 型の正則化因子 $e^{-s\lambda_n^2}$ を用いて共変的エネルギー運動量テンソル $\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}$ を構成する：

$$\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\phi}_n^L + \frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\phi}_n^L\right)\right]e^{-s\lambda_n^2}\ . \tag{11.35}$$

ただし，s は cut-off パラメータである．

共変的 Lorentz 異常項と共変的 Einstein 異常項のヒートカーネルによる表現

共変的 Lorentz 異常項

共変的 Lorentz 異常項 $L_{ab}^{\rm cov}$ は (9.22) に (11.35) を用いると

$$L_{ab}^{\rm cov} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma_{[a}\overleftrightarrow{D}_{b]}\tilde{\phi}_n^L + \frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^\rho{}_{ab}\tilde{\phi}_n^L\right)\right]e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.36}$$

と表される．この式の右辺第 2 項に

$$\overleftarrow{D}^\rho\gamma_{\rho ab} = \overleftarrow{\not{D}}\gamma_{ab} - 2\overleftarrow{D}_{[a}\gamma_{b]}, \tag{11.37}$$

$$\gamma_{\rho ab}D^\rho = \gamma_{ab}\not{D} - 2\gamma_{[a}D_{b]} \tag{11.38}$$

と

$$\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\overleftarrow{\not{D}} = -\lambda_n\tilde{\phi}_n^{L\dagger}, \tag{11.39}$$

$$\not{D}\tilde{\phi}_n^L = \lambda_n\tilde{\phi}_n^R \tag{11.40}$$

を用いて整理すると (11.36) は

$$L_{ab}^{\rm cov} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{n>0}\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma_{ab}\tilde{\phi}_n^R - \tilde{\phi}_n^{L\dagger}\gamma_{ab}\tilde{\phi}_n^L\right)e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.41}$$

となることがわかる．この式に (11.27) と $\tilde{\phi}_n^\dagger = \tilde{\phi}_{-n}^\dagger\gamma_5$，$\lambda_{-n} = -\lambda_n$ を用いると

$$L_{ab}^{\rm cov} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{{\rm all}\,n}\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_{ab}\tilde{\phi}_n e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.42}$$

が得られる．この式に固有関数系 $\{\tilde{\phi}_n\}$ の完全性の条件

$$\sum_{{\rm all}\,n}\tilde{\phi}_n(x)\tilde{\phi}_n^\dagger(x') = \delta(x-x') \tag{11.43}$$

を用いるとヒートカーネルによる表現

$$L_{ab}^{\mathrm{cov}}(x) = \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma_{ab}e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \tag{11.44}$$

が得られる．これは Lorentz 異常項を経路積分の Jacobian として導出した [75] の結果に一致する．Lorentz 異常項は $4k+2$ 次元 $(k=0,1,2,...)$ で現れることが知られている．

共変的 Einstein 異常項

共変的 Einstein 異常項 E_ν^{cov} は (9.23) に (11.35) を用いると

$$\begin{aligned}E_\nu^{\mathrm{cov}} &= D^\mu \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma_\mu \overleftrightarrow{D_\nu}\tilde{\phi}_n^L + \frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^\rho{}_{\mu\nu}\tilde{\phi}_n^L\right)\right]e^{-s\lambda_n^2}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\Big[\not{D}\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot D_\nu\tilde{\phi}_n^L + \tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^\mu D_\mu D_\nu\tilde{\phi}_n^L - D_\mu D_\nu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma^\mu\tilde{\phi}_n^L - D_\nu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\not{D}\tilde{\phi}_n^L\\ &\qquad + \frac{1}{4}\left[D_\mu, D_\rho\right]\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{\rho\mu}{}_\nu\tilde{\phi}_n^L\right)\Big]e^{-s\lambda_n^2}\end{aligned} \tag{11.45}$$

と表される．いま，

$$\left[D_\mu, D_\nu\right]\tilde{\phi}_n^L = \frac{1}{4}R_{ij\mu\nu}\gamma^{ij}\tilde{\phi}_n^L, \tag{11.46}$$

$$\left[D_\mu, D_\nu\right]\tilde{\phi}_n^{R\dagger} = -\frac{1}{4}R_{ij\mu\nu}\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{ij} \tag{11.47}$$

と

$$\left[D_\mu, D_\rho\right]\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{\rho\mu}{}_\nu\tilde{\phi}_n^L\right) = 0 \tag{11.48}$$

が成立している．ただし，(11.48) を示すとき Bianchi の第 1 恒等式

$$R_{\mu\nu\rho} + R_{\nu\rho\mu} + R_{\rho\mu\nu} = 0 \tag{11.49}$$

を用いた．(11.39)，(11.40) と (11.46)〜(11.48) を (11.45) に用いると

$$E_\nu^{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\left[\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\overleftrightarrow{D}_\nu\tilde{\phi}_n^R - \tilde{\phi}_n^{L\dagger}\overleftrightarrow{D}_\nu\tilde{\phi}_n^L\right]e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.50}$$

が得られる．この式に (11.27) と $\tilde{\phi}_n^\dagger = \tilde{\phi}_{-n}^\dagger\gamma_5$，$\lambda_{-n} = -\lambda_n$ を用いると

$$E_\nu^{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{all}\,n}\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5\overleftrightarrow{D}_\nu\tilde{\phi}_n e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.51}$$

が得られる．これは Einstein 異常項を経路積分の Jacobian として導出した [75] の結果に一致することがわかる．この式に任意の ξ^ν をかけ x で積分し，部分積分をすると

$$\begin{aligned}\int dx\xi^\nu E_\nu^{\mathrm{cov}} &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\int dx\sum_{\mathrm{all}\,n}\{\xi^\nu\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5 D_\nu\tilde{\phi}_n + \tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5 D_\nu(\xi^\nu\tilde{\phi}_n)\}e^{-s\lambda_n^2}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\gamma_5(\xi^\mu D_\mu + D_\mu\xi^\mu)e^{-s\not{D}^2},\end{aligned} \tag{11.52}$$

すなわち，

$$\int dx \xi^\nu E_\nu^{\rm cov} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2} {\rm Tr} \gamma_5 (\xi^\mu D_\mu + D_\mu \xi^\mu) e^{-s\not{D}^2} \tag{11.53}$$

が得られる．ただし，(11.52) の 1 行目で固有関数系 $\{\tilde{\phi}_n\}$ の完全性の条件

$$\sum_{{\rm all}\, n} \tilde{\phi}_n(x) \tilde{\phi}_n^\dagger(x') = \delta(x-x') \tag{11.54}$$

を用いた．また，最終行の Tr はガンマ行列のトレースに加えて，関数空間上のトレースも含むことを意味する．Einstein 異常項は $4k+2$ 次元 $(k=0,1,2,...)$ で現れることが知られている．

2 次元における共変的 Lorentz 異常項と共変的 Einstein 異常項

共変的 Lorentz 異常項 (11.44) を

$$L_{ab}^{\rm cov}(x) = \lim_{s\to 0} \lim_{x'\to x} \frac{1}{4} {\rm tr}\, \gamma_5 \gamma_{ab} K(x,x';s) \tag{11.55}$$

と表す．ただし，ヒートカーネル $K(x,x';s)$ を

$$K(x,x';s) \equiv e^{-s\not{D}^2} \delta(x-x') \tag{11.56}$$

で定義した．

11.1 節で述べたように，$K(x,x;s)$ を一様電磁場中のヒートカーネルの場合と同様の方法を用いると一般次元で複雑な計算を避けて求められるが，以下では簡単な例として 2 次元の場合にそれを用いないヒートカーネルの方法で考える．$K(x,x';s)$ を

$$K(x,x';s) = \frac{1}{4\pi s} \sqrt{D(x,x')} e^{\sigma(x,x')/2s} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,x')(-s)^k \tag{11.57}$$

と展開する．ただし，$\sigma(x,x')$ は geodetic bi-scalar であり，$D = {\rm det} D_{.\mu\nu'}$，$D_{.\mu\nu'} = -\sigma_{.\mu\nu'}$ である．ただし，$_{.\mu}$ は x^μ による共変微分を表し，$_{.\mu'}$ は x'^μ による共変微分を表す．これを (**??**) に用いると

$$L_{ab}^{\rm cov}(x) = \lim_{s\to 0} \left(\frac{e}{16\pi s} {\rm tr}\, \gamma_5 \gamma_{ab} [a_0] - \frac{e}{16\pi} {\rm tr}\, \gamma_5 \gamma_{ab} [a_1] + O(s) \right) \tag{11.58}$$

が得られる．ただし，Synge の記号 $f(x,x) = [f(x,x')]$ を用いた．これに

$$[a_0] = \mathbf{1} \ , \tag{11.59}$$

$$[a_1] = -\frac{1}{12} R \ , \tag{11.60}$$

$${\rm tr} \gamma_5 \gamma_{ab} = -2i \varepsilon_{ab} \tag{11.61}$$

を代入すると

$$L_{ab}^{\rm cov} = -\frac{i}{8\pi} e \varepsilon_{ab} \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} - \frac{i}{96\pi} e R \varepsilon_{ab} \tag{11.62}$$

が得られる．この式の右辺第 1 項は発散項である．共変的エネルギー運動量テンソル $\langle eT_{ab}\rangle_{\rm cov}$ には ${e_a}^\mu$ の局所的な項（counterterm）を加える正則化による不定性の自由度がある．そこで，新しい共変的エネルギー運動量テンソル $\langle eT_{ab}\rangle^{\rm f}_{\rm cov}$

$$\langle eT_{ab}\rangle^{\rm f}_{\rm cov} \equiv \langle eT_{ab}\rangle_{\rm cov} + \frac{i}{8\pi} e\varepsilon_{ab} \lim_{s\to 0}\frac{1}{s} \tag{11.63}$$

を定義する．これを用いると上で現れた発散項が消え，有限な結果

$$\tilde{L}^{\rm cov}_{ab} \equiv \langle eT_{[ab]}\rangle^{\rm f}_{\rm cov} = -\frac{i}{96\pi} eR\varepsilon_{ab} \tag{11.64}$$

が得られる．

(11.63) を用いると

$$D_\mu \langle eT^{\mu\nu}\rangle^{\rm f}_{\rm cov} = D_\mu \langle eT^{\mu\nu}\rangle_{\rm cov} = E^\nu_{\rm cov} \tag{11.65}$$

となるので，上で加えた counterterm は共変的 Einstein 異常項を変えない．

11.3 ピュア共変的 Einstein 異常項とピュア共変的 Lorentz 異常項との関係式

ピュア共変的 Einstein 異常項

第 9 章で考えたエネルギー運動量テンソルは一般に Eisnstein 異常項と Lorentz 異常項を両方持つ．文献 [11] で示されたように，これらの異常項は独立ではない．さらに，正則化による不定性の自由度を用いると Lorentz 異常項かあるいは Einstein 異常項のどちらか一方を生じないエネルギー運動量テンソルを構成できる．共変的な正則化という観点からは，これは次のように説明される．

共変的に正則化されたエネルギー運動量テンソル $\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\rm cov}$ が与えられると，一般にこれから Einstein 異常項 $D^\mu\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\rm cov}$ と Lorentz 異常項 $\langle eT_{[\mu\nu]}\rangle_{\rm cov}$ が生じる．これらの共変的重力異常項は Riemann 曲率の局所多項式である（Einstein 異常項に対しては Riemann 曲率の微分も含む）．正則化による不定性の自由度を用いると，有限で局所的な共変的 counterterm を $\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\rm cov}$ に加えることにより新たな共変的エネルギー運動量テンソルを構成することができる．Lorentz 異常項を counterterm として用いると，Lorentz 異常項を生じないエネルギー運動量テンソル

$$\langle eT_{\mu\nu}\rangle^{\rm pE}_{\rm cov} = \langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\rm cov} - \langle eT_{[\mu\nu]}\rangle_{\rm cov} \tag{11.66}$$

が得られる．このエネルギー運動量テンソルからはピュア共変的 Einstein 異常項 $E^{\rm p\ cov}_\nu = D^\mu\langle eT_{\mu\nu}\rangle^{\rm pE}_{\rm cov}$ が生じる．上で与えたエネルギー運動量テンソル $\langle eT_{\mu\nu}\rangle^{\rm pE}_{\rm cov}$ は $\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\rm cov}$ の対称成分なので，ピュア共変的 Eisnstein 異常項は共変的エネルギー運動量テンソルの対称成分の共変発散で与えられる [12,18,75,76]．

共変的エネルギー運動量テンソル (11.35)

$$\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\phi}_n^L + \frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\phi}_n^L\right)\right]e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.35}$$

の対称成分は

$$\langle eT_{(\mu\nu)}(x)\rangle_{\rm cov} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma_\mu D_\nu\tilde{\phi}_n^L + \tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma_\nu D_\mu\tilde{\phi}_n^L - D_\mu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma_\nu\tilde{\phi}_n^L - D_\nu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma_\mu\tilde{\phi}_n^L\right)e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.67}$$

である．この式の共変発散をとると

$$\begin{aligned}
&D^\mu\langle eT_{(\mu\nu)}(x)\rangle_{\rm cov}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\overleftarrow{\not{D}}D_\nu\tilde{\phi}_n^L + \tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^\mu D_\mu D_\nu\tilde{\phi}_n^L + D^\mu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma_\nu D_\mu\tilde{\phi}_n^L + \tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma_\nu D^\mu D_\mu\tilde{\phi}_n^L\right.\\
&\left.-D^\mu D_\mu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma_\nu\tilde{\phi}_n^L - D_\mu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma_\nu D^\mu\tilde{\phi}_n^L - D_\mu D_\nu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma^\mu\tilde{\phi}_n^L - D_\nu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\not{D}\tilde{\phi}_n^L\right)e^{-s\lambda_n^2}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left(-\lambda_n\tilde{\phi}_n^{L\dagger}D_\nu\tilde{\phi}_n^L + \frac{1}{4}R_{ij\mu\nu}\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^\mu\gamma^{ij}\tilde{\phi}_n^L + \tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^\mu D_\nu D_\mu\tilde{\phi}_n^L\right.\\
&\left.+\frac{1}{4}R_{ij\mu\nu}\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{ij}\gamma^\mu\tilde{\phi}_n^L - D_\nu D_\mu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\gamma^\mu\tilde{\phi}_n^L - \lambda_n D_\nu\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\cdot\tilde{\phi}_n^R\right)e^{-s\lambda_n^2}
\end{aligned} \tag{11.68}$$

となる．ただし，右辺一行目で

$$\not{D}\tilde{\phi}_n^L = \lambda_n\tilde{\phi}_n^R, \tag{11.69}$$

$$\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\overleftarrow{\not{D}} = -\lambda_n\tilde{\phi}_n^{L\dagger}, \tag{11.70}$$

$$[D_\mu, D_\nu]\tilde{\phi}_n^L = \frac{1}{4}R_{ij\mu\nu}\gamma^{ij}\tilde{\phi}_n^L, \tag{11.71}$$

$$[D_\mu, D_\nu]\tilde{\phi}_n^{R\dagger} = -\frac{1}{4}R_{ij\mu\nu}\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{ij}, \tag{11.72}$$

$$D^\mu D_\mu\tilde{\phi}_n^L = \left(\lambda_n^2 + \frac{1}{4}R\right)\tilde{\phi}_n^L, \tag{11.73}$$

$$D^\mu D_\mu\tilde{\phi}_n^{R\dagger} = \left(\lambda_n^2 + \frac{1}{4}R\right)\tilde{\phi}_n^{R\dagger} \tag{11.74}$$

を用いた．(11.68) に

$$\{\gamma^\mu, \gamma^{ij}\} = \gamma^{\mu ij}, \tag{11.75}$$

$$R_{ij\mu\nu}\gamma^{\mu ij} = 0 \tag{11.76}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
(11.68) &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{n>0}\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\overleftrightarrow{D}_\nu\tilde{\phi}_n^R - \tilde{\phi}_n^{L\dagger}\overleftrightarrow{D}_\nu\tilde{\phi}_n^L\right)e^{-s\lambda_n^2}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5\overleftrightarrow{D}_\nu\tilde{\phi}_n e^{-s\lambda_n^2}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{{\rm all}\,n}\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5\overleftrightarrow{D}_\nu\tilde{\phi}_n e^{-s\lambda_n^2},
\end{aligned} \tag{11.77}$$

すなわち，ピュア共変的 Einstein 異常項

$$E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} = D^\mu \langle eT_{(\mu\nu)}(x)\rangle_{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{\mathrm{all}\,n}\tilde{\phi}_n^\dagger \gamma_5 \overleftrightarrow{D}_\nu \tilde{\phi}_n e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.78}$$

が得られる．ただし，(11.77) の 1 行目で

$$\tilde{\phi}_{-n} = \gamma_5 \tilde{\phi}_n, \tag{11.79}$$

$$\tilde{\phi}_n^L = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\gamma_5)\tilde{\phi}_n, \tag{11.80}$$

$$\tilde{\phi}_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma_5)\tilde{\phi}_n \tag{11.81}$$

を用いた．

(11.78) に任意の ξ^ν をかけ x で積分し，部分積分をすると

$$\int dx \xi^\nu E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\gamma_5(\xi^\mu D_\mu + D_\mu \xi^\mu)e^{-s\not{D}^2} \tag{11.82}$$

が得られる．ただし，固有関数系 $\{\tilde{\phi}_n\}$ の完全性の条件

$$\sum_{\mathrm{all}\,n}\tilde{\phi}_n(x)\tilde{\phi}_n^\dagger(x') = \delta(x-x') \tag{11.83}$$

を用いた．また，最終行の Tr はガンマ行列のトレースに加えて，関数空間上のトレースも含むことを意味する．

表式 (11.82) は経路積分の Jacobian としても導出されている [76]．変換

$$\delta_{\mathrm{sym}} = \delta_{\mathrm{cov}}(\xi) + \delta_{\mathrm{lL}}(\lambda_{ab} = D_{[a}\xi_{b]}) \tag{11.84}$$

を考える．これを ${e_a}^\mu$ に作用させると

$$\delta_{\mathrm{sym}}{e_a}^\mu = -\frac{1}{2}(D_a\xi^\mu + D^\mu \xi_a) \tag{11.85}$$

が得られる．したがって，

$$\delta_{\mathrm{sym}}e_{a\mu} = -\frac{1}{2}(D_a\xi_\mu + D_\mu \xi_a) \tag{11.86}$$

である．これは a，μ について対称であるから，これからエネルギー運動量テンソルの対称成分が得られる．実際，この変換のもとでの経路積分の Jacobian を計算すると (11.82) が得られることが示されている [76]．(11.82) はヒートカーネルの方法で求められるが，高次元で (11.82) の展開係数を求める計算が非常に複雑になる．一方，重力場における軸性 U(1) 異常項は $4n$ 次元で求められている [74]．また，(11.82) を $4k+4$ 次元 ($k=0,1,2,\ldots$) の重力場における軸性 U(1) 異常項から求める方法が知られている [12, 18, 75–78]：任意の演算子 X に対する恒等式

$$\delta e^X = \int_0^1 d\alpha e^{(1-\alpha)X}\delta X e^{\alpha X} \tag{11.87}$$

と Tr の性質を用いると (11.82) は

$$\int dx \xi^\nu E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} = -\frac{1}{4} \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \mathrm{Tr} \gamma_5 e^{-s(\not{D}^2 - \xi^\mu D_\mu - D_\mu \xi^\mu)} \Big|_{\xi\,1\,次} \tag{11.88}$$

と変形できる．この式に

$$\not{D}^2 = D_\mu D^\mu - \frac{R}{4} \tag{11.89}$$

を用いると

$$\int dx \xi^\nu E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} = -\frac{1}{4} \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \mathrm{Tr} \gamma_5 e^{-s\left(\tilde{D}_\mu \tilde{D}^\mu - R/4\right)} \Big|_{\xi\,1\,次} \tag{11.90}$$

が得られる．ただし，

$$\tilde{D}_\mu = D_\mu - \xi_\mu \tag{11.91}$$

とした．これを用いると

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_{\mu\nu} = [\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu] = \boldsymbol{R}_{\mu\nu} - (D_\mu \xi_\nu - D_\nu \xi_\mu) + O(\xi^2) \tag{11.92}$$

が得られる．ただし，

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{ij\mu\nu} \gamma^{ij} \tag{11.93}$$

である．ここでヒートカーネル

$$\tilde{K}(x, x'; s) = e^{-s\left(\tilde{D}_\mu \tilde{D}^\mu - R/4\right)} \delta(x - x') \tag{11.94}$$

の展開

$$\tilde{K}(x, x'; s) = \frac{1}{(4\pi s)^n} \sqrt{D(x, x')} e^{\sigma(x, x')/2s} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(x, x')(-s)^k \tag{11.95}$$

を用いると (11.90) は

$$\int dx \xi^\nu E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} = \frac{1}{4} \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n} \lim_{s\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr} e \gamma_5 \tilde{a}_k (-s)^{k-n-1} \Big|_{\xi\,1\,次} \tag{11.96}$$

となる．(11.96) の $s \to 0$ の極限で s の次数が 0 次より高いオーダーの項は消えることを考慮すると生き残る項の添え字 k は条件

$$k - n - 1 \leq 0 \tag{11.97}$$

を満たすことがわかる．さらに，スピノールの添え字に対するトレースで残る項は γ_5 があるため最低 $2n$ 個のガンマ行列を含んでいなければならない．付録 J の漸化式 (J.61) と (J.62) から $\tilde{a}_k(x, x)$ は最大 $2k$ 個のガンマ行列を含むことがわかる．したがって，生き残る項の添え字 k は条件

$$2k \geq 2n \tag{11.98}$$

を満たす．条件 (11.97) と (11.98) より

$$k = n, n+1 \tag{11.99}$$

が得られる．したがって，(11.96) は

$$\begin{aligned}
\int dx\xi^\nu E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} &= \frac{1}{4}\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n}\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}e\gamma_5\left(-\tilde{a}_n\frac{1}{s}+\tilde{a}_{n+1}\right)\Big|_{\xi\,1\,\text{次}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n}\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}e\gamma_5\tilde{a}_{n+1}\Big|_{\xi\,1\,\text{次}} \\
&= \frac{1}{4}\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n}\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}e\gamma_5\delta R_{\mu\nu}\tilde{L}^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{(4\pi)^n}\lim_{s\to 0}\mathrm{Tr}\xi^\nu D^\mu e\gamma_5\tilde{L}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{11.100}$$

となる．ただし，1 行目では $\tilde{a}_n$ に含まれる ξ 1 次の項にはガンマ行列が $(2n-2)$ 個しか含まれないので消えた．また，3 行目で部分積分をした．(11.100) よりピュア共変的 Einstein 異常項 $E_\nu^{\mathrm{p\ cov}}$ は，結局，反対称テンソル $L_{\mu\nu}$ を用いて

$$E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} = -D^\mu L_{\mu\nu} \tag{11.101}$$

の形に表されることがわかる [12, 18, 75–78]．この式の導出でヒートカーネルの展開係数 $\tilde{a}_{n+1}$ がピュア共変的 Einstein 異常項に寄与することから，$4k+2$ 次元のピュア共変的 Einstein 異常項は $4k+4$ 次元の重力場における軸性 U(1) 異常項と関係していると考えられる [12, 18, 75–78]．$L_{\mu\nu}$ は Riemann 曲率の局所多項式である．

ピュア共変的 Einstein 異常項とピュア共変的 Lorentz 異常項との関係式

Einstein 異常項が生じないエネルギー運動量テンソル $\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pL}}$ を構成するために，countertem として $L_{\mu\nu}$ を $\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pE}}$ に加える：

$$\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pL}} = \langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pE}} + L_{\mu\nu}. \tag{11.102}$$

実際，(11.101) より $D^\mu\langle eT_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pL}} = 0$ であることがわかる．したがって，ピュア共変的 Lorentz 異常項 $L_{\mu\nu}^{\mathrm{p\ cov}}$ は

$$L_{\mu\nu}^{\mathrm{p\ cov}} = \langle eT_{[\mu\nu]}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pL}} = L_{\mu\nu}. \tag{11.103}$$

で与えられる．これを (11.101) に用いると，ピュア共変的 Einstein 異常項 $E_\nu^{\mathrm{p\ cov}}$ とピュア共変的 Lorentz 異常項 $L_{\mu\nu}^{\mathrm{p\ cov}}$ との関係式

$$E_\nu^{\mathrm{p\ cov}} = -D^\mu L_{\mu\nu}^{\mathrm{p\ cov}} \tag{11.104}$$

が得られる．

11.4　共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl

共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルとの関係式

ここで，1 パラメータ t を持つ vielbein ${e_a}^\mu(t) = {e_a}^\mu(x,t)$ を導入する．これはもとの vielbein ${e_a}^\mu(x)$ と平坦時空の vielbein δ_a^μ を結びつける：

$$
{e_a}^\mu(x,0) = \delta_a^\mu, \tag{11.105}
$$

$$
{e_a}^\mu(x,1) = {e_a}^\mu(x). \tag{11.106}
$$

例えば，これを満たすものとして ${e_a}^\mu(t) = \delta_a^\mu + t({e_a}^\mu(x) - \delta_a^\mu)$ や ${e_a}^\mu(t) = {(e^{tH})_a}^\mu$ が考えられる．ただし，行列 H は ${H_a}^\mu = {(\ln e)_a}^\mu$ を満たす．t でパラメータ化された有効作用 W_t

$$
W_t = W[{e_a}^\mu(t)] \tag{11.107}
$$

を定義する．これは $t=1$ でもとの有効作用 $W[{e_a}^\mu]$ になる．W_t を用いると有効作用 $W[{e_a}^\mu]$ は

$$
W[{e_a}^\mu] = \int_0^1 dt \frac{\partial W_t}{\partial t} + W_{t=0} \tag{11.108}
$$

と表される．W_t は t に ${e_a}^\mu(t)$ を通してだけ依存するから

$$
W[{e_a}^\mu] = \int_0^1 dt \int dx \, \frac{\delta W_t}{\delta {e_a}^\mu(x,t)} \frac{\partial {e_a}^\mu(x,t)}{\partial t} \tag{11.109}
$$

が得られる．ただし，$W_{t=0}$ の項は ${e_a}^\mu$ に関して定数であるため落とした．定義 (9.16)

$$
\langle e{T^a}_\mu(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta {e_a}^\mu(x)} W[{e_b}^\nu]. \tag{9.16}
$$

を用いると (11.109) は

$$
W[{e_a}^\mu] = \int_0^1 dt \int dx \langle e{T^a}_\mu \rangle^t \frac{\partial {e_a}^\mu(t)}{\partial t} \tag{11.110}
$$

と書ける．ただし，

$$
\langle e{T^a}_\mu \rangle^t = \langle e{T^a}_\mu \rangle [{e_b}^\nu(t)] \tag{11.111}
$$

を用いた．正則化された有効作用 $W_{\mathrm{reg}}[{e_a}^\mu]$ を構成するために共変的エネルギー運動量テンソル $\langle e{T^a}_\mu \rangle^t_{\mathrm{cov}} = \langle e{T^a}_\mu \rangle_{\mathrm{cov}}[{e_b}^\nu(t)]$ を (11.110) の右辺の $\langle e{T^a}_\mu \rangle^t$ に代入する：

$$
W_{\mathrm{reg}}[{e_a}^\mu] = \int_0^1 dt \int dx \langle e{T^a}_\mu \rangle^t_{\mathrm{cov}} \frac{\partial {e_a}^\mu(t)}{\partial t}. \tag{11.112}
$$

この正則化された有効作用 (11.112) から整合的エネルギー運動量テンソルが得られる．(11.112) の ${e_a}^\mu$ に関する変分から以下の共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソ

ルとの関係式を得る [26]：

$$
\begin{aligned}
&\int dx\langle eT^a{}_\mu\rangle_{\rm cons}\delta e_a{}^\mu \\
&=\int_0^1 dt\int dx\langle eT^a{}_\mu\rangle^t_{\rm cov}\frac{\partial}{\partial t}\delta e_a{}^\mu(t)+\int_0^1 dt\int dx\int dx'\frac{\delta\langle eT^a{}_\mu\rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)}\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)\frac{\partial e_a{}^\mu(t)}{\partial t} \\
&=\int dx\langle eT^a{}_\mu\rangle_{\rm cov}\delta e_a{}^\mu \\
&\qquad +\int_0^1 dt\int dx\int dx'\left\{\frac{\delta\langle eT^a{}_\mu\rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)}-\frac{\delta\langle e'T^{b'}{}_{\nu'}\rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu(t)}\right\}\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)\frac{\partial e_a{}^\mu(t)}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{11.113}
$$

ただし，2 行目の第 1 項に部分積分を適用し，$\langle eT^a{}_\mu\rangle^t_{\rm cov}$ は t に $e_a{}^\mu(t)$ を通してだけ依存することを用いた．(11.113) のプライムが付いた添え字はそれらが点 x' におけるものであることを示す：

$$\langle e'T^{b'}{}_{\nu'}\rangle=\langle e(x')T^b{}_\nu(x')\rangle,\quad e_{b'}{}^{\nu'}(t)=e_b{}^\nu(x',t). \tag{11.114}$$

(11.113) に共変的エネルギー運動量テンソルの “functional curl” が現れていることは重要である．次に述べるように functional curl は異常項が現れないときだけ消える．もし異常項が現れないなら，正則化された有効作用は一般座標変換と local Lorentz 変換のもとで不変である．この場合は整合的エネルギー運動量テンソルが共変的になり共変的エネルギー運動量テンソルとなる．したがって，共変的エネルギー運動量テンソルが積分可能条件を満たす．すなわち，functional curl が消える．逆に，共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl がゼロならば，(11.113) より整合的エネルギー運動量テンソルが共変的エネルギー運動量テンソルに一致することがわかる．したがって，共変的重力異常項と整合的重力異常項は一致する．これらの異常項に対するダイアグラムの方法では，これらの異常項の leading term は $2n$ 次元で Bose 対称性因子 $1/(n+1)$ だけ異なることが知られている．これが先に述べた共変的重力異常項と整合的重力異常項が一致するということと矛盾しないためには，これら両方の異常項がゼロでなければならない．したがって，functional curl が消えている場合というのは異常項が現れない場合であるということがわかる．

共変的重力異常項と整合的重力異常項との関係式は (11.113) よりただちに得られる．例えば，パラメトリゼーションとして $e_a{}^\mu(t)=\delta^\mu_a+t(e_a{}^\mu(x)-\delta^\mu_a)$ を用いると (11.113) は

$$\langle eT^a{}_\mu\rangle_{\rm cons}=\langle eT^a{}_\mu\rangle_{\rm cov}+\int_0^1 dt\int dx' t(e_{b'}{}^{\nu'}-\delta^{\nu'}_{b'})\left\{\frac{\delta\langle e'T^{b'}{}_{\nu'}\rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu(t)}-\frac{\delta\langle eT^a{}_\mu\rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)}\right\} \tag{11.115}$$

となる．両辺の共変微分をとると共変的 Einstein 異常項と整合的 Einstein 異常項との関係式を得る：

$$D^\mu\langle eT^a{}_\mu\rangle_{\rm cons}=D^\mu\langle eT^a{}_\mu\rangle_{\rm cov}+D^\mu\int_0^1 dt\int dx' t(e_{b'}{}^{\nu'}-\delta^{\nu'}_{b'})\left\{\frac{\delta\langle e'T^{b'}{}_{\nu'}\rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu(t)}-\frac{\delta\langle eT^a{}_\mu\rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)}\right\}. \tag{11.116}$$

同様にして共変的 Lorentz 異常項と整合的 Lorentz 異常項との関係式も得られる．

共変的 Lorentz 異常項を生じない共変的エネルギー運動量テンソルによる有効作用の定義

(11.112) で共変的エネルギー運動量テンソルを用いて正則化された有効作用を定義した：

$$W_{\rm reg} = \int_0^1 dt \int dx \langle eT^a{}_\mu \rangle^t_{\rm cov} \frac{\partial e_a{}^\mu(t)}{\partial t} \quad . \tag{11.112}$$

この式の右辺の $\langle eT^a{}_\mu \rangle_{\rm cov}$ に共変的 Lorentz 異常項を生じない $\langle eT^a{}_\mu \rangle^{\rm pE}_{\rm cov}$ (11.66)

$$\langle eT_{\mu\nu} \rangle^{\rm pE}_{\rm cov} = \langle eT_{\mu\nu} \rangle_{\rm cov} - \langle eT_{[\mu\nu]} \rangle_{\rm cov} \tag{11.66}$$

を用い，新しい有効作用 $W_{\rm reg'}$

$$W_{\rm reg'} \equiv \int_0^1 dt \int dx \langle eT^a{}_\mu \rangle^{{\rm pE}^{(t)}}_{\rm cov} \frac{\partial e_a{}^\mu(t)}{\partial t} \tag{11.117}$$

を構成する．この式の両辺の local Lorentz 変換 $\delta_{\rm lL} e_a{}^\mu$ をとると，

$$\begin{aligned}\int dx \langle eT^a{}_\mu \rangle_{\rm cons'} \delta_{\rm lL} e_a{}^\mu = & \int dx \langle eT^a{}_\mu \rangle^{\rm pE}_{\rm cov} \delta_{\rm lL} e_a{}^\mu \\ & + \int_0^1 dt \int dx dx' \left(\frac{\delta \langle e' T^{b'}{}_{\nu'} \rangle^{{\rm pE}^{(t)}}_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu(t)} - \frac{\delta \langle eT^a{}_\mu \rangle^{{\rm pE}^{(t)}}_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)} \right) \frac{\partial e_{b'}{}^{\nu'}(t)}{\partial t} \delta_{\rm lL} e_a{}^\mu(t)\end{aligned} \tag{11.118}$$

が得られる．ただし，

$$\langle eT^a{}_\mu \rangle_{\rm cons'} \equiv \frac{\delta W_{\rm reg'}}{\delta e_a{}^\mu} \tag{11.119}$$

とした．後の計算では，$\langle eT_{\mu\nu} \rangle^{\rm pE}_{\rm cov}$ の functional curl を $\langle eT_{\mu\nu} \rangle_{\rm cov}$ の部分と $L^{\rm cov}_{\mu\nu}$ の部分とにわけ

$$\frac{\delta \langle e' T^{b'}{}_{\nu'} \rangle^{{\rm pE}^{(t)}}_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu(t)} - \frac{\delta \langle eT^a{}_\mu \rangle^{{\rm pE}^{(t)}}_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)} = \frac{\delta \langle e' T^{b'}{}_{\nu'} \rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu(t)} - \frac{\delta \langle eT^a{}_\mu \rangle^t_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)} - \left(\frac{\delta L^{b'(t)}{}_{\nu'\,{\rm cov}}}{\delta e_a{}^\mu(t)} - \frac{\delta L^{a(t)}{}_{\mu\,{\rm cov}}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)} \right) \tag{11.120}$$

としてそれぞれの functional curl の計算をするのが便利である．

(11.118) を整理すると

$$\int dx \lambda^{ab} L^{\rm cons'}_{ab} = \int_0^1 dt \int dx dx' \left(\frac{\delta \langle e' T^{b'}{}_{\nu'} \rangle^{{\rm pE}^{(t)}}_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu(t)} - \frac{\delta \langle eT^a{}_\mu \rangle^{{\rm pE}^{(t)}}_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)} \right) \frac{\partial e_{b'}{}^{\nu'}(t)}{\partial t} \delta_{\rm lL} e_a{}^\mu(t) \neq 0 \tag{11.121}$$

となる．ただし，

$$L^{\rm cons'}_{ab} \equiv \langle eT_{[ab]} \rangle_{\rm cons'} \tag{11.122}$$

とした．このように，共変的 Lorentz 異常項を生じない共変的エネルギー運動量テンソルで有効作用を構成しても，必ずしも整合的 Lorentz 異常項を生じない有効作用とはなっていない．次節からは (11.121) の共変的エネルギー運動量テンソルの functional crul を具体的に 2 次元でヒートカーネルの方法を用いることにより評価する．

11.5　共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl の具体形

共変的エネルギー運動量テンソル (11.35)

$$\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\phi}_n^L+\frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^{R\dagger}\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\phi}_n^L\right)\right]e^{-s\lambda_n^2} \tag{11.35}$$

は

$$\begin{aligned}\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{{\rm all}\,n}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^\dagger(1+\gamma_5)\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\phi}_n+\frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^\dagger(1+\gamma_5)\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\phi}_n\right)\right]e^{-s\lambda_n^2}\\&=\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}^{\text{non-chiral}}+\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}^5\end{aligned} \tag{11.123}$$

と変形できる．ただし，(11.27)

$$\tilde{\phi}_n^L\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\phi}_n-\tilde{\phi}_{-n}\right)\ ,\qquad\tilde{\phi}_n^R\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{\phi}_n+\tilde{\phi}_{-n}\right) \tag{11.27}$$

と

$$\lambda_n=-\lambda_{-n}, \tag{11.124}$$

$$\tilde{\phi}_n=\gamma_5\tilde{\phi}_{-n} \tag{11.125}$$

を用い，

$$\begin{aligned}\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}^{\text{non-chiral}}&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{{\rm all}\,n}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\phi}_n+\frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\phi}_n\right)\right]e^{-s\lambda_n^2}\\\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}^5&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\sum_{{\rm all}\,n}\frac{1}{\lambda_n}\left[\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5\gamma^a\overleftrightarrow{D_\mu}\tilde{\phi}_n+\frac{1}{2}D_\rho\left(\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5\gamma^{\rho a}{}_\mu\tilde{\phi}_n\right)\right]e^{-s\lambda_n^2}\end{aligned} \tag{11.126}$$

とした．

functional curl を求めるには

$$\langle\delta S\rangle=\int dx\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}\delta e_a{}^\mu(x) \tag{11.127}$$

を用いるのが便利である．$\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}$ の $\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}^5$ の部分だけを考え（$\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}^{\text{non-chiral}}$ の functional curl への寄与はないことがわかる），

$$\langle\delta S\rangle_5=\int dx\langle eT^a{}_\mu(x)\rangle_{\rm cov}^5\delta e_a{}^\mu(x) \tag{11.128}$$

とおく．これに (11.126) を用いると

$$\langle\delta S\rangle_5=\lim_{s\to 0}\frac{1}{4}\int dx\sum_{{\rm all}\,n}\frac{1}{\lambda_n}\tilde{\phi}_n^\dagger\gamma_5\delta\overleftrightarrow{\not{D}}\tilde{\phi}_ne^{-s\lambda_n^2} \tag{11.129}$$

が得られる．ただし，

$$\delta \not{D} = \delta e_a{}^\mu \gamma^a D_\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu \delta \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \frac{1}{4}\gamma^\mu \gamma^{ij}\delta\omega_{ij\mu},$$
$$\delta \overleftarrow{\not{D}} = \overleftarrow{D}_\mu \delta e_a{}^\mu \gamma^a - \frac{1}{2}\gamma^\mu \delta \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma^{ij}\gamma^\mu \delta\omega_{ij\mu} \tag{11.130}$$

を用いた．ここで，(11.129) に

$$\int dx \tilde{\phi}_n^\dagger \gamma_5 \delta \overleftarrow{\not{D}} \tilde{\phi}_n = -\int dx \lambda_n \tilde{\phi}_n^\dagger \gamma_5 \delta \not{D} \tilde{\phi}_n \tag{11.131}$$

を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\langle \delta S \rangle_5 &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\int dx \sum_{\mathrm{all}\, n}\frac{1}{\lambda_n}\tilde{\phi}_n^\dagger \gamma_5 \delta \not{D} \tilde{\phi}_n e^{-s\lambda_n^2} \\ &= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\frac{1}{2}\int dx \sum_n \mathrm{tr}\frac{1}{\lambda_n}\gamma_5 \delta \not{D} \tilde{\phi}_n(x)\tilde{\phi}_n^\dagger(x') e^{-s\lambda_n^2} \\ &= \lim_{s\to 0}\lim_{x'\to x}\frac{1}{2}\int dx\, \mathrm{tr}\gamma_5 \delta \not{D} \frac{1}{\not{D}} e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x') \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\gamma_5 \delta \not{D} \frac{1}{\not{D}} e^{-s\not{D}^2}\end{aligned} \tag{11.132}$$

が得られる．ただし，2 行目で

$$\not{D}\tilde{\phi}_n = \lambda_n \tilde{\phi}_n \tag{11.133}$$

3 行目で，完全性の条件

$$\sum_n \tilde{\phi}_n(x)\tilde{\phi}_n^\dagger(x') = \delta(x-x') \tag{11.134}$$

を用いた．また，Tr はスピノールの添え字に関するトレースに加えて，関数空間に関するトレースも含む．functional curl は

$$\delta_1 \langle \delta_2 S \rangle_5 - \delta_2 \langle \delta_1 S \rangle_5 \tag{11.135}$$

を計算することにより得られる．この計算は第 6 章の共変的カレントの functional curl のときと同様にして

$$\delta_1 \langle \delta_2 S \rangle_5 - \delta_2 \langle \delta_1 S \rangle_5 = -\lim_{s\to 0} s\mathrm{Tr}\gamma_5 \delta_2 \not{D} \int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)s\not{D}^2}\delta_1 \not{D} e^{-\alpha s \not{D}^2} \tag{11.136}$$

と得られる．

11.6 ヒートカーネルの方法による共変的エネルギー運動量テンソルの funcitonal curl の 2 次元での評価

functional curl の 2 次元における形式的な具体形

2 次元での共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl の具体形を考える．付録 (I.9) より一般次元で

$$\delta \not{D} = \delta e_a{}^\mu \gamma^a D_\mu + \frac{1}{2}\gamma^a (D_\mu \delta e_a{}^\mu) - \frac{1}{4}\gamma^a{}_\mu{}^\lambda (D_\lambda \delta e_a{}^\mu) \tag{11.137}$$

である．2 次元では (11.137) は

$$\delta \not{D} = \delta e_a{}^{\mu} \gamma^a D_\mu + \frac{1}{2} \gamma^a (D_\mu \delta e_a{}^{\mu}) \tag{11.138}$$

である．これを (11.136) に用いると共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl は 2 次元で

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta \langle e' T^{b'}{}_{\nu'} \rangle_{\rm cov}}{\delta e_a{}^{\mu}} - \frac{\delta \langle e T^{a}{}_{\mu} \rangle_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}} \\
&= -\frac{1}{4} \lim_{s\to 0} s \int_0^1 d\alpha \mathrm{tr} \gamma_5 \\
&\quad \times \Big[\gamma^{b'} \Big[D_{\nu'} e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2} \delta(x'-x) \Big] \gamma^a D_\mu e^{-\alpha s \not{D}^2} \delta(x-x') \\
&\quad - \gamma^{b'} \Big[D_{\nu'} e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2} \delta(x'-x) \overleftarrow{D}_\mu \Big] \gamma^a e^{-\alpha s \not{D}^2} \delta(x-x') \\
&\quad - \gamma^{b'} \Big[e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2} \delta(x'-x) \Big] \gamma^a \Big[D_\mu e^{-\alpha s \not{D}^2} \delta(x-x') \overleftarrow{D}_{\nu'} \Big] \\
&\quad + \gamma^{b'} \Big[e^{-(1-\alpha)s\not{D}'^2} \delta(x'-x) \overleftarrow{D}_\mu \Big] \gamma^a \Big[e^{-\alpha s \not{D}^2} \delta(x-x') \overleftarrow{D}_{\nu'} \Big] \Big]
\end{aligned} \tag{11.139}$$

と得られる．

ヒートカーネルの方法による functional curl の評価

(11.139) はヒートカーネル $K(x,x';s)$ を用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta \langle e' T^{b'}{}_{\nu'} \rangle_{\rm cov}}{\delta e_a{}^{\mu}} - \frac{\delta \langle e T^{a}{}_{\mu} \rangle_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}} \\
&= -\frac{1}{4} \lim_{s\to 0} \int_0^1 d\alpha \mathrm{tr} \gamma_5 \\
&\quad \times \Big[\gamma^{b'} \Big[D_{\nu'} K(x',x;(1-\alpha)s) \Big] \gamma^a D_\mu K(x,x';\alpha s) \\
&\quad - \gamma^{b'} \Big[D_{\nu'} K(x',x;(1-\alpha)s) \overleftarrow{D}_\mu \Big] \gamma^a K(x,x';\alpha s) \\
&\quad - \gamma^{b'} K(x',x;(1-\alpha)s) \gamma^a \Big[D_\mu K(x,x';\alpha s) \overleftarrow{D}_{\nu'} \Big] \\
&\quad + \gamma^{b'} \Big[K(x',x;(1-\alpha)s) \overleftarrow{D}_\mu \Big] \gamma^a \Big[K(x,x';\alpha s) \overleftarrow{D}_{\nu'} \Big] \Big]
\end{aligned} \tag{11.140}$$

と表される．ただし，$K(x,x';s)$ は

$$K(x,x';s) = e^{-s\not{D}^2} \delta(x-x') \tag{11.141}$$

と定義される．$K(x,x';s)$ の 2 次元での展開を

$$K(x,x';s) = \frac{\sqrt{D(x,x')}}{4\pi s} e^{\sigma(x,x')/2s} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,x')(-s)^k \tag{11.142}$$

とする．ただし，$\sigma(x,x')$ は geodetic bi-scalar であり，$D=\det D_{.\mu\nu'}$，$D_{.\mu\nu'}=-\sigma_{.\mu\nu'}$ である．$_{.\mu}$ は x^μ による共変微分を，$_{.\nu'}$ は x'^ν による共変微分を表す．ここで，

$$A(s)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x,x')(-s)^k\ \ , \tag{11.143}$$

$$\tilde{A}(s)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x',x)(-s)^k \tag{11.144}$$

とおいてヒートカーネルの展開 (11.142) を (11.140) に用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\langle e'T^{b'}{}_{\nu'}\rangle_{\rm cov}}{\delta e_a{}^\mu}-\frac{\delta\langle eT^a{}_\mu\rangle_{\rm cov}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}}\\
&=-\frac{1}{16\pi}\lim_{s\to0}\int_0^1 d\alpha\frac{D}{4\pi as}e^{\sigma/2as}{\rm tr}\gamma_5\gamma^{b'}\\
&\quad\times\left[2\left(\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}(\sqrt{D})_{.\nu'}}{D}-\frac{(\sqrt{D})_{.\mu\nu'}}{\sqrt{D}}\right)\tilde{A}\gamma^aA\right. && (11.145)\\
&\qquad+\tilde{A}_{.\nu'}\gamma^aA_{.\mu}+\tilde{A}_{.\mu}\gamma^aA_{.\nu'}-\tilde{A}_{.\nu'\mu}\gamma^aA-\tilde{A}\gamma^aA_{.\mu\nu'} && (11.146)\\
&\qquad+\frac{1}{2s}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\sigma_{.\nu'}\left(\tilde{A}\gamma^aA_{.\mu}+\tilde{A}_{.\mu}\gamma^aA\right) && (11.147)\\
&\qquad+\frac{1}{2s}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\sigma_{.\mu}\left(\tilde{A}\gamma^aA_{.\nu'}+\tilde{A}_{.\nu'}\gamma^aA\right) && (11.148)\\
&\qquad-\frac{1}{2as}\sigma_{.\mu\nu'}\tilde{A}\gamma^aA && (11.149)\\
&\qquad\left.+\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}\right)\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}\tilde{A}\gamma^aA\right] && (11.150)
\end{aligned}$$

が得られる．ただし，

$$a=\alpha(1-\alpha) \tag{11.151}$$

とした．

(11.145) に含まれる項

$$2\left(\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}(\sqrt{D})_{.\nu'}}{D}-\frac{(\sqrt{D})_{.\mu\nu'}}{\sqrt{D}}\right)\lim_{s\to0}\frac{D}{4\pi as}e^{\sigma/2as}{\rm tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^aA \tag{11.152}$$

を考える．これに A と $\tilde{A}$ の展開 (11.143)，(11.144) を代入すると

$$2\left(\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}(\sqrt{D})_{.\nu'}}{D}-\frac{(\sqrt{D})_{.\mu\nu'}}{\sqrt{D}}\right)\lim_{s\to0}\sum_{k,l}\left(-(1-\alpha)s\right)^k(-\alpha s)^l\frac{D}{4\pi as}e^{\sigma/2as}{\rm tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_k(x',x)\gamma^aa_l(x,x') \tag{11.153}$$

となる．ここで，

$$\frac{1}{2\pi s}De^{\sigma/s}=\sqrt{g}\delta(x-x')+O(s) \tag{11.154}$$

が成り立つ．ただし $g=\det g_{\mu\nu}$ である．(11.154) を示す．計量の signature を $\mathrm{sgn} g_{\mu\nu}=(+,+)$ にとり，(11.154) の左辺に点 x' における任意のスカラー関数 $f(x')$ をかけ x' で積分する：

$$\frac{1}{2\pi s}\int d^2x' De^{-\sigma/s}f(x'). \tag{11.155}$$

この式に

$$\sigma=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sigma_{.}^{\ \mu}\sigma_{.}^{\ \nu} \tag{11.156}$$

を用い，normal coordinate へ変数変換

$$x'^{\mu}\to\bar{x}'^{\mu}=\sigma_{.}^{\ \mu} \tag{11.157}$$

をする．積分測度は

$$d^2\bar{x}'=\det\left(\frac{\partial\bar{x}'}{\partial x'}\right)d^2x' \tag{11.158}$$

と変換する．

$$\frac{\partial\bar{x}'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}=-g_{\mu\lambda}D_{\lambda\nu'} \tag{11.159}$$

だから

$$\det\left(\frac{\partial\bar{x}'}{\partial x'}\right)=\frac{D}{g} \tag{11.160}$$

であることがわかる．これと (11.158) より

$$Dd^2x'=gd^2\bar{x}' \tag{11.161}$$

が得られる．これらを用いると (11.155) は

$$\frac{g}{2\pi s}\int d^2\bar{x}'e^{-g_{\mu\nu}\bar{x}'^{\mu}\bar{x}'^{\nu}/2s}f\left(x'(\bar{x}')\right) \tag{11.162}$$

となる．(11.162) で

$$F(\bar{x}')=f(x') \tag{11.163}$$

とし，変数変換

$$\bar{x}'^{\mu}=\sqrt{s}\xi^{\mu} \tag{11.164}$$

をすると

$$\begin{aligned}
&\frac{g}{2\pi}\int d^2\xi e^{-g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}/2}F(\sqrt{s}\xi)\\
&=\frac{g}{2\pi}\int d^2\xi e^{-g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}/2}\left\{F(0)+\sqrt{s}\xi^{\alpha}F_{,\bar{\alpha}}(0)+\frac{1}{2}s\xi^{\alpha}\xi^{\beta}F_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(0)+\cdots\right\}\\
&=\sqrt{g}F(0)+O(s)\\
&=\sqrt{g}f(x)+O(s)
\end{aligned} \tag{11.165}$$

が得られる．ただし，

$$F_{,\bar{\alpha}}(0) = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}'^{\alpha}}(0) \tag{11.166}$$

$$F_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}'^{\alpha}\bar{x}'^{\beta}}(0) \tag{11.167}$$

であり，2 行目で

$$\frac{\sqrt{g}}{2\pi}\int d^2\xi(1,\xi^{\alpha})e^{-g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}/2} = (1,0), \tag{11.168}$$

3 行目で

$$F(0) = f(x) \tag{11.169}$$

を用いた．以上をまとめると

$$\frac{1}{2\pi s}\int d^2x' De^{-\sigma/s}f(x') = \sqrt{g}f(x) + O(s). \tag{11.170}$$

この式の右辺にデルタ関数の定義

$$f(x) = \int d^2x'\delta(x-x')f(x') \tag{11.171}$$

を用いると

$$\frac{1}{2\pi s}\int d^2x' De^{-\sigma/s}f(x') = \sqrt{g}\int d^2x'\delta(x-x')f(x') + O(s) \tag{11.172}$$

となる．この式から $f(x')$ をはずし，計量の signature を $\mathrm{sgn}g_{\mu\nu} = (-,-)$ に戻すと (11.154) が得られる．(11.154) を (11.153) に用いると $s \to 0$ の極限で $O(s)$ の項は消え，$k = l = 0$ の項だけが残り

$$\begin{aligned}(11.153) &= 2\sqrt{g}\left(\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}(\sqrt{D})_{.\nu'}}{D} - \frac{(\sqrt{D})_{.\mu\nu'}}{\sqrt{D}}\right)\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') \\ &= -\frac{2}{3}i\sqrt{g}\varepsilon^{b'a}R_{\mu\nu'}\delta(x-x') \end{aligned}\tag{11.173}$$

が得られる．ただし，

$$\begin{aligned}&\left[(\sqrt{D})_{.\mu}\right] = 0, \\ &\left[\frac{(\sqrt{D})_{.\mu\nu'}}{\sqrt{D}}\right] = -\frac{1}{6}R_{\mu\nu}, \\ &[a_0(x',x)] = [a_0(x,x')] = \mathbf{1}, \\ &\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^b\gamma^a = -2i\varepsilon^{ba}\end{aligned}\tag{11.174}$$

を用いた．[ ] は Synge の記号で，例えば，$[f(x',x)] = [f(x,x')] = f(x,x)$ である．以上をまとめると

$$2\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi as}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\left(\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}(\sqrt{D})_{.\nu'}}{D} - \frac{(\sqrt{D})_{.\mu\nu'}}{\sqrt{D}}\right)\tilde{A}\gamma^a A = -\frac{2}{3}i\sqrt{g}\varepsilon^{b'a}R_{\mu\nu'}\delta(x-x'). \tag{11.175}$$

(11.146) に含まれる項

$$\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi as}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\left(\tilde{A}_{.\nu'}\gamma^a A_{.\mu}+\tilde{A}_{.\mu}\gamma^a A_{.\nu'}-\tilde{A}_{.\nu'\mu}\gamma^a A-\tilde{A}\gamma^a A_{.\mu\nu'}\right) \tag{11.176}$$

を考える．これに A と $\tilde{A}$ の展開 (11.143)，(11.144) を代入すると

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\sum_{k,l}(-(1-\alpha)s)^k(-\alpha s)^l\frac{D}{4\pi as}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}(a_k(x',x)_{.\nu'}\gamma^a a_l(x,x')_{.\mu}+a_k(x',x)_{.\mu}\gamma^a a_l(x,x')_{.\nu'}\\ -a_k(x',x)_{.\nu'\mu}\gamma^a a_l(x,x')-a_k(x',x)\gamma^a a_l(x,x')_{.\mu\nu'})\end{aligned} \tag{11.177}$$

となる．これに (11.154)

$$\frac{1}{2\pi s}De^{\sigma/s}=\sqrt{g}\delta(x-x')+O(s) \tag{11.154}$$

を用いると $s\to 0$ の極限で $O(s)$ の項は消え，$k=l=0$ の項だけが残り

$$\begin{aligned}(11.177)&=\sqrt{g}\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}(a_0(x',x)_{.\nu'}\gamma^a a_0(x,x')_{.\mu}+a_0(x',x)_{.\mu}\gamma^a a_0(x,x')_{.\nu'}\\ &\qquad -a_0(x',x)_{.\nu'\mu}\gamma^a a_0(x,x')-a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x')_{.\mu\nu'})\\ &=\frac{i}{2}\sqrt{g}\eta^{ab'}\varepsilon^{cd}R_{cd\mu\nu'}\delta(x-x')\end{aligned} \tag{11.178}$$

が得られる．ただし，

$$\begin{aligned}&[a_0(x,x')_{.\mu}]=[a_0(x,x')_{.\nu'}]=0,\\ &[a_0(x,x')]=[a_0(x',x)]=\mathbf{1},\\ &[a_0(x',x)_{.\nu'\mu}]=\frac{1}{8}R_{cd\nu\mu}\gamma^{cd},\\ &[a_0(x,x')_{.\mu\nu'}]=\frac{1}{8}R_{cd\mu\nu}\gamma^{cd}\end{aligned} \tag{11.179}$$

を用いた．以上をまとめると

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi as}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\left(\tilde{A}_{.\nu'}\gamma^a A_{.\mu}+\tilde{A}_{.\mu}\gamma^a A_{.\nu'}-\tilde{A}_{.\nu'\mu}\gamma^a A-\tilde{A}\gamma^a A_{.\mu\nu'}\right)\\ &=\frac{i}{2}\sqrt{g}\eta^{ab'}\varepsilon^{cd}R_{cd\mu\nu'}\delta(x-x').\end{aligned} \tag{11.180}$$

(11.147) に含まれる項

$$\frac{1}{2}\int_0^1 d\alpha\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi as^2}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\left(\tilde{A}\gamma^a A_{.\mu}+\tilde{A}_{.\mu}\gamma^a A\right) \tag{11.181}$$

を考える．この項は積分変数 α の変換 $\alpha\to 1-\alpha$ でキャンセルすることがわかる：

$$(11.181)=0. \tag{11.182}$$

(11.148) に含まれる項

$$\frac{1}{2}\int_0^1 d\alpha\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi as^2}\sigma_{.\mu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\left(\tilde{A}\gamma^a A_{.\nu'}+\tilde{A}_{.\nu'}\gamma^a A\right) \tag{11.183}$$

も前項 (11.181) と同様に積分変数 α の変換 $\alpha\to 1-\alpha$ でキャンセルすることがわかる：

$$(11.183)=0. \tag{11.184}$$

(11.149) に含まれる項

$$\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi(as)^2}\sigma_{.\mu\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^a A \tag{11.185}$$

を考える．これに A と $\tilde{A}$ の展開 (11.143)，(11.144) を代入すると

$$\lim_{s\to 0}\sum_{k,l}\left(-(1-\alpha)s\right)^k\left(-\alpha s\right)^l\frac{D}{8\pi(as)^2}\sigma_{.\mu\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_k(x',x)\gamma^a a_l(x,x') \tag{11.186}$$

となる．ここで，

$$\frac{D}{2\pi s^2}\sigma_{.\mu\nu'}e^{\sigma/s}=-\frac{1}{s}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')+\frac{1}{6}\sqrt{g}R_{\mu\nu'}\delta(x-x')+\frac{1}{2}\sqrt{g}\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}+O(s) \tag{11.187}$$

が成り立つ．ただし，任意のベクトル関数 $V^{\nu'}(x')$ に対して

$$\int d^2x'\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}V^{\nu'}(x')=g_{\mu\nu}\Box V^\nu \tag{11.188}$$

であり，$\Box V^\nu=g^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta V^\nu$ である．(11.187) を示す．計量の signature を $\mathrm{sgn}g_{\mu\nu}=(+,+)$ にとり，(11.187) の左辺に $V^{\nu'}(x')$ をかけ，x' で積分する：

$$\frac{1}{2\pi s^2}\int dx'^2 D\sigma_{.\mu\nu'}e^{-\sigma/s}V^{\nu'}(x'). \tag{11.189}$$

この式に

$$\sigma=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sigma_{.}^{\ \mu}\sigma_{.}^{\ \nu} \tag{11.190}$$

を用い，normal coordinate へ変数変換

$$x'^\mu\to\bar{x}'^\mu=\sigma_{.}^{\ \mu} \tag{11.191}$$

をすると

$$\frac{g}{2\pi s^2}\int d^2\bar{x}'^2\sigma_{.\mu\nu'}\left(x,x'(\bar{x}')\right)e^{-g_{\mu\nu}\bar{x}'^\mu\bar{x}'^\nu/2s}V^{\nu'}\left(x'(\bar{x}')\right) \tag{11.192}$$

となる．(11.192) で

$$F(\bar{x}') = \sigma_{.\mu\nu'}\left(x, x'(\bar{x}')\right) V^{\nu'}\left(x'(\bar{x}')\right) \tag{11.193}$$

とし，変数変換

$$\bar{x}'^{\mu} = \sqrt{s}\xi^{\mu} \tag{11.194}$$

をすると

$$\begin{aligned}
&\frac{g}{2\pi s}\int d^2\xi e^{-g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu/2}F(\sqrt{s}\xi) \\
&= \frac{g}{2\pi s}\int d^2\xi e^{-g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu/2}\left\{F(0) + \sqrt{s}\xi^\alpha F_{,\bar{\alpha}}(0) + \frac{1}{2}s\xi^\alpha\xi^\beta F_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(0) + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{s}\sqrt{g}F(0) + \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\alpha\beta}F_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(0) + O(s)
\end{aligned} \tag{11.195}$$

が得られる．ただし，2 行目で

$$\frac{\sqrt{g}}{2\pi}\int d^2\xi(1, \xi^\alpha, \xi^\alpha\xi^\beta, \xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma)e^{-g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu/2} = (1, 0, g^{\alpha\beta}, 0) \tag{11.196}$$

を用いた．この式に

$$F(0) = -V_\mu(x), \tag{11.197}$$

$$F_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(0) = \frac{1}{3}R_{\mu(\alpha\beta)\nu}V^\nu(x) - V_{\mu.(\alpha\beta)}(x) \tag{11.198}$$

を用いると (11.195) は

$$(11.195) = -\frac{1}{s}\sqrt{g}V_\mu(x) - \frac{1}{6}\sqrt{g}R_{\mu\nu}V^\nu(x) - \frac{1}{2}\sqrt{g}\Box V_\mu(x) + O(s) \tag{11.199}$$

となる．以上をまとめると

$$\frac{1}{2\pi s^2}\int dx'^2 D\sigma_{.\mu\nu'}e^{-\sigma/2s}V^{\nu'}(x') = -\frac{1}{s}\sqrt{g}V_\mu(x) - \frac{1}{6}\sqrt{g}R_{\mu\nu}V^\nu(x) - \frac{1}{2}\sqrt{g}\Box V_\mu(x) + O(s). \tag{11.200}$$

この式の右辺にデルタ関数の定義

$$V^\nu(x) = \int d^2x'\delta(x - x')V^{\nu'}(x') \tag{11.201}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi s^2}\int dx'^2 D\sigma_{.\mu\nu'}e^{-\sigma/s}V^{\nu'}(x') \\
&= -\frac{1}{s}\sqrt{g}g_{\mu\nu}\int d^2x'\delta(x - x')V^{\nu'}(x') - \frac{1}{6}\sqrt{g}R_{\mu\nu}\int d^2x'\delta(x - x')V^{\nu'}(x') \\
&\qquad - \frac{1}{2}\sqrt{g}\int d^2x'\left[\Box\delta(x - x')\right]_{\mu\nu'}V^{\nu'}(x') + O(s).
\end{aligned} \tag{11.202}$$

となる．ただし，

$$\int d^2x' \left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} V^{\nu'}(x') = g_{\mu\rho}[\Box]^{\rho}{}_{\nu} \int d^2x'\delta(x-x')V^{\nu'}(x') = g_{\mu\nu}\Box V^{\nu}(x) \quad (11.203)$$

とした．(11.202) から $V^{\nu'}(x')$ をはずし，計量の signature を $\mathrm{sgn} g_{\mu\nu} = (-,-)$ に戻すと，(11.187) が得られる．(11.187) を (11.186) に用いると $s \to 0$ の極限で $O(s)$ の項は消え，$(k,l) = (0,0),(0,1),(1,0)$ の項だけが残り

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi(as)^2}\sigma_{.\mu\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^a A \\
&= \left\{-\frac{1}{2as}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x') + \frac{1}{6}\sqrt{g}R_{\mu\nu'}\delta(x-x') + \frac{1}{2}\sqrt{g}\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}\right\}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') \\
&+ \frac{1}{2(1-\alpha)}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_1(x,x') + \frac{1}{2\alpha}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_1(x',x)\gamma^a a_0(x,x')
\end{aligned} \quad (11.204)$$

が得られる．

(11.150) に含まれる項

$$\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi as^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}\right)\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^a A = (4a-1)\lim_{s\to 0}\frac{D}{16\pi(as)^3}\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^a A \quad (11.205)$$

を考える．これに A と $\tilde{A}$ の展開 (11.143)，(11.144) を代入すると

$$(4a-1)\lim_{s\to 0}\sum_{k,l}\left(-(1-\alpha)s\right)^k(-\alpha s)^l\frac{D}{16\pi(as)^3}\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_k(x',x)\gamma^a a_l(x,x') \quad (11.206)$$

となる．ここで，

$$\frac{D}{2\pi s^3}\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/s} = \frac{1}{s}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x') - \frac{1}{2}\sqrt{g}\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} - \sqrt{g}\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} + O(s) \quad (11.207)$$

が成り立つ．ただし，任意のベクトル関数 $V^{\nu'}(x')$ に対して

$$\int d^2x' \left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} V^{\nu'}(x') = g_{\mu\nu}\Box V^{\nu}, \quad (11.208)$$

$$\int d^2x' \left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} V^{\nu'}(x') = D_{(\mu}D_{\nu)}V^{\nu} \quad (11.209)$$

であり，$\Box V^{\nu} = g^{\alpha\beta}D_{\alpha}D_{\beta}V^{\nu}$ である．(11.207) を示す．計量の signature を $\mathrm{sgn} g_{\mu\nu} = (+,+)$ にとり，(11.207) の左辺に $V^{\nu'}(x')$ をかけ，x' で積分する：

$$\frac{1}{2\pi s^3}\int d^2x' D\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/s}V^{\nu'}(x'). \quad (11.210)$$

この式に

$$\sigma = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma_{.}{}^{\mu} \sigma_{.}{}^{\nu} \tag{11.211}$$

を用い，normal coordinate へ変数変換

$$x'^{\mu} \to \bar{x}'^{\mu} = \sigma_{.}{}^{\mu} \tag{11.212}$$

をすると

$$\frac{g}{2\pi s^3} g_{\mu\rho} \int d^2 \bar{x}' \bar{x'}^{\rho} \sigma_{.\nu'}\left(x, x'(\bar{x}')\right) e^{-g_{\mu\nu}\bar{x}'^{\mu}\bar{x}'^{\nu}/2s} V^{\nu'}\left(x'(\bar{x}')\right) \tag{11.213}$$

となる．(11.213) で

$$F(\bar{x}') = \sigma_{.\nu'}\left(x, x'(\bar{x}')\right) V^{\nu'}\left(x'(\bar{x}')\right) \tag{11.214}$$

とし，変数変換

$$\bar{x}'^{\mu} = \sqrt{s}\xi^{\mu} \tag{11.215}$$

をすると

$$\begin{aligned}
&\frac{g}{2\pi s\sqrt{s}} g_{\mu\rho} \int d^2\xi \xi^{\rho} e^{-g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}/2} F(\sqrt{s}\xi) \\
&= \frac{g}{2\pi s\sqrt{s}} g_{\mu\rho} \int d^2\xi \xi^{\rho} e^{-g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}/2} \left\{ F(0) + \sqrt{s}\xi^{\alpha} F_{,\bar{\alpha}}(0) + \frac{1}{2} s \xi^{\alpha}\xi^{\beta} F_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}(0) + \frac{1}{6} s\sqrt{s}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\xi^{\gamma} F_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}(0) + \cdots \right\} \\
&= \sqrt{g} F_{,\bar{\mu}}(0) \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\sqrt{g} g^{\beta\gamma} F_{,\bar{\mu}\bar{\beta}\bar{\gamma}}(0) + O(s)
\end{aligned} \tag{11.216}$$

が得られる．ただし，2 行目で

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{g}}{2\pi} \int d^2\xi e^{-g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}/2} (1, \xi^{\alpha}, \xi^{\alpha}\xi^{\beta}, \xi^{a}\xi^{\beta}\xi^{\gamma}, \xi^{a}\xi^{\beta}\xi^{\gamma}\xi^{\delta}, \xi^{a}\xi^{\beta}\xi^{\gamma}\xi^{\delta}\xi^{\eta}) \\
&\quad = (1, 0, g^{\alpha\beta}, 0, g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} + g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}, 0)
\end{aligned} \tag{11.217}$$

を用いた．この式に

$$\begin{aligned}
F_{,\bar{\mu}}(0) &= -V_{\mu}(x) \\
F_{,\bar{\mu}\bar{\beta}\bar{\gamma}}(0) &= -3V_{(\mu.\beta\gamma)}(x)
\end{aligned} \tag{11.218}$$

を用いると (11.216) は

$$(11.216) = -\sqrt{g} V_{\mu}(x) \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\sqrt{g}\Box V_{\mu}(x) - \sqrt{g} D_{(\mu} D_{\nu)} V^{\nu}(x) + O(s) \tag{11.219}$$

となる．以上をまとめると

$$\frac{1}{2\pi s^3} \int d^2x' D\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'} e^{\sigma/s} V^{\nu'}(x') = -\sqrt{g} V_{\mu}(x) \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\sqrt{g}\Box V_{\mu}(x) - \sqrt{g} D_{(\mu} D_{\nu)} V^{\nu}(x) + O(s). \tag{11.220}$$

この式の右辺にデルタ関数の定義

$$V^{\nu}(x) = \int d^2x' \delta(x - x') V^{\nu'}(x') \tag{11.221}$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi s^3}\int d^2x' D\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/s}V^{\nu'}(x') \\
&= -\frac{1}{s}\sqrt{g}g_{\mu\nu}\int d^2x'\delta(x-x')V^{\nu'}(x') \\
&\quad -\frac{1}{2}\sqrt{g}\int d^2x'\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}V^{\nu'}(x') - \sqrt{g}\int d^2x'\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}V^{\nu'}(x') + O(s)
\end{aligned}
\tag{11.222}
$$

となる．ただし，

$$
\begin{aligned}
&\int d^2x'\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}V^{\nu'}(x') = g_{\mu\nu}\Box V^{\nu}, \\
&\int d^2x'\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}V^{\nu'}(x') = \int d^2x'\left[D_{(\mu}D_{\rho)}\delta(x-x')\right]^{\rho}{}_{\nu'}V^{\nu'}(x') = D_{(\mu}D_{\nu)}V^{\nu}
\end{aligned}
\tag{11.223}
$$

とした．(11.222) から $V^{\nu'}(x')$ をはずし，計量の signature を $\mathrm{sgn}g_{\mu\nu} = (-,-)$ に戻すと，(11.207) が得られる．(11.207) を (11.206) に用いると $s \to 0$ の極限で $O(s)$ の項は消え，$(k,l) = (0,0),(0,1),(1,0)$ の項だけが残り

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi a s^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}\right)\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^a A \\
&= (4a-1)\left\{\frac{1}{2as}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2}\sqrt{g}\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} - \sqrt{g}\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}\right\}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') \\
&\quad -(4a-1)\frac{1}{2(1-\alpha)}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_1(x,x') \\
&\quad -(4a-1)\frac{1}{2\alpha}\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_1(x',x)\gamma^a a_0(x,x')
\end{aligned}
\tag{11.224}
$$

が得られる．

(11.149) と (11.150) に含まれる項

(11.204) と (11.224) を合わせると

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi(as)^2}\sigma_{.\mu\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^a A + \lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi a s^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}\right)\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^a A \\
&= \left\{2\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{6}\sqrt{g}R_{\mu\nu'}\delta(x-x') - 2a\sqrt{g}\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} - (4a-1)\sqrt{g}\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}\right\} \\
&\qquad \times \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') \\
&\quad -2\alpha\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_1(x,x') \\
&\quad -2(1-\alpha)\sqrt{g}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_1(x',x)\gamma^a a_0(x,x')
\end{aligned}
\tag{11.225}
$$

が得られる．

ここで，

$$[\Box\delta(x-x')]_{\mu\nu'}\,\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') = \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^c a_0(x,x)\gamma^a a_0(x,x)g_{\mu\lambda}\,[\Box\delta(x-x')]^{\lambda b'}_{c\nu'} \tag{11.226}$$

が成り立つ．ただし，

$$\int d^2x'\,[\Box\delta(x-x')]^{\lambda b'}_{c\nu'}\,V_{b'}{}^{\nu'} = \Box V_c{}^{\lambda} \tag{11.227}$$

とした．(11.226) を示す．(11.226) の左辺に任意関数 $V_{b'}{}^{\nu'}(x')$ をかけ x' で積分する：

$$\int d^2x'\,[\Box\delta(x-x')]_{\mu\nu'}\,\mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x')\right)V_{b'}{}^{\nu'}(x'). \tag{11.228}$$

ここで，

$$W^{\nu'}(x,x') = \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x')\right)V_{b'}{}^{\nu'}(x') \tag{11.229}$$

とおき，(11.228) を

$$\int d^2x'\,[\Box\delta(x-x')]_{\mu\nu'}\,W^{\nu'} = g_{\mu\nu}[\Box' W^{\nu'}] \tag{11.230}$$

と変形する．ただし，(11.203) を用いた．さらに，

$$A^{ab'}(x,x') = \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') \tag{11.231}$$

とおくと

$$\Box' W^{\nu'} = (\Box' A^{ab'})V_{b'}{}^{\nu'} + 2g^{\alpha'\beta'}(D_{\alpha'}A^{ab'})D_{\beta'}V_{b'}{}^{\nu'} + A^{ab'}\Box' V_{b'}{}^{\nu'} \tag{11.232}$$

と書ける．この式の coincidence limit をとると

$$[\Box' W^{\nu'}] = [\Box' A^{ab'}]V_b{}^{\nu} + 2g^{\alpha\beta}[D_{\alpha'}A^{ab'}]D_\beta V_b{}^{\nu} + [A^{ab'}]\Box V_b{}^{\nu} \tag{11.233}$$

が得られる．いま，

$$[\Box' A^{ab'}] = 0, \tag{11.234}$$

$$[D_{\alpha'}A^{ab'}] = 0, \tag{11.235}$$

$$[A^{ab'}] = A^{ab} \tag{11.236}$$

だから (11.233) は

$$[\Box' W^{\nu'}] = A^{ab}\Box V_b{}^{\nu} \tag{11.237}$$

であることがわかる．これを (11.230) に用いると

$$\int d^2x'\,[\Box\delta(x-x')]_{\mu\nu'}\,A^{ab'}V_{b'}{}^{\nu'} = A^{ab}g_{\mu\nu}\Box V_b{}^{\nu} \tag{11.238}$$

が得られる．ここで，

$$\int d^2x'\,[\Box\delta(x-x')]^{\nu c'}_{b\lambda'}\,V_{c'}{}^{\lambda'} = \Box V_b{}^{\nu} \tag{11.239}$$

を (11.238) に用いると

$$\int d^2x' \left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} A^{ab'} V_{b'}{}^{\nu'} = g_{\mu\lambda} A^{ac} \int d^2x' \left[\Box\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} V_{b'}{}^{\nu'} \tag{11.240}$$

となる．この式から $V_{b'}{}^{\nu'}$ をはずすと，結局

$$\left[\Box\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} A^{ab'} = A^{ac} g_{\mu\lambda} \left[\Box\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} \tag{11.241}$$

が得られる．すなわち，(11.226) が成り立つ．

次に，

$$\begin{aligned} &\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'} a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') \\ &= \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^c a_0(x,x)\gamma^a a_0(x,x)\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\lambda \left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} \end{aligned} \tag{11.242}$$

を示す．ただし，

$$\int d^2x' \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu \left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} V_{b'}{}^{\nu'} = D_{(\mu}D_{\nu)} V_c{}^\lambda \tag{11.243}$$

とした．(11.242) の左辺に任意関数 $V_{b'}{}^{\nu'}(x')$ をかけ x' で積分する：

$$\int d^2x' \left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{b'} a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x')\right) V_{b'}{}^{\nu'}(x'). \tag{11.244}$$

ここで，

$$W^{\nu'}(x,x') = \mathrm{tr}\left(\gamma_5\gamma^{b'} a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x')\right) V_{b'}{}^{\nu'}(x') \tag{11.245}$$

とおき，(11.244) を

$$\int d^2x' \left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'} W^{\nu'} = \left[D_{(\mu'}D_{\nu')}W^{\nu'}\right] \tag{11.246}$$

と変形する．ただし，(11.209) を用いた．さらに

$$A^{ab'}(x,x') = \mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'} a_0(x',x)\gamma^a a_0(x,x') \tag{11.247}$$

とおくと

$$D_{\nu'}D_{\mu'}W^{\nu'} = (D_{\nu'}D_{\mu'}A^{ab'})V_{b'}{}^{\nu'} + (D_{\nu'}A^{ab'})D_{\mu'}V_{b'}{}^{\nu'} + (D_{\mu'}A^{ab'})D_{\nu'}V_{b'}{}^{\nu'} + A^{ab'}D_{\nu'}D_{\mu'}V_{b'}{}^{\nu'} \tag{11.248}$$

と書ける．この式の coincidence limit をとると

$$[D_{\nu'}D_{\mu'}W^{\nu'}] = [D_{\nu'}D_{\mu'}A^{ab'}]V_b{}^\nu + [D_{\nu'}A^{ab'}]D_\mu V_b{}^\nu + [D_{\mu'}A^{ab'}]D_\nu V_b{}^\nu + [A^{ab'}]D_\nu D_\nu V_b{}^\nu \tag{11.249}$$

が得られる．いま，

$$[A^{ab'}] = A^{ab}, \tag{11.250}$$

$$[D_{\mu'}A^{ab'}] = [D_{\nu'}A^{ab'}] = 0, \tag{11.251}$$

$$[D_{\nu'}D_{\mu'}A^{ab'}] = \frac{1}{2}R^a{}_{d\mu\nu}A^{db} \tag{11.252}$$

だから (11.249) は

$$[D_{\nu'}D_{\mu'}W^{\nu'}]=\frac{1}{2}R^{a}{}_{d\mu\nu}A^{db}V_{b}{}^{\nu}+A^{ab}D_{\nu}D_{\mu}V_{b}{}^{\nu} \tag{11.253}$$

であることがわかる．これより

$$[D_{(\mu'}D_{\nu')}W^{\nu'}]=A^{ab}D_{(\mu}D_{\nu)}V_{b}{}^{\nu} \tag{11.254}$$

が得られる．これを (11.246) に用いると

$$\int d^2x'\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}A^{ab'}V_{b'}{}^{\nu'}=A^{ab}D_{(\mu}D_{\nu)}V_{b}{}^{\nu} \tag{11.255}$$

が得られる．ここで

$$\int d^2x'\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\nu c'}_{b\lambda'}V_{c'}{}^{\lambda'}=D_{(\mu}D_{\nu)}V_{b}{}^{\nu} \tag{11.256}$$

を (11.255) に用いると

$$\int d^2x'\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}A^{ab'}V_{b'}{}^{\nu'}=A^{ac}\int d^2x'\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'}V_{b'}{}^{\nu'} \tag{11.257}$$

となる．この式から $V_{b'}{}^{\nu'}$ をはずすと，結局

$$\left[D_{(.}D_{.)}\delta(x-x')\right]_{\mu\nu'}A^{ab'}=A^{ac}\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} \tag{11.258}$$

が得られる．すなわち，(11.242) が成り立つ．

(11.226)，(11.242) と

$$\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x,x)\gamma^{a}a_0(x,x)=-2i\varepsilon^{b'a}, \tag{11.259}$$

$$\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_0(x,x)\gamma^{a}a_1(x,x)=\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}a_1(x,x)\gamma^{a}a_0(x,x)=\frac{1}{6}i\varepsilon^{b'a}R \tag{11.260}$$

を (11.225) に用いると

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi(as)^2}\sigma_{.\mu\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^{a}A+\lim_{s\to 0}\frac{D}{4\pi as^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}\right)\sigma_{.\mu}\sigma_{.\nu'}e^{\sigma/2as}\mathrm{tr}\gamma_5\gamma^{b'}\tilde{A}\gamma^{a}A\\
&=-4i\sqrt{g}\varepsilon^{b'a}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}+\frac{1}{3}i\sqrt{g}\varepsilon^{b'a}R_{\mu\nu'}\delta(x-x')+4ia\sqrt{g}\varepsilon^{ca}g_{\mu\lambda}\left[\Box\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'}\\
&\quad+2(4a-1)i\sqrt{g}\varepsilon^{ca}\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'}-\frac{1}{3}i\sqrt{g}R\varepsilon^{b'a}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{11.261}$$

が得られる．

functional curl

以上より，(11.145) から (11.150) の項をまとめると functional curl は

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\langle e'T^{b'}{}_{\nu'}\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta e_{a}{}^{\mu}}-\frac{\delta\langle eT^{a}{}_{\mu}\rangle_{\mathrm{cov}}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}}\\
&=\frac{1}{4\pi}i\sqrt{g}\varepsilon^{b'a}g_{\mu\nu'}\delta(x-x')\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}+\frac{1}{32\pi}i\sqrt{g}\varepsilon^{b'a}g_{\mu\nu'}R\delta(x-x')-\frac{1}{32\pi}ig\eta^{ab'}\varepsilon_{\mu\nu'}R\delta(x-x')\\
&\quad-\frac{1}{24\pi}i\sqrt{g}\varepsilon^{ca}g_{\mu\lambda}\left[\Box\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'}+\frac{1}{24\pi}i\sqrt{g}\varepsilon^{ca}\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'}
\end{aligned} \tag{11.262}$$

となることがわかる．ただし，

$$R_{\mu\nu'} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu'}R = 0, \tag{11.263}$$

$$R_{cd\mu\nu'} = \frac{1}{2}(e_{c\mu}e_{d\nu'} - e_{c\nu'}e_{d\mu})R, \tag{11.264}$$

$$\varepsilon^{cd}e_{c\mu}e_{d\nu'} = e\varepsilon_{\mu\nu'} \tag{11.265}$$

を用いた．

発散項の除去

(11.262) の右辺第 1 項は発散項である．これを (11.121)

$$\int dx\lambda^{ab}L_{ab}^{\mathrm{cons}'} = \int_0^1 dt \int dxdx' \left(\frac{\delta\langle e'T^{b'}{}_{\nu'}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pE}^{(t)}}}{\delta e_a{}^{\mu}(t)} - \frac{\delta\langle eT^{a}{}_{\mu}\rangle_{\mathrm{cov}}^{\mathrm{pE}^{(t)}}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}(t)} \right) \frac{\partial e_{b'}{}^{\nu'}(t)}{\partial t}\delta_{\mathrm{IL}}e_a{}^{\mu}(t) \neq 0 \tag{11.121}$$

に用いると，その項は

$$\frac{1}{4\pi}i\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_0^1 dt\int dx\sqrt{g(t)}\varepsilon^{ba}g_{\mu\nu}(t)\frac{\partial e_b{}^{\nu}(t)}{\partial t}\delta_{\mathrm{IL}}e_a{}^{\mu}(t) \tag{11.266}$$

となる．ただし，$g_{\mu\nu}(t) = e^a{}_{\mu}(t)e^b{}_{\nu}(t)\eta_{ab}$，$g(t) = \mathrm{det}g_{\mu\nu}(t)$ である．

$e^a{}_{\mu}(t)$ を

$$e^a{}_{\mu}(t) = \delta^a_{\mu} + t(e^a{}_{\mu} + \delta^a_{\mu}) \tag{11.267}$$

でパラメータ化する．ここで，行列 E と H を

$$(E)^a{}_{\mu} = e^a{}_{\mu}, \tag{11.268}$$

$$(H)^a{}_{\mu} = e^a{}_{\mu} - \delta^a_{\mu} \tag{11.269}$$

で定義する．これらを用いると (11.267) は

$$E(t) = \mathbf{1} + tH \tag{11.270}$$

と書ける．ただし，

$$(E(t))^a{}_{\mu} = e^a{}_{\mu}(t) \tag{11.271}$$

とした．また，

$$g_{\mu\nu}(t) = -\left(E^T(t)E(t)\right)_{\mu\nu}, \tag{11.272}$$

$$\frac{\partial e_b{}^{\nu}(t)}{\partial t} = -\left(E^{-1}(t)HE^{-1}(t)\right)^{\nu}{}_{b}, \tag{11.273}$$

$$\delta_{\mathrm{IL}}e_a{}^{\mu}(t) = -t\left(E^{-1}(t)\delta_{\mathrm{IL}}EE^{-1}(t)\right)^{\mu}{}_{a}, \tag{11.274}$$

$$\delta_{\mathrm{IL}}E = \lambda E,\ \ \lambda^T = -\lambda \tag{11.275}$$

$$\sqrt{g(t)} = e(t) = \mathrm{det}e^a{}_{\mu}(t) \tag{11.276}$$

と書ける．これらを用いると (11.266) は

$$(11.266) = \frac{1}{4\pi} i \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^1 dt \int dx t e(t) \mathrm{tr} E^{-1}(t) \varepsilon E^{-1T}(t) H^T \delta_{\mathrm{IL}} E \tag{11.277}$$

となる．任意の 2×2 行列 X に対して

$$X\varepsilon X^T = \varepsilon \mathrm{det} X \tag{11.278}$$

が成り立つ．これより，

$$E^{-1}(t)\varepsilon E^{-1T}(t) = \frac{1}{e(t)}\varepsilon \tag{11.279}$$

が得られる．これを (11.277) に用い，t 積分をすると

$$(11.277) = \frac{1}{8\pi} i \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int dx \mathrm{tr} \varepsilon \left(E^T - \mathbf{1}\right) \delta_{\mathrm{IL}} E \tag{11.280}$$

が得られる．ここで，(11.275) で $\lambda = \theta\varepsilon$ としたものを (11.280) に用いると，結局 (11.266) は

$$\frac{1}{4\pi} i \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^1 dt \int dx \sqrt{g(t)} \varepsilon^{ba} g_{\mu\nu}(t) \frac{\partial e_b{}^\nu(t)}{\partial t} \delta_{\mathrm{IL}} e_a{}^\mu(t) = \frac{1}{8\pi} i \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int dx \theta (\mathrm{tr} E - 2e) \tag{11.281}$$

と求まる．ただし，

$$E\varepsilon E^T = \varepsilon \mathrm{det} E, \tag{11.282}$$
$$\varepsilon^2 = -\mathbf{1} \tag{11.283}$$

を用いた．

発散項 (11.281) の有効作用に対する counterterm を探す．まず，

$$\delta_{\mathrm{IL}} \mathrm{tr} \varepsilon E = -\theta \mathrm{tr} E \tag{11.284}$$

だから，有効作用に counterterm

$$\frac{1}{8\pi} i \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int dx \mathrm{tr} \varepsilon E \tag{11.285}$$

を加えれば (11.281) の 1 つ目の発散項は除去できる．次に，

$$\delta_{\mathrm{IL}} X = \theta e \tag{11.286}$$

を満たす局所的な関数 X を探す．(11.286) は

$$\delta_{\mathrm{IL}} \left(\frac{X}{e}\right) = \theta \tag{11.287}$$

と変形できる．これを

$$\delta_{\mathrm{IL}} Y = \theta \tag{11.288}$$

とおく．また，

$$\begin{pmatrix} X^1 & X^2 \\ X^3 & X^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1{}_1 & e^1{}_2 \\ e^2{}_1 & e^2{}_2 \end{pmatrix} \tag{11.289}$$

とおく．いま，

$$\begin{pmatrix} \delta_{\mathrm{lL}} X^1 & \delta_{\mathrm{lL}} X^2 \\ \delta_{\mathrm{lL}} X^3 & \delta_{\mathrm{lL}} X^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta X^3 & -\theta X^4 \\ \theta X^1 & \theta X^2 \end{pmatrix} \tag{11.290}$$

である．これらを用いると

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{lL}} Y &= \frac{\partial Y}{\partial X^i} \delta_{\mathrm{lL}} X^i \\ &= \theta \left(-X^3 \frac{\partial Y}{\partial X^1} - X^4 \frac{\partial Y}{\partial X^2} + X^1 \frac{\partial Y}{\partial X^3} + X^2 \frac{\partial Y}{\partial X^4} \right) \end{aligned} \tag{11.291}$$

が得られる．これと (11.288) から

$$-X^3 \frac{\partial Y}{\partial X^1} - X^4 \frac{\partial Y}{\partial X^2} + X^1 \frac{\partial Y}{\partial X^3} + X^2 \frac{\partial Y}{\partial X^4} = 1 \tag{11.292}$$

が得られる．ここで，$Y(X^1, X^3)$ の形を仮定すると (11.292) は

$$\left(X^1 \frac{\partial}{\partial X^3} - X^3 \frac{\partial}{\partial X^1} \right) = 1 \tag{11.293}$$

となる．ここで，$x = X^1$，$y = X^3$ とすると上式は

$$\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) Y = 1 \tag{11.294}$$

と書ける．この式の両辺に $-i$ をかけ，

$$\hat{p}_x = -i \frac{\partial}{\partial x}, \tag{11.295}$$

$$\hat{p}_y = -i \frac{\partial}{\partial y} \tag{11.296}$$

とおくと

$$(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) Y = -i \tag{11.297}$$

が得られる．この式の左辺には直交座標 (x, y, z) で表した z 軸まわりの角運動量演算子 $\hat{L}_z$

$$\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x \tag{11.298}$$

が現れている．これを用いると (11.297) は

$$\hat{L}_z Y = -i \tag{11.299}$$

と書ける．$\hat{L}_z$ を極座標 (r, θ, φ) で表すと

$$\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{11.300}$$

と書ける．これを (11.299) に用いると

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = 1 \tag{11.301}$$

が得られる．したがって，

$$Y = \varphi \tag{11.302}$$

が得られる．いま，

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{11.303}$$

だから

$$Y = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{e^2{}_1}{e^1{}_1} \tag{11.304}$$

が得られる．したがって，

$$X = e\tan^{-1}\frac{e^2{}_1}{e^1{}_1} \tag{11.305}$$

と得られる．以上より，有効作用に counterterm

$$\frac{1}{4\pi}i\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int dxe\tan^{-1}\frac{e^2{}_1}{e^1{}_1} \tag{11.306}$$

を加えれば (11.281) の 2 つ目の発散項は除去できる．

11.7　２次元の共変的 Lorentz 異常項の functional curl

共変的 Lorentz 異常項を用いて

$$\langle \delta S_L\rangle = \int dxL^{a\,\mathrm{cov}}_{\mu}\delta e_a{}^{\mu} = \int dxe^b{}_{\mu}L^{a\,\mathrm{cov}}_{b}\delta e_a{}^{\mu} \tag{11.307}$$

とおく．2 次元における共変的 Lorentz 異常項は (11.62)

$$L^{\mathrm{cov}}_{ab} = -\lim_{s\to 0}\frac{1}{8\pi}ie\varepsilon_{ab}\frac{1}{s} - \frac{1}{96\pi}ieR\varepsilon_{ab} \tag{11.62}$$

である．これを (11.307) に用いると

$$\begin{aligned}\langle \delta S_L\rangle &= \int dxe^b{}_{\mu}\left(-\lim_{s\to 0}\frac{1}{8\pi}ie\varepsilon^a{}_b\frac{1}{s} - \frac{1}{96\pi}ieR\varepsilon^a{}_b\right)\delta e_a{}^{\mu}\\ &= \langle \delta S_L^s\rangle + \langle \delta S_L^f\rangle\end{aligned} \tag{11.308}$$

となる．ただし，

$$\langle \delta S_L^s\rangle = -\lim_{s\to 0}\frac{1}{8\pi}i\frac{1}{s}\int dxe\varepsilon^a{}_b e^b{}_{\mu}\delta e_a{}^{\mu} \tag{11.309}$$

$$\langle \delta S_L^f\rangle = -\frac{1}{96\pi}i\int dxeR\varepsilon^a{}_b e^b{}_{\mu}\delta e_a{}^{\mu} \tag{11.310}$$

とした．

$$\delta_1\langle\delta_2 S_L\rangle - \delta_2\langle\delta_1 S_L\rangle = \delta_1\langle\delta_2 S_L^s\rangle - \delta_2\langle\delta_1 S_L^s\rangle + \delta_1\langle\delta_2 S_L^f\rangle - \delta_2\langle\delta_1 S_L^f\rangle \tag{11.311}$$

である．まず，

$$\delta_1\langle\delta_2 S_L^s\rangle - \delta_2\langle\delta_1 S_L^s\rangle \tag{11.312}$$

を計算する：

$$\begin{aligned}
\delta_1\langle\delta_2 S_L^s\rangle &= \delta_1\left(-\lim_{s\to 0}\frac{1}{8\pi}i\frac{1}{s}\int dx e \varepsilon^a{}_b e^b{}_\mu \delta e_a{}^\mu\right)\\
&= -\lim_{s\to 0}\frac{1}{8\pi}i\frac{1}{s}\int dx(\delta_1 e \varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu + e\varepsilon^b{}_c \delta_1 e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu)\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{4\pi}i\frac{1}{s}\int dx e \varepsilon^b{}_c e^a{}_{(\mu} e^c{}_{\nu)} \delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_b{}^\nu
\end{aligned} \tag{11.313}$$

である．ただし，2 行目で

$$\delta e = -e e^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu, \tag{11.314}$$

$$\delta e^c{}_\nu = -e^c{}_\mu \delta e_a{}^\mu e^a{}_\nu \tag{11.315}$$

を用いた．同様にして

$$\delta_2\langle\delta_1 S_L^s\rangle = \lim_{s\to 0}\frac{1}{4\pi}i\frac{1}{s}\int dx e \varepsilon^a{}_c e^b{}_{(\mu} e^c{}_{\nu)} \delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_b{}^\nu \tag{11.316}$$

が得られる．(11.313) と (11.316) を (11.312) に用いると

$$\begin{aligned}
\delta_1\langle\delta_2 S_L^s\rangle - \delta_2\langle\delta_1 S_L^s\rangle &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{4\pi}i\frac{1}{s}\int dx e(\varepsilon^b{}_c e^a{}_{(\mu} e^c{}_{\nu)} - \varepsilon^a{}_c e^b{}_{(\mu} e^c{}_{\nu)})\delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_b{}^\nu\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2\pi}i\frac{1}{s}\int dx e \varepsilon^{[b}{}_c e^{a]}{}_{(\mu} e^c{}_{\nu)} \delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_b{}^\nu\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2\pi}i\frac{1}{s}\int dx \int dx' e \varepsilon^{[b'}{}_c e^{a]}{}_{(\mu} e^c{}_{\nu')} \delta(x-x') \delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_{b'}{}^{\nu'}
\end{aligned} \tag{11.317}$$

が得られる．

次に，

$$\delta_1\langle\delta_2 S_L^f\rangle - \delta_2\langle\delta_1 S_L^f\rangle \tag{11.318}$$

を計算する：

$$\begin{aligned}
\delta_1\langle\delta_2 S_L^f\rangle &= \delta_1\left(-\frac{1}{96\pi}i\int dx e R \varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu\right)\\
&= -\frac{1}{96\pi}i\int dx\left(\delta_1(eR)\varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu + eR\varepsilon^b{}_c \delta_1 e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu\right)
\end{aligned} \tag{11.319}$$

である．付録 K より，

$$\delta(eR) = 2ee^a{}_\mu \Box \delta e_a{}^\mu - 2eD_{(a}D_{\mu)}\delta e^{a\mu} \tag{11.320}$$

である．ただし，Ricci テンソルを

$$R_{b\nu} = e^{a\mu}R_{ab\mu\nu} \tag{11.321}$$

で定義し，スカラー曲率を

$$R = e^{a\mu}e^{b\nu}R_{ab\mu\nu} \tag{11.322}$$

で定義した．また，

$$R_{ab\mu\nu} = \partial_\mu \omega_{ab\nu} - \partial_\nu \omega_{ab\mu} + \omega_{ac\mu}\omega^c{}_{b\nu} - \omega_{ac\nu}\omega^c{}_{b\mu} \tag{11.323}$$

であり，$\Box = D_k D^k$ である．(11.320) を用いると

$$\int dx \delta_1(eR)\varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu = \int dx (2e\varepsilon^b{}_c e^a{}_\mu e^c{}_\nu \delta_1 e_a{}^\mu \Box \delta_2 e_b{}^\nu - 2e\varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu \delta_1 e^{a\mu} D_{(a}D_{\mu)}\delta_2 e_b{}^\nu) \tag{11.324}$$

となる．ただし，部分積分をした．これより，

$$\begin{aligned}
&\int dx \delta_1(eR)\varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= \int dx \left[2e(\varepsilon^b{}_c e^a{}_\mu e^c{}_\nu - \varepsilon^a{}_c e^b{}_\nu e^c{}_\mu)\delta_1 e_a{}^\mu \Box \delta_2 e_b{}^\nu + 2e(\varepsilon^a{}_c e^c{}_\mu e^{b\rho}\delta^\sigma_\nu - \varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu e^{a\rho}\delta^\sigma_\mu)\delta_1 e_a{}^\mu D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta_2 e_b{}^\nu \right]
\end{aligned} \tag{11.325}$$

が得られる．

$$\int dx e R \varepsilon^b{}_c \delta_1 e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu = -\int dx e R \varepsilon^b{}_c e^c{}_\mu e^a{}_\nu \delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_b{}^\nu \tag{11.326}$$

である．これより，

$$\int dx e R \varepsilon^b{}_c \delta_1 e^c{}_\nu \delta_2 e_b{}^\nu - (1 \leftrightarrow 2) = \int dx e R(\varepsilon^a{}_c e^c{}_\nu e^b{}_\mu - \varepsilon^b{}_c e^c{}_\mu e^a{}_\nu)\delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_b{}^\nu \tag{11.327}$$

が得られる．(11.325) と (11.327) より

$$\begin{aligned}
&\delta_1 \langle \delta_2 S^f_L \rangle - \delta_2 \langle \delta_1 S^f_L \rangle \\
&= \int dx \left[2e(\varepsilon^b{}_c e^a{}_\mu e^c{}_\nu - \varepsilon^a{}_c e^b{}_\nu e^c{}_\mu)\delta_1 e_a{}^\mu \Box \delta_2 e_b{}^\nu + 2e(\varepsilon^a{}_c e^c{}_\mu e^{b\rho}\delta^\sigma_\nu - \varepsilon^b{}_c e^c{}_\nu e^{a\rho}\delta^\sigma_\mu)\delta_1 e_a{}^\mu D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta_2 e_b{}^\nu \right. \\
&\qquad \left. + eR(\varepsilon^a{}_c e^c{}_\nu e^b{}_\mu - \varepsilon^b{}_c e^c{}_\mu e^a{}_\nu)\delta_1 e_a{}^\mu \delta_2 e_b{}^\nu \right]
\end{aligned} \tag{11.328}$$

が得られる．(11.317) と (11.328) より共変的 Lorentz 異常項の functional curl は，結局

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta L^{b'\,\mathrm{cov}}_{\nu'}}{\delta e_a{}^\mu} - \frac{\delta L^{a\,\mathrm{cov}}_{\mu}}{\delta e_{b'}{}^{\nu'}} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{2\pi} i \frac{1}{s} e\varepsilon^{[b'}{}_c e^{a]}{}_{(\mu} e^c{}_{\nu')}\delta(x-x') \\
&- \frac{1}{96\pi} i \Big[2e(\varepsilon^c{}_d e^a{}_\mu e^d{}_\lambda - \varepsilon^a{}_d e^c{}_\lambda e^d{}_\mu)\left[\Box \delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} + 2e(\varepsilon^a{}_d e^d{}_\mu e^{c\rho}\delta^\sigma_\lambda - \varepsilon^c{}_d e^d{}_\lambda e^{a\rho}\delta^\sigma_\mu)\left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} \\
&\qquad + eR(\varepsilon^a{}_c e^c{}_\nu e^b{}_\mu - \varepsilon^b{}_c e^c{}_\mu e^a{}_\nu)\delta(x-x') \Big]
\end{aligned} \tag{11.329}$$

であることがわかる．ただし，

$$\int dx' \left[\Box \delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} \delta e_{b'}{}^{\nu'} = \Box \delta e_c{}^\lambda \tag{11.330}$$

$$\int dx' \left[D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta(x-x')\right]^{\lambda b'}_{c\nu'} \delta e_{b'}{}^{\nu'} = D_{(\rho}D_{\sigma)}\delta e_c{}^\lambda \tag{11.331}$$

である．

第 12 章

結論と課題

本論文では，ゲージ異常項と重力異常項のそれぞれに対しての共変的異常項と整合的異常項との関係式を考察した．以下では，我々が本論文で行ったことについての要約と考察をする．

第 6 章ではヒートカーネルの方法を用いて共変的カレントの functional curl を具体的に評価した．これは functional curl がデルタ関数型の振る舞いをするということの直接的な証明を与える．得られた functional curl の具体的な形はただちに Bardeen と Zumino により与えられた共変的カレントと整合的カレントとの関係式 [11,15] に導く．第 7 章では Osabe と Suzuki による共変的カレントと整合的カレントの差 [20] にヒートカーネルの方法を適用し，2 次元と 4 次元で評価した．結果は Bardeen と Zumino の結果 [11,15] に一致する．第 11 章では Banerjee らの議論 [15] を重力異常項に適用し，共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルとの関係式を考察した．この関係式は共変的エネルギー運動量テンソルの fuctional curl で表される．

第 11 章では Banerjee らの議論 [15] を重力異常項に適用した．共変的エネルギー運動量テンソルを用いて正則化された有効作用を定義し，それに基づく整合的エネルギー運動量テンソルを導入し，二つのエネルギー運動量テンソルの関係を求めた．その結果，共変的エネルギー運動量テンソルと整合的エネルギー運動量テンソルの差は共変的エネルギー運動量テンソルの functional curl で表されることがわかった [26]．さらに，ヒートカーネルの方法を応用・拡張することにより，2 次元でのエネルギー運動量テンソルの functional curl の値を具体的に求めることに成功した．

次のような課題がある．第 11 章で共変的エネルギー運動量テンソルを用いて正則化された有効作用を定義した（式 (11.112)）．共変的エネルギー運動量テンソルは共変的で局所的な項を加える不定性をもつのでそれに対応する不定性が有効作用 (11.112) に現れる．したがって，例えばどのような共変的エネルギー運動量テンソルが Lorentz 異常項フリー，すなわち，Lorentz 不変で一般座標変換不変でない有効作用を導くのかという問題が考えられる．Lorentz 異常項フリーな共変的エネルギー運動量テンソルでは必ずしも Lorentz 異常項フリーな有効作用を導かないことがわかる．実際，2 次元のスピン 1/2 のカイラルフェルミオンに対して，有効作用 (11.112) を定義するために用いた対称な共変的エネルギー運動量テンソル $\langle eT_{\mu\nu}\rangle^{\mathrm{pE}}_{\mathrm{cov}}[{e_b}^{\lambda}(t)]$ による具体的な計算は，式 (11.115) の右辺第 2 項が consistent Lorentz 異常項に寄与することを示している．このように，式 (11.113) の文脈で Lorentz 異常項フリー（あるいは，Einstein 異常項フリー）な整合的エネル

ギー運動量テンソルを得ることはまだ見通しが良くない．今後はこのような点を明らかにすることが課題となる．

付録

付録 A

群と Lie 代数

$U(N)$ 群

N 成分から成る場

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

の内積

$$\big(\psi(x), \psi(x)\big) = \psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{A.2}$$

を不変にする $N \times N$ の行列 U による 1 次変換

$$\psi'(x) = U\psi(x) \tag{A.3}$$

があるとする．このとき，U は，

$$U^\dagger U = \mathbf{1} \tag{A.4}$$

を満たす．したがって，

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{A.5}$$

である．すなわち，U はユニタリーである．このような U 全体 $U(N)$ は次の 1〜3 の群（group）の定義を満たす：

1. 積が閉じている：

$$U_1 \in U(N),\ U_2 \in U(N) \Longrightarrow U_1U_2 \in U(N)\ . \tag{A.6}$$

これは，

$$U_1^\dagger U_1 = \mathbf{1},\ U_2^\dagger U_2 = \mathbf{1} \Longrightarrow (U_1U_2)^\dagger\,(U_1U_2) = \mathbf{1} \tag{A.7}$$

であるから，満たされる．

2. 単位元がある：

$$\mathbf{1} \in U(N)\ . \tag{A.8}$$

これは，

$$\mathbf{1}^\dagger \mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{A.9}$$

であるから，満たされる．

3. 逆元がある：

$$U \in U(N) \Longrightarrow U^{-1} \in U(N)\ . \tag{A.10}$$

これは，

$$U^\dagger U = \mathbf{1} \Longrightarrow \big(U^{-1}\big)^\dagger U^{-1} = \mathbf{1} \tag{A.11}$$

であるから，満たされる．ただし，

$$\big(U^{-1}\big)^\dagger U^\dagger = \big(UU^{-1}\big)^\dagger = \mathbf{1}^\dagger = \mathbf{1} \tag{A.12}$$

より，

$$\big(U^{-1}\big)^\dagger = \big(U^\dagger\big)^{-1} \tag{A.13}$$

であることを用いた．この群は，$U(N)$ 群と呼ばれる．

無限小変換と Lie 代数

ユニタリー変換 U の無限小変換（恒等変換から無限小だけずれた変換）

$$U = \mathbf{1} + iX \in U(N) \tag{A.14}$$

を考える．ただし，X は恒等変換から無限小だけずれた量を表す．X は有限のエルミート行列 T と実数 θ を用いて

$$X = \frac{\theta}{n} T \tag{A.15}$$

と書ける．ただし，$n = 1, 2, \cdots$ である．(A.14) を式（A.4）に代入すると，

$$\big(\mathbf{1} - iX^\dagger\big)\big(\mathbf{1} + iX\big) = \mathbf{1} \tag{A.16}$$

となる．X の 2 次の項を無視すると，

$$X^\dagger = X \tag{A.17}$$

が得られる．すなわち，X はエルミートである．これより，$U(N)$ の独立なパラメータの数は，N^2 であることがわかる．

無限小変換（A.14）を n 回続けて行った変換

$$U^n = \big(\mathbf{1} + iX\big)^n \in U(N) \tag{A.18}$$

を考える．この式で $n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} U^n = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{1} + i\frac{\theta}{n} T\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(e^{i\frac{\theta}{n}T}\right)^n = e^{i\theta T} \in U(N) \tag{A.19}$$

が得られる．ただし，(A.15) を用いた．すなわち，無限小変換を無限回すると有限の変換が得られる．一般に，任意の実数 θ に対して $e^{i\theta T} \in U(N)$ であるとき，T は $U(N)$ の無限小変換を表す．このような T 全体 $u(N)$ を $U(N)$ の Lie 代数と呼ぶ．したがって，$T \in u(N)$ と書ける．$u(N)$ は $N \times N$ エルミート行列全体である．

ベクトル空間

上で述べたことから明らかに，

$$\alpha, \beta \in u(N) \Longleftrightarrow \alpha^\dagger = \alpha,\ \beta^\dagger = \beta \tag{A.20}$$

である．α と β がエルミートであれば，$s, t \in \boldsymbol{R}$ のとき，

$$(s\alpha + t\beta)^\dagger = s\alpha + t\beta \tag{A.21}$$

である．したがって，$\alpha, \beta \in u(N)$ ならば，

$$s\alpha + t\beta \in u(N) \tag{A.22}$$

であることが言える．すなわち，$u(N)$ はベクトル空間である[*1]．したがって，基底 $T^a \in u(N)$ $(a = 1, \ldots, N^2)$ を考えると便利である．基底ベクトルであるエルミート行列 T^a を用いて，任意の $\alpha \in u(N)$ は，

$$\alpha = \alpha^a T^a \tag{A.23}$$

と展開できる．ただし，展開係数 α^a は実数であり，a については 1〜N^2 まで和をとるものとする．また，基底としては規格直交規定とし，規格化条件を，

$$\mathrm{tr}\big(T^{a\dagger} T^b\big) = \mathrm{tr}\big(T^a T^b\big) \equiv \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{A.24}$$

とする．これを用いると式（A.23）の α^a は，

$$\alpha^a = 2\mathrm{tr}\big(T^a \alpha\big) \tag{A.25}$$

と求められる．

構造定数

$T^a, T^b \in u(N)$ ならば，$\frac{1}{i}\big[T^a, T^b\big] \in u(N)$ であることを示す[*2]：$T^a, T^b \in u(N)$ のとき，$T^{a\dagger} = T^a$, $T^{b\dagger} = T^b$ であるから，

$$\Big(\frac{1}{i}\big[T^a, T^b\big]\Big)^\dagger = -\frac{1}{i}\big[T^b, T^a\big] = \frac{1}{i}\big[T^a, T^b\big] \tag{A.26}$$

[*1] $u(N)$ に限らず一般に Lie 代数はベクトル空間をなす．
[*2] $u(N)$ に限らず一般に Lie 代数は交換子積で閉じている．

である．したがって，

$$\frac{1}{i}\left[T^a, T^b\right] \in u(N) \tag{A.27}$$

である．すなわち，$\frac{1}{i}\left[T^a, T^b\right]$ もまたベクトル空間 $u(N)$ の元であるから，実数の展開係数を f^{abc} とおけば，基底 T^a を使って展開できる：

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c \ . \tag{A.28}$$

ただし，添え字 c については，$1 \sim N^2$ まで和をとるものとした．f^{abc} は構造定数（structure constant）と呼ばれる．規格化条件（A.24）より，f^{abc} は，

$$f^{abc} = 2\mathrm{tr}\left(T^c\left(-i\left[T^a, T^b\right]\right)\right) \tag{A.29}$$

と決まる．tr の性質から，f^{abc} は，(a, b, c) に関し完全反対称であることがわかる．

Jacobi 恒等式

一般に，行列 T^a に対して，以下の式が成立する：

$$\left[T^a, \left[T^b, T^c\right]\right] + \left[T^b, \left[T^c, T^a\right]\right] + \left[T^c, \left[T^a, T^b\right]\right] = 0 \ . \tag{A.30}$$

この式で，交換関係（A.28）を用いると，構造定数が満たす恒等式

$$f^{abe} f^{ced} + f^{bce} f^{aed} + f^{cae} f^{bed} = 0 \tag{A.31}$$

が得られる．(A.30)，(A.31) を Jacobi 恒等式という．

付録 B

ϕ_n と φ_n の関係

式（2.40），（2.41）の導出をする．また，$\lambda_n \neq 0$ に対して，ϕ_n と φ_n が 1 対 1 に対応することを示す．

はじめに，式（2.37）

$$\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n = \lambda_n^2 \phi_n \tag{B.1}$$

を仮定する．ただし，

$$\lambda_n > 0 \tag{B.2}$$

とする．規格化条件は，

$$\int d^D x \, \phi_n^\dagger \phi_n = 1 \tag{B.3}$$

である．式（B.1）に左から $\mathscr{D}$ を作用させると，

$$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger \left(\mathscr{D}\phi_n\right) = \lambda_n^2 \, \mathscr{D}\phi_n \tag{B.4}$$

となる．すなわち，$\mathscr{D}\phi_n$ は $\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ の固有値 λ_n^2 に属する固有関数である．そこで，適当な定数 A を用いて，

$$\varphi_n \equiv A \mathscr{D} \phi_n \tag{B.5}$$

とおく．これを用いて式（B.4）を書き換えると，

$$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger \varphi_n = \lambda_n^2 \, \varphi_n \tag{B.6}$$

と書ける．したがって，

$$\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n = \lambda_n^2 \phi_n \Longrightarrow \mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger \varphi_n = \lambda_n^2 \, \varphi_n \tag{B.7}$$

が言えた．すなわち，$\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}$ の固有関数 ϕ_n を与えると，それに応じて $\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ の固有関数 φ_n が決まることが言えた．

定数 A は規格化条件

$$\int d^D x \, \varphi_n^\dagger \varphi_n = 1 \tag{B.8}$$

を課すと決まる：(B.5) を (B.8) に用いると

$$
\begin{aligned}
1 &= \int d^D x\, \varphi_n^\dagger \varphi_n \\
&= |A|^2 \int d^D x\, \phi_n^\dagger \mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n \\
&= |A|^2 \lambda_n^2 \int d^D x\, \phi_n^\dagger \phi_n \\
&= |A|^2 \lambda_n^2
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

となる．ただし，２行目で式（B.1)，３行目で式（B.3）を用いた．(B.9) より規格化定数は

$$
A \equiv \frac{1}{\lambda_n} \tag{B.10}
$$

と決まる．したがって，

$$
\mathscr{D}\phi_n = \lambda_n \varphi_n \tag{B.11}
$$

が得られる．この式に左から $\mathscr{D}^\dagger$ を作用させて，式（B.1）を用いると，

$$
\mathscr{D}^\dagger \varphi_n = \lambda_n \phi_n \tag{B.12}
$$

が得られる．

次に，式（B.7）の逆を考える．すなわち，式（B.6）を満たす φ_n がまず与えられたとする．式（B.6）の左から $\mathscr{D}^\dagger$ を作用させると，

$$
\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \left(\mathscr{D}^\dagger \varphi_n \right) = \lambda_n^2\, \mathscr{D}^\dagger \varphi_n \tag{B.13}
$$

となる．すなわち，$\mathscr{D}^\dagger \varphi_n$ は $\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D}$ の固有値 λ_n^2 に属する固有関数である．そこで，適当な定数 B を用いて，

$$
\phi_n \equiv B \mathscr{D}^\dagger \varphi_n \tag{B.14}
$$

とおく．これを用いて式（B.13）を書き換えると，

$$
\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n = \lambda_n^2 \phi_n \tag{B.15}
$$

と書ける．したがって，

$$
\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger \varphi_n = \lambda_n^2\, \varphi_n \Longrightarrow \mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n = \lambda_n^2 \phi_n \tag{B.16}
$$

が言えた．すなわち，$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ の固有関数 φ_n を与えると，それに応じて $\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D}$ の固有関数 ϕ_n が決まることが言えた．

以上より，

$$
\mathscr{D}^\dagger \mathscr{D} \phi_n = \lambda_n^2\, \phi_n \Longleftrightarrow \mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger \varphi_n = \lambda_n^2\, \varphi_n \tag{B.17}
$$

となることが示せた．したがって，$\lambda_n \neq 0$ に対して，ϕ_n と φ_n は 1 対 1 に対応する．対応関係は式（B.11）または式（B.12）で与えられる．

付録 C

共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ のゲージ変換のもとでの変換則

式（2.59）の共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}} = \lim_{s\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^{\dagger}(x)\,T^a\gamma^{\mu}\frac{1-\gamma_5}{2}\phi_n(x)\right\}e^{-s\lambda_n^2} \tag{C.1}$$

のゲージ場 $A_\mu(x)$ の局所 $U(N)$ ゲージ変換

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x) = e^{i\alpha(x)}\big(A_\mu(x)-i\partial_\mu\big)e^{-i\alpha(x)} \tag{C.2}$$

のもとでの変換則を示す.

局所 $U(N)$ カイラルゲージ変換

はじめに，局所 $U(N)$ カイラルゲージ変換（2.22）〜（2.24）

$$\psi(x)\to\psi'(x) = e^{i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}}\psi(x) \tag{C.3}$$

$$\overline{\psi}(x)\to\overline{\psi'}(x) = \overline{\psi}(x)\,e^{-i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}} \tag{C.4}$$

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x) = e^{i\alpha(x)}\big(A_\mu(x)-i\partial_\mu\big)e^{-i\alpha(x)} \tag{C.2}$$

のもとで $\mathscr{D}$ は,

$$\mathscr{D}\to\mathscr{D}' = \exp\left(i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mathscr{D}\exp\left(-i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \tag{C.5}$$

と変換されることに注意する.

式（2.33）の意味での内積によって，$\mathscr{D}'$ のエルミート共役 $\mathscr{D}'^{\dagger}$ は,

$$\big(\mathscr{D}'\phi,\psi\big) = \big(\phi,\mathscr{D}'^{\dagger}\psi\big) \tag{C.6}$$

で与えられる．これより，$\mathscr{D}'^{\dagger}$ は，

$$\mathscr{D}'^{\dagger} = \exp\left(i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\mathscr{D}^{\dagger}\exp\left(-i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{C.7}$$

であることがわかる．よって，変換（C.5)，(C.7）のもとで，$\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D}$ は，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D} \to \mathscr{D}'^{\dagger}\mathscr{D}' &= \exp\left(i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D}\exp\left(-i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\\ &\equiv S(x)\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D}S^{-1}(x)\end{aligned} \tag{C.8}$$

と変換する．ただし，

$$S(x) \equiv \exp\left(i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \tag{C.9}$$

とした．また，変換（C.5)，(C.7）のもとで，$\mathscr{D}\mathscr{D}^{\dagger}$ は，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\mathscr{D}^{\dagger} \to \mathscr{D}'\mathscr{D}'^{\dagger} &= \exp\left(i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mathscr{D}\mathscr{D}^{\dagger}\exp\left(-i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\\ &\equiv P(x)\mathscr{D}\mathscr{D}^{\dagger}P^{-1}(x)\end{aligned} \tag{C.10}$$

と変換する．ただし，

$$P(x) \equiv \exp\left(i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \tag{C.11}$$

とした．すなわち，$\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D}$, $\mathscr{D}\mathscr{D}^{\dagger}$ はそれぞれ，変換（C.5)，(C.7）のもとで，相似変換（similarity transformation）をする．

固有値方程式の局所 $U(N)$ ゲージ変換

次に，$\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D}$ の変換（C.8）のもとでの式（2.37）

$$\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D}\phi_n(x) = \lambda_n^2\,\phi_n(x) \tag{C.12}$$

を考える．両辺に左から $S(x)$ をかけ，

$$S^{-1}(x)S(x) = \mathbf{1} \tag{C.13}$$

を用いると

$$S(x)\mathscr{D}^{\dagger}\mathscr{D}S^{-1}(x)S(x)\phi_n(x) = \lambda_n^2 S(x)\phi_n(x) \tag{C.14}$$

となる．式（C.8）より，この式は，

$$\mathscr{D}'^{\dagger}\mathscr{D}'S(x)\phi_n(x) = \lambda_n^2 S(x)\phi_n(x) \tag{C.15}$$

と書ける．$S(x)\phi_n(x)$ を

$$\phi'_n(x) \equiv S(x)\phi_n(x) \tag{C.16}$$

とすると，

$$\mathscr{D}'^\dagger\mathscr{D}'\phi'_n(x) = \lambda_n^2\,\phi'_n(x) \tag{C.17}$$

と書ける．すなわち，$\mathscr{D}'^\dagger\mathscr{D}'$ の固有値は，$\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}$ の固有値 λ_n^2 に等しいことがわかる．対応する固有関数は $\phi'_n(x)$ である．

また，式（2.42）

$$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger\varphi_n(x) = \lambda_n^2\,\varphi_n(x) \tag{C.18}$$

から，同様にして，

$$\varphi'_n(x) = P(x)\varphi_n(x) \tag{C.19}$$

とおくと，$\varphi'_n(x)$ が $\mathscr{D}'\mathscr{D}'^\dagger$ の固有値 λ_n^2 をもつ固有関数であることが示せる．したがって，$\mathscr{D}^\dagger\mathscr{D}$，$\mathscr{D}\mathscr{D}^\dagger$ の固有値 λ_n^2 はゲージ変換のもとで不変である．

式（C.19）両辺のエルミート共役をとると，

$$\varphi'^\dagger_n(x) = \varphi^\dagger_n(x)P^{-1}(x) \tag{C.20}$$

が得られる．

共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}$ の局所 $U(N)$ ゲージ変換

以上より，$\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}$（C.1）に局所 $U(N)$ ゲージ変換（C.2）を行ったもの $\langle J^{\mu a}(x)\rangle'_{\rm cov}$ は、

$$\langle J^{\mu a}(x)\rangle'_{\rm cov} = \lim_{s\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\varphi'^\dagger_n(x)\,T^a\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\phi'_n(x)\right\}e^{-s\lambda_n^2} \tag{C.21}$$

となることがわかる．式（C.16），式（C.20）をこの式に代入し，計算すると，

$$\begin{aligned}
&\langle J^{\mu a}(x)\rangle'_{\rm cov}\\
&= \lim_{s\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\varphi^\dagger_n(x)e^{-i\alpha(x)\frac{1+\gamma_5}{2}}\,T^a\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}e^{i\alpha(x)\frac{1-\gamma_5}{2}}\phi_n(x)\right\}e^{-s\lambda_n^2}\\
&= \lim_{s\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\varphi^\dagger_n(x)e^{-i\alpha(x)}\,T^a\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}e^{i\alpha(x)}\phi_n(x)\right\}e^{-s\lambda_l^2}\\
&= \lim_{s\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\varphi^\dagger_n(x)e^{-i\alpha(x)}\,T^a e^{i\alpha(x)}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\phi_n(x)\right\}e^{-s\lambda_n^2}
\end{aligned} \tag{C.22}$$

となる．ここで，$\alpha(x) \ll 1$ とすると，上式は，

$$\begin{aligned}
\langle J^{\mu a}(x)\rangle'_{\rm cov} &= \lim_{s\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_n}\varphi^\dagger_n(x)\Big(T^a + i\big[T^a,\alpha(x)\big]\Big)\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\phi_n(x)\right\}e^{-s\lambda_n^2}\\
&= \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} - f^{abc}\alpha^b(x)\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

となる．すなわち，変化分 $\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}$ は，

$$\begin{aligned}
\delta\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov} &= \langle J^{\mu a}(x)\rangle'_{\rm cov} - \langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\rm cov}\\
&= -f^{abc}\alpha^b(x)\langle J^{\mu c}(x)\rangle_{\rm cov}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

と求まる．したがって，共変的カレント $\langle J^{\mu a}(x)\rangle_{\mathrm{cov}}$ はゲージ場 $A_\mu(x)$ の局所 $U(N)$ ゲージ変換（C.2）もとで随伴表現の変換則に従って変換する．

付録 D

式（5.22）の確認

式（5.22）

$$\Big\{\delta^{ab}\partial_\nu - f^{aeb}A^e_\nu(x)\Big\}\frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^b_{\mu\nu}(x)} = -\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\frac{\delta G^b_{\rm cov}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \tag{D.1}$$

が 4 次元で成立することを確かめる．第 2 章で導出した共変的異常項の具体形（2.81）は

$$G^a_{\rm cov}(x) = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\varepsilon^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}{\rm tr}T^a F_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots F_{\mu_n\nu_n}(x), \tag{2.81}$$

である．4 次元時空の場合，(2.81) より，

$$\frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^b_{\mu\nu}(x)} = \frac{1}{16\pi^2}\delta^{(4)}(x-x')\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}{\rm Str}\,\Big(T^cT^bF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) \tag{D.2}$$

が得られる．これを用いると，式（D.1）の左辺は，

$$\begin{aligned}
&\Big\{\delta^{ab}\partial_\nu - f^{aeb}A^e_\nu(x)\Big\}\frac{\delta G^c_{\rm cov}(x')}{\delta F^b_{\mu\nu}(x)}\\
&= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\delta^{ab}\partial_\nu - f^{aeb}A^e_\nu(x)\Big\}\delta^{(4)}(x-x')\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}{\rm Str}\Big(T^cT^bF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big)\\
&= \frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\,\Big\{\partial_\nu\delta^{(4)}(x-x'){\rm Str}\Big(T^cT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big)\\
&\qquad\qquad -f^{aeb}A^e_\nu(x)\delta^{(4)}(x-x'){\rm Str}\Big(T^cT^bF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big)\Big\}\\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\,\Big\{\Big(\partial'_\nu\delta^{(4)}(x-x')\Big)\,{\rm Str}\,\Big(T^cT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big)\Big\}\\
&\qquad -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}f^{aeb}A^e_\nu(x)\delta^{(4)}(x-x'){\rm Str}\Big(T^cT^bF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big)
\end{aligned} \tag{D.3}$$

となる．式（D.1）の右辺は，

$$
\begin{aligned}
& -\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\frac{\delta G^b_{\mathrm{cov}}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta^{(4)}(x-x')\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\mathrm{Str}\Big(T^bT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\,\Big\{\Big(\partial'_\nu\delta^{(4)}(x-x')\Big)\,\mathrm{Str}\Big(T^cT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) \\
&\qquad + \delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\Big(T^cT^a\partial'_\nu F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) \\
&\qquad\qquad - f^{ceb}A^e_\nu(x')\delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\Big(T^bT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big)\Big\}
\end{aligned} \tag{D.4}
$$

となる．ここで，式（D.4）の｛　　｝内

$$
-\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\Big(T^cT^a\partial'_\nu F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) \tag{D.5}
$$

について考える：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\mathrm{Str}\Big(T^cT^a\partial'_\nu F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\mathrm{tr}\Big\{\big\{T^c,T^a\big\}\partial'_\nu F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big\} \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\mathrm{tr}\Big\{\big\{T^c,T^a\big\}\Big[A_\nu(x')\,,F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big]\Big\} \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\mathrm{tr}\Big\{\Big[\big\{T^c,T^a\big\}\,,A_\nu(x')\Big]F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big\} \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}A^d_\nu(x')\mathrm{tr}\Big\{\Big[\big\{T^c,T^a\big\}\,,T^d\Big]F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big\}
\end{aligned} \tag{D.6}
$$

である．ただし，1 行目で Bianchi 恒等式

$$
\partial_{[\lambda}F_{\mu\nu]} + i\,\big[A_{[\lambda},F_{\mu\nu]}\big] = 0 \tag{D.7}
$$

を用いた．さらに，

$$
\begin{aligned}
\Big[\big\{T^c,T^a\big\}\,,T^d\Big] &= \Big\{T^c\,,\big[T^a\,,T^d\big]\Big\} + \Big\{T^a\,,\big[T^c\,,T^d\big]\Big\} \\
&= if^{ade}\big\{T^c\,,T^e\big\} + if^{cde}\{T^a\,,T^e\}
\end{aligned} \tag{D.8}
$$

であるから，結局，式（D.5）は，

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\Big(T^cT^a\partial'_\nu F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\delta^{(4)}(x-x')A^d_\nu(x') \\
&\qquad \times\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Big\{\Big(f^{ade}\big\{T^c\,,T^e\big\} + f^{cde}\big\{T^a\,,T^e\big\}\Big)F_{\mu_1\nu_1}(x')\Big\} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\delta^{(4)}(x-x')A^d_\nu(x') \\
&\qquad \times\Big\{f^{ade}\mathrm{Str}\Big(T^cT^eF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big) + f^{cde}\mathrm{Str}\Big(T^aT^eF_{\mu_1\nu_1}(x')\Big)\Big\}
\end{aligned} \tag{D.9}
$$

となる．以上より，式（D.1）の右辺は，

$$
\begin{aligned}
& -\left\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\right\}\frac{\delta G^b_{\mathrm{cov}}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\left(\partial'_\nu\delta^{(4)}(x-x')\right)\mathrm{Str}\left(T^cT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\right) \\
&\quad -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}f^{ade}A^d_\nu(x')\delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\left(T^cT^eF_{\mu_1\nu_1}(x')\right) \\
&\quad -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}f^{cde}A^d_\nu(x')\delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\left(T^aT^eF_{\mu_1\nu_1}(x')\right) \\
&\quad +\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}f^{ceb}A^e_\nu(x')\delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\left(T^bT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\right) \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}\left(\partial'_\nu\delta^{(4)}(x-x')\right)\mathrm{Str}\left(T^cT^aF_{\mu_1\nu_1}(x')\right) \\
&\quad -\frac{1}{16\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\mu_1\nu_1}f^{ade}A^d_\nu(x)\delta^{(4)}(x-x')\mathrm{Str}\left(T^cT^eF_{\mu_1\nu_1}(x')\right)
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

となる．したがって，式（D.3），（D.10）より，

$$
\left\{\delta^{ab}\partial_\nu - f^{aeb}A^e_\nu(x)\right\}\frac{\delta G^c_{\mathrm{cov}}(x')}{\delta F^b_{\mu\nu}(x)} = -\left\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\right\}\frac{\delta G^b_{\mathrm{cov}}(x')}{\delta F^a_{\mu\nu}(x)} \tag{D.11}
$$

が得られる．

付録 E

式（5.26）から式（5.28）の計算

最初に，式（5.26）から式（5.27）を考える．すなわち，

$$\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x-x') = T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x-x') \tag{E.1}$$

となることを示す：式（5.26）の左辺

$$\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x-x') \tag{E.2}$$

にテスト関数（任意の関数）$f(x')$ を掛け，x' で積分すると，

$$\begin{aligned}
&\int dx' f(x')\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x-x') \\
&= -\int dx' \partial'_\nu f(x')\cdot\delta^{cb}T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x-x') - f^{ceb}A^e_\nu(x)T^{\mu\nu\,ab}(x)f(x) \\
&= -\delta^{cb}T^{\mu\nu\,ab}(x)\partial_\nu f(x) - f^{ceb}A^e_\nu(x)T^{\mu\nu\,ab}(x)f(x)
\end{aligned} \tag{E.3}$$

となる．ただし，1 行目で部分積分をした．一方，式（5.27）の左辺

$$T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x-x') \tag{E.4}$$

にテスト関数 $f(x')$ を掛け，x' で積分すると，

$$\begin{aligned}
&\int dx' f(x')T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x-x') \\
&= T^{\mu\nu\,ab}(x)\int dx' f(x')\delta^{cb}\partial'_\nu\delta(x-x') - f^{ceb}A^e_\nu(x)T^{\mu\nu\,ab}(x)f(x) \\
&= -\delta^{cb}T^{\mu\nu\,ab}(x)\partial_\nu f(x) - f^{ceb}A^e_\nu(x)T^{\mu\nu\,ab}(x)f(x)
\end{aligned} \tag{E.5}$$

となる．ただし，2 行目で部分積分をした．したがって，式（E.3），（E.5）より，

$$\begin{aligned}
&\int dx' f(x')\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x-x') \\
&= \int dx' f(x')T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{E.6}$$

であることがわかる．$f(x)$ は任意関数であるからはずすと，結局，

$$\begin{aligned}&\Big\{\delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}T^{\mu\nu\,ab}(x')\delta(x-x')\\&\qquad = T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x-x')\end{aligned} \tag{E.7}$$

が得られる．

次に，式（5.27）から式（5.28）を考える．すなわち，

$$T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x-x') = 0 \tag{E.8}$$

のとき，

$$T^{\mu\nu\,ab}(x) = 0 \tag{E.9}$$

となることを示す：式（E.8）にテスト関数 $f(x')$ を掛け，x' で積分すると，

$$\begin{aligned}0 &= \int dx' f(x')T^{\mu\nu\,ab}(x)\Big\{\delta^{\,cb}\partial'_\nu - f^{ceb}A^e_\nu(x')\Big\}\delta(x-x')\\&= -\Big\{\delta^{\,cb}\partial_\nu f(x) + f^{ceb}A^e_\nu(x)f(x)\Big\}T^{\mu\nu\,ab}(x)\end{aligned} \tag{E.10}$$

となる．$f(x)$ は任意関数であるから，式（E.10）が成立するには，

$$T^{\mu\nu\,ab}(x) = 0 \tag{E.11}$$

でなければならないことがわかる．

付録 F

テスト関数を用いた式 (6.20) の証明

この付録ではテスト関数を用いて (6.20) を証明する．すなわち，等式

$$\int d^{2n}x e^{x^2/4s} f(x) = (4\pi s)^n \sum_{k=0}^{\infty} \int d^{2n}x\, f(x) \frac{(-s\Box)^k}{k!} \delta(x) \tag{F.1}$$

の証明を与える．ただし，$f(x)$ は任意関数である．積分変数を x^μ から ξ^μ に変換

$$\xi^\mu = \frac{x^\mu}{\sqrt{4s}} \tag{F.2}$$

し，(F.1) の左辺を

$$\begin{aligned}
(\text{(F.1) の左辺}) &= (4s)^n \int d^{2n}\xi\, e^{\xi^2} f(\sqrt{4s}\xi) \\
&= (4s)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(4s)^{l/2}}{l!} \int d^{2n}\xi\, \xi^{\mu_1}\xi^{\mu_2}\cdots\xi^{\mu_l}\, e^{\xi^2} f_{,\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}(0)
\end{aligned} \tag{F.3}$$

と表す．ただし，$f(\sqrt{4s}\xi)$ を ξ で Taylor 展開し，$f_{,\mu_1\mu_2\cdots\mu_l} = \partial^l f/\partial x^{\mu_l}\cdots\partial x^{\mu_2}\partial x^{\mu_1}$ とした．公式

$$\begin{aligned}
&\int d^{2n}\xi\, \xi^{\mu_1}\xi^{\mu_2}\cdots\xi^{\mu_l}\, e^{\xi^2} \\
&\quad = \begin{cases} \dfrac{\pi^n}{2^k}(\delta^{\mu_1\mu_2}\delta^{\mu_3\mu_4}\cdots\delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}} + \text{permutations}) & (l=2k) \\ 0 & (l=2k+1) \end{cases},
\end{aligned} \tag{F.4}$$

を用いると (F.3) は

$$\begin{aligned}
\text{(F.3)} &= (4s)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4s)^k}{(2k)!} \frac{\pi^n}{2^k} (2k-1)!! \left((-\Box)^k f\right)(0) \\
&= (4\pi s)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((-s\Box)^k f\right)(0)}{k!},
\end{aligned} \tag{F.5}$$

となる．これは (F.1) の右辺に等しい．

付録 G

$a_k(x,x')$ に含まれるガンマ行列の最大個数

ヒートカーネル $K(x,x';s)=e^{-s\not{D}^2}\delta(x-x')$ は微分方程式

$$-\frac{\partial K(x,x';s)}{\partial s}=\not{D}^2 K(x,x';s) \tag{G.1}$$

と境界条件

$$K(x,x';0)=\delta(x-x') \tag{G.2}$$

を満たす．$K(x,x';s)$ の展開を以下のように仮定する：

$$K(x,x';s)=\frac{1}{(4\pi s)^n}e^{(x-x')^2/4s}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x,x')\,s^k. \tag{G.3}$$

境界条件 (G.2) から

$$a_0(x,x)=\mathbf{1} \tag{G.4}$$

が得られる．(G.1) から a_k に対する漸化式

$$(x-x')^\mu D_\mu a_0=0, \tag{G.5}$$

$$(k+1)a_{k+1}+(x-x')^\mu D_\mu a_{k+1}+D_\mu D^\mu a_k+\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}a_k=0 \qquad (k\geq 0) \tag{G.6}$$

が得られる．

(G.4) と (G.5) から $a_0(x,x')$ はゲージ群における平行移動を表す行列であることがわかる [25]．したがって，$a_0(x,x')$ にはガンマ行列 γ^μ が含まれていないことは明らかである．(G.6) から D_μ はガンマ行列を含んでいないので $a_{k+1}(x,x')$ は $a_k(x,x')$ より 2 個多くガンマ行列を含むことがわかる．これらのことから，$a_k(x,x')$ に含まれるガンマ行列の最大個数は $2k$ であることがわかる．

coincidence limit $x'\to x$ をとった後でも $a_k(x,x')$ は最大 $2k$ 個のガンマ行列を持つ．実際，(G.4), (G.5), (G.6) より

$$a_k(x,x)=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right)^k+\cdots \tag{G.7}$$

が得られる．ただし，右辺のドットはガンマ行列が $2k$ 個より少ない項を示す．

付録 H

Osabe と Suzuki の current に現れるヒートカーネル

ヒートカーネル $K_g(x,x';s)=\langle x|e^{-s\not{D}\not{D}_g}|x'\rangle$ は微分方程式

$$-\frac{\partial K_g(x,x';s)}{\partial s}=\not{D}\not{D}_g K_g(x,x';s) \tag{H.1}$$

と境界条件

$$K_g(x,x';0)=\delta(x-x') \tag{H.2}$$

を満たす．$K_g(x,x';s)$ を以下のように展開する：

$$K_g(x,x';s)=\frac{1}{(4\pi s)^n}e^{(x-x')^2/4s}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x,x')\,s^k. \tag{H.3}$$

境界条件 (H.2) から

$$[b_0]=\mathbf{1} \tag{H.4}$$

を得る．ただし，coincidence limit を記述するのに Synge の記号 $[f]=f(x,x)$ を用いた．(H.1) より以下の b_k に対する漸化式

$$(x-x')^\mu\mathscr{D}_\mu b_0=0, \tag{H.5}$$

$$(k+1)b_{k+1}+(x-x')^\mu\mathscr{D}_\mu b_{k+1}+(\mathscr{D}_\mu\mathscr{D}^\mu+P)b_k=0 \qquad (k\geq 0) \tag{H.6}$$

が得られる．ただし，等式

$$\not{D}\not{D}_g=\mathscr{D}_\mu\mathscr{D}^\mu+P \tag{H.7}$$

と

$$\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu + \mathscr{A}_\mu, \tag{H.8}$$

$$\mathscr{A}_\mu = \frac{i}{2}(1+g)A_\mu + \frac{i}{2}(1-g)\gamma_{\alpha\mu}A^\alpha, \tag{H.9}$$

$$\begin{aligned} P = &-\frac{i}{2}(1-g)\partial_\alpha A^\alpha - \frac{1}{2}(n-1)(1-g)^2 A_\alpha A^\alpha \\ &+ \frac{i}{2}\gamma^{\alpha\beta}\left\{(1+g)\partial_\alpha A_\beta + i\left((n-1)g^2 - 2(n-2)g + n - 1\right)A_\alpha A_\beta\right\} \end{aligned} \tag{H.10}$$

を用いた．ただし，$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. である．漸化式 (H.5), (H.6) と (H.4) から以下の coincidence limit が得られる [25]:

$$[\mathscr{D}_\mu b_0] = 0, \tag{H.11}$$

$$[\mathscr{D}_\mu \mathscr{D}_\nu b_0] = \frac{1}{2}\mathscr{F}_{\mu\nu}, \tag{H.12}$$

$$[b_1] = -P. \tag{H.13}$$

ただし，$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathscr{A}_\nu - \partial_\nu \mathscr{A}_\mu + [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu]$ である．これらの式から

$$[\partial_\alpha b_0] = -\frac{i}{2}(1+g)A_\alpha - \frac{i}{2}(1-g)\gamma_{\beta\alpha}A^\beta, \tag{H.14}$$

$$\begin{aligned} [\Box b_0] = &-\frac{i}{2}(1+g)\partial_\alpha A^\alpha + \frac{1}{2}\left((n-1)g^2 - 2ng + n - 1\right)A_\alpha A^\alpha \\ &+ \frac{i}{2}\gamma^{\alpha\beta}\left((1-g)\partial_\alpha A_\beta - i(n-1)(1-g)^2 A_\alpha A_\beta\right), \end{aligned} \tag{H.15}$$

$$\begin{aligned} [b_1] = &\frac{i}{2}(1-g)\partial_\alpha A^\alpha + \frac{1}{2}(n-1)(1-g)^2 A_\alpha A^\alpha \\ &- \frac{i}{2}\gamma^{\alpha\beta}\left\{(1+g)\partial_\alpha A_\beta + i\left((n-1)g^2 - 2(n-2)g + n - 1\right)A_\alpha A_\beta\right\} \end{aligned} \tag{H.16}$$

が得られる．

付録 I

式 (11.137) の導出

$\delta \not{D}$ を求める．

$$\not{D} = \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \frac{1}{4}\omega_{ij\mu}\gamma^{ij} \right) \tag{I.1}$$

である．これを $e_a{}^\mu$ について変分すると

$$\delta\not{D} = \delta e_a{}^\mu \gamma^a D_\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu \delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma^{ij}\delta\omega_{ij\mu} \tag{I.2}$$

となる．

$$\gamma^\lambda\gamma^{ij} = \gamma^{\lambda ij} + e^{i\lambda}\gamma^j - e^{j\lambda}\gamma^i \tag{I.3}$$

を (I.2) に用いると

$$\delta\not{D} = \delta e_a{}^\mu \gamma^a D_\mu + \frac{1}{2}\gamma^j (e^{i\lambda}\delta\omega_{ij\lambda} - e_j{}^\lambda \delta\Gamma^\rho{}_{\rho\lambda}) + \frac{1}{4}\gamma^{\lambda ij}\delta\omega_{ij\lambda} \tag{I.4}$$

となる．ここで，

$$D_\mu e_a{}^\mu = \partial_\mu e_a{}^\mu - \omega^b{}_{a\mu} e_b{}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\mu} e_a{}^\nu = 0 \tag{I.5}$$

を $e_a{}^\mu$ について変分すると得られる

$$e^{i\lambda}\delta\omega_{ij\lambda} - e_j{}^\lambda \delta\Gamma^\rho{}_{\rho\lambda} = (D_\lambda \delta e_a{}^\mu) \tag{I.6}$$

を (I.4) に用いると

$$\delta\not{D} = \delta e_a{}^\mu \gamma^a D_\mu + \frac{1}{2}\gamma^a (D_\mu \delta e_a{}^\mu) + \frac{1}{4}\gamma^{\lambda ij}\delta\omega_{ij\lambda} \tag{I.7}$$

となる．

$$\delta\omega_{ij\lambda} = -(e^a{}_\lambda e_{\underline{i}\mu} D_{\underline{j}} + g_{\mu\lambda}\delta^a_{\underline{i}} D_{\underline{j}} + \delta^a_{\underline{i}} e_{\underline{j}\mu} D_\lambda)\delta e_a{}^\mu \tag{I.8}$$

を（ただし，添え字につけた $\_$ は $A_{\underline{i}}B_{\underline{j}} = 1/2(A_iB_j - A_jB_i)$ を意味する）(I.7) に用いると，結局

$$\delta\not{D} = \delta e_a{}^\mu \gamma^a D_\mu + \frac{1}{2}\gamma^a (D_\mu \delta e_a{}^\mu) - \frac{1}{4}\gamma^a{}_\mu{}^\lambda (D_\lambda \delta e_a{}^\mu) \tag{I.9}$$

が得られる．

付録 J

曲がった空間の場の理論におけるヒートカーネルの方法

曲がった空間の場の理論におけるヒートカーネルの方法 [25] について述べる．先に，ヒートカーネルの方法で用いられる基礎事項についてまとめる．

J.1 geodetic interval と geodetic parallel displacement に関係した coincidence limit

曲がった空間でのデルタ関数の具体形

$2n$ 次元空間の曲がった空間での δ 関数の具体形は Gauss 型の関数を用いて以下のように書ける：

$$\delta\left(x-x'\right)=\lim_{s\to 0}\frac{e(x)}{(4\pi s)^n}\mathrm{e}^{\frac{\sigma(x,x')}{2s}}\quad . \tag{J.1}$$

ただし，計量の signature は Eucilid 的 : $\mathrm{sgn}\, g_{\mu\nu}=(-,-)$ であり，$e(x)=\mathrm{det}e^a{}_\mu(x)$，$\sigma(x,x')$ は geodetic interval (bi-scaler) である．σ の signature は

$$\sigma(x,x')<0 \tag{J.2}$$

である．明らかに

$$\sigma(x,x')=\sigma(x',x) \tag{J.3}$$

である．

geodetic interval

Hamilton-Jacobi eq. より σ に対する以下の関係式が導かれる [25]：

$$\frac{1}{2}\sigma_{.\,\mu}\sigma_{.}^{\ \mu} = \sigma \ , \tag{J.4}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{.\,\mu'}\sigma_{.}^{\ \mu'} = \sigma \ . \tag{J.5}$$

ただし，$_{.\mu}$ は x^μ による共変微分を表し，$_{.\mu'}$ は x'^μ による共変微分を表すものとする．

geodetic parallel displacement

- geodetic parallel displacement bi-vector $g_{\mu\nu'}$

x' にある vector $V^{\nu'}(x')$ を測地線に沿って x まで平行移動する操作を $g^{\mu}{}_{\nu'}(x,x')$ とする：

$$V_{\parallel}^{\mu}(x) = g^{\mu}{}_{\nu'}(x,x')V^{\nu'}(x') \ . \tag{J.6}$$

これを用いると以下が導かれる：

$$\sigma_{.}^{\ \rho} g_{\mu\nu'.\rho} = 0 \ , \tag{J.7}$$

$$\sigma_{.}^{\ \rho'} g_{\mu\nu'.\rho'} = 0 \ . \tag{J.8}$$

$g_{\mu\nu'}$ の coincidence limit は

$$\lim_{x'\to x} g_{\mu\nu'} = g_{\mu\nu} \tag{J.9}$$

である．以下，coincidence limit を記述するのに，Synge の記号 $[f(x,x')] = f(x,x)$ を用いる．明らかに

$$g_{\mu}{}^{\nu'}\sigma_{.\nu'} = -\sigma_{.\mu} \ , \qquad g^{\nu}{}_{\mu'}\sigma_{.\nu} = -\sigma_{.\mu'} \tag{J.10}$$

である．(J.6) より

$$g_{\mu\nu'}g^{\nu'}{}_{\rho} = g_{\mu\rho} \ , \qquad g_{\nu'\mu}g^{\mu}{}_{\rho'} = g_{\nu'\rho'} \tag{J.11}$$

が得られる．平行移動のもとで長さが変わらない条件

$$V_{\parallel\mu}(x)V_{\parallel}^{\mu}(x) = V_{\mu'}(x')V^{\mu'}(x') \tag{J.12}$$

と (J.6) より

$$g_{\mu\sigma'}g_{\nu}{}^{\sigma'} = g_{\mu\nu} \ , \qquad g_{\sigma\mu'}g^{\sigma}{}_{\nu'} = g_{\mu'\nu'} \tag{J.13}$$

が得られる．(J.11)，(J.13) から

$$g_{\mu\nu'} = g_{\nu'\mu} \tag{J.14}$$

が得られる．(J.13) の両辺の det より

$$\det g_{\mu\nu'} = g^{1/2} g'^{1/2} \tag{J.15}$$

が得られる．

- geodetic parallel displacement bi-spinor $I(x, x')$

x' にある spinor $\psi(x')$ を測地線に沿って x まで平行移動する操作を $I(x, x')$ とする：

$$\psi_{\parallel}(x) = I(x, x')\psi(x') \ . \tag{J.16}$$

これを用いると以下が導かれる：

$$\sigma_{\cdot}^{\ \mu} I_{.\mu} = 0 \ , \tag{J.17}$$

$$\sigma_{\cdot}^{\ \mu'} \tilde{I}_{.\mu'} = 0 \ . \tag{J.18}$$

ただし，

$$I \equiv I(x, x') \ , \tag{J.19}$$

$$\tilde{I} \equiv I(x', x) \tag{J.20}$$

とした．$I(x, x')$ の coincidence limit は

$$[I(x, x')] = \mathbf{1} \tag{J.21}$$

である．

coincidence limits 1

geodetic interval σ の coincidence limit は明らかに

$$[\sigma] = 0 \tag{J.22}$$

である．これと (J.4) の両辺の coincidence limit から

$$[\sigma_{.\mu}] = 0 \tag{J.23}$$

が得られる．(J.4) の両辺の共変微分を次々にとると以下が得られる：

$$\sigma_{.\nu} = \sigma_{\cdot}^{\ \mu} \sigma_{.\mu\nu} \ , \tag{J.24}$$

$$\sigma_{.\nu\sigma} = \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\sigma} \sigma_{.\mu\nu} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu} \sigma_{.\mu\nu\sigma} \ , \tag{J.25}$$

$$\sigma_{.\nu\sigma\tau} = \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\sigma\tau} \sigma_{.\mu\nu} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\sigma} \sigma_{.\mu\nu\tau} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\tau} \sigma_{\mu\nu\sigma} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu} \sigma_{.\mu\nu\sigma\tau} \ , \tag{J.26}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu\sigma\tau\rho} = {} & \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\sigma\tau\rho} \sigma_{.\mu\nu} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\sigma\tau} \sigma_{.\mu\nu\rho} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\sigma\rho} \sigma_{.\mu\nu\tau} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\sigma} \sigma_{.\mu\nu\tau\rho} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\tau\rho} \sigma_{.\mu\nu\sigma} \\ & + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\tau} \sigma_{.\mu\nu\sigma\tau} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu}{}_{\rho} \sigma_{.\mu\nu\sigma\tau} + \sigma_{\cdot}^{\ \mu} \sigma_{.\mu\nu\sigma\tau\rho} \ . \end{aligned} \tag{J.27}$$

(J.23) と (J.25) より

$$[\sigma_{.\mu\nu}] = g_{\mu\nu} \tag{J.28}$$

であることがわかる．(J.26) で共変微分の順番を入れ換え，coincidence limit をとると

$$[\sigma_{.\nu\sigma\tau}] = 0 \ , \tag{J.29}$$

が得られる．同様にして (J.27) から

$$[\sigma_{.\nu\sigma\tau\rho}] = \frac{1}{3}(R_{\nu\tau\rho\sigma} + R_{\sigma\tau\rho\nu}) \tag{J.30}$$

が得られる．

coincidence limits 2

(J.10) の第 2 式の共変微分をとり，coincidence limit をとると

$$[g^{\nu}{}_{\mu'} g_{\nu\sigma}] = [D_{\sigma\mu'}] \tag{J.31}$$

となる．ただし

$$D_{\mu\nu'} \equiv -\sigma_{.\mu\nu'} \tag{J.32}$$

とした．(J.31) より

$$[D_{\mu\nu'}] = g_{\mu\nu} \tag{J.33}$$

であることがわかる．ここで

$$D \equiv \det D_{\mu\nu'} \tag{J.34}$$

とおくと

$$[D] = g \tag{J.35}$$

が得られる．(J.4) の両辺の共変微分を次々にとり，coincidence limit をとる．そして，(J.28)，(J.33) を用いると以下が得られる：

$$[\sigma_{.\,\nu\sigma'\tau}] = [\sigma_{.\,\nu\sigma'\tau'}] = 0 \ , \tag{J.36}$$

$$[\sigma_{.\,\nu\sigma\tau'\rho}] = -\frac{1}{3}(R_{\tau\nu\sigma\rho} + R_{\rho\nu\sigma\tau}) \ , \tag{J.37}$$

$$[\sigma_{.\,\nu\sigma'\tau'\rho}] = \frac{1}{3}(R_{\sigma\nu\rho\tau} + R_{\tau\nu\rho\sigma}) \ . \tag{J.38}$$

ただし，(J.37) を導出するとき Bianchi の第 1 恒等式

$$R_{\sigma\nu\tau\rho} + R_{\nu\tau\sigma\rho} + R_{\tau\sigma\nu\rho} = 0 \tag{J.39}$$

を用いた．(J.17) の両辺の共変微分をとり，coincidence limit をとると

$$[I_{.\mu}] = 0 \tag{J.40}$$

が得られる．(J.17) の両辺の共変微分を 2 回とり，coincidence limit をとると

$$[I_{.\mu\nu}] = -\frac{1}{8} R_{ab\mu\nu} \gamma^{ab} \tag{J.41}$$

が得られる．同様にして

$$[I_{.\mu\nu'}] = \frac{1}{8} R_{ab\mu\nu} \gamma^{ab} \tag{J.42}$$

も得られる．(J.18) より同様にして

$$[\tilde{I}_{.\mu'}] = 0 \ , \tag{J.43}$$

$$[\tilde{I}_{\mu'\nu}] = \frac{1}{8} R_{ab\mu\nu} \gamma^{ab} \tag{J.44}$$

も得られる．

divergence of geodesics

（J.4）の共変微分より以下の式が得られる：

$$\sigma_{.\ \mu}^{\ \mu} = 2 - 2\sigma_{.}^{\ \mu} \frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}} \ , \tag{J.45}$$

ただし，

$$(\sqrt{D})_{.\mu} = \frac{\sqrt{D}}{2} (D^{-1})^{\sigma\nu'} D_{\sigma\nu'.\mu} \tag{J.46}$$

を用いた．これから

$$\left[(\sqrt{D})_{.\mu}\right] = \left[(\sqrt{D})_{.\nu'}\right] = 0 \ , \tag{J.47}$$

$$\left[\frac{(\sqrt{D})_{.\nu'\mu}}{\sqrt{D}}\right] = -\frac{1}{6} R_{\mu\nu} \tag{J.48}$$

が得られる．ただし，$R_{\mu\nu}$ は Ricci tensor である．

J.2　ヒートカーネルの方法

ヒートカーネル $K(x, x'; s) = e^{-s\not{D}^2} \delta(x - x')$ は次の微分方程式

$$-\frac{\partial K(x, x'; s)}{\partial s} = \not{D}^2 K(x, x'; s) \, , \tag{J.49}$$

$$\not{D}^2 = D_\mu D^\mu - \frac{R}{4} \tag{J.50}$$

と境界条件

$$K(x, x'; s = 0) = \delta(x - x') \tag{J.51}$$

を満たす．ただし，R はスカラー曲率である．$K(x,x';s)$ の展開を以下のように仮定する：

$$K(x,x';s)=\frac{\sqrt{D(x,x')}}{(4\pi s)^n}\mathrm{e}^{\frac{\sigma(x,x')}{2s}}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x,x')(-s)^k\,. \tag{J.52}$$

境界条件 (J.51) から

$$[a_0(x,x')]=\mathbf{1} \tag{J.53}$$

が得られる．（J.52）を（J.49）の両辺に代入すると左辺は

$$-\frac{\partial K}{\partial s}=\frac{\sqrt{D}}{(4\pi)^n}\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2s}}\sum_k(-1)^k a_k s^{k-n}\left(\frac{\sigma}{2s^2}-\frac{k-n}{s}\right) \tag{J.54}$$

となる．右辺は

$$\begin{aligned}
\not{D}^2K&=\frac{1}{(4\pi)^n}\sqrt{D}\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2s}}\left[\left(\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}}+\frac{\sigma_{.\mu}}{2s}+D_\mu\right)\left(\frac{(\sqrt{D})_{.}{}^{\mu}}{\sqrt{D}}+\frac{\sigma_{.}{}^{\mu}}{2s}+D^\mu\right)-\frac{R}{4}\right]\sum_k(-1)^k a_k s^{k-n}\\
&=\frac{1}{(4\pi)^n}\sqrt{D}\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2s}}\left[\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}(\sqrt{D})^{.\mu}}{D}+\frac{1}{s}\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}}\sigma_{.}{}^{\mu}+2\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}}D^\mu+\frac{1}{4s^2}\sigma_{.\mu}\sigma_{.}{}^{\mu}+\frac{1}{s}\sigma_{.\mu}D^\mu\right.\\
&\qquad\left.+\left(D_\mu\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}}\right)+\frac{1}{2s}\sigma_{.}{}^{\mu}{}_{\mu}+D_\mu D^\mu-\frac{R}{4}\right]\sum_k(-1)^k a_k s^{k-n}
\end{aligned} \tag{J.55}$$

となる．ただし，途中

$$D_\mu\sqrt{D}=\sqrt{D}\left(\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}}+D_\mu\right), \tag{J.56}$$

$$D_\mu\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2s}}=\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2s}}\left(D_\mu+\frac{\sigma_{.\mu}}{2s}\right) \tag{J.57}$$

を用いた．ここで

$$D_\mu\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}}=\frac{(\sqrt{D})_{.}{}^{\mu}{}_{\mu}}{\sqrt{D}}-\frac{(\sqrt{D})_{.}^{\mu}(\sqrt{D})_{.\mu}}{D} \tag{J.58}$$

である．これと (J.4)

$$\frac{1}{2}\sigma_{.\,\mu}\sigma_{.}{}^{\mu}=\sigma \tag{J.4}$$

および（J.45）

$$\sigma_{.}{}^{\mu}{}_{\mu}=2-2\sigma_{.}^{\mu}\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}} \tag{J.45}$$

を (J.55) に用いると

$$\begin{aligned}
&\not{D}^2K\\
&=\frac{1}{(4\pi)^n}\sqrt{D}\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2s}}\left[\frac{1}{2s^2}\sigma+\frac{1}{s}\left(\sigma_{.\mu}D^\mu+1\right)+2\frac{(\sqrt{D})_{.\mu}}{\sqrt{D}}D^\mu+\frac{(\sqrt{D})_{.}{}^{\mu}{}_{\mu}}{\sqrt{D}}+D_\mu D^\mu-\frac{R}{4}\right]\sum_k(-1)^k a_k s^{k-n}
\end{aligned} \tag{J.59}$$

が得られる．これと（J.54）より

$$\sum_k (-1)^k s^k \left(k+\sigma_{.\mu} D^\mu\right) a_k = \sum_k (-1)^k s^{k+1} \left(-\frac{1}{\sqrt{D}}(\sqrt{D} a_k)_{.\mu}{}^{\mu} + \frac{R}{4} a_k\right) \tag{J.60}$$

が得られる．これから次の a_k の漸化式が得られる：

$$\sigma_{.}{}^{\mu} a_{0.\mu} = 0\,, \tag{J.61}$$

$$(k+1)\, a_{k+1} + \sigma_{.}{}^{\mu} a_{k+1.\mu} = \frac{1}{\sqrt{D}}(\sqrt{D} a_k)_{.\mu}{}^{\mu} - \frac{R}{4} a_k\,.\ (k=0,1,2,\cdots) \tag{J.62}$$

（J.17），（J.21）と（J.53），（J.61）より

$$a_0(x,x') = I(x,x') \tag{J.63}$$

であることがわかる．

付録 K

2 次元の $\delta(eR)$

Ricci テンソルを

$$R_{b\nu} = e^{a\mu} R_{ab\mu\nu} \tag{K.1}$$

で定義し，スカラー曲率を

$$R = e^{a\mu} e^{b\nu} R_{ab\mu\nu} \tag{K.2}$$

で定義する．ただし，

$$R_{ab\mu\nu} = \partial_\mu \omega_{ab\nu} - \partial_\nu \omega_{ab\mu} + \omega_{ac\mu} \omega^c{}_{b\nu} - \omega_{ac\nu} \omega^c{}_{b\mu} \tag{K.3}$$

である．(K.2) の $e_a{}^\mu$ による変分をとると

$$\delta R = 2R^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu + e^{a\mu} e^{b\nu} \delta R_{ab\mu\nu} \tag{K.4}$$

となる．(K.3) の $e_a{}^\mu$ による変分は

$$\delta R_{ab\mu\nu} = D_\mu \delta\omega_{ab\nu} - D_\nu \delta\omega_{ab\mu} \tag{K.5}$$

である．ただし，

$$D_\mu \delta\omega_{ab\nu} = \partial_\mu \delta\omega_{ab\nu} - \omega^c{}_{a\mu} \delta\omega_{cb\nu} - \omega^c{}_{b\mu} \delta\omega_{ac\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \delta\omega_{ab\lambda} \tag{K.6}$$

とした．$\delta\omega_{kl\beta}$ の具体形は

$$\delta\omega_{kl\beta} = -(e^a{}_\beta e_{\underline{k}\mu} D_{\underline{l}} + g_{\mu\beta} \delta^a_{\underline{k}} D_{\underline{l}} + \delta^a_{\underline{i}} e_{\underline{j}\mu} D_\beta) \delta e_a{}^\mu \tag{K.7}$$

である．ただし，添え字につけた $\_$ は $A_{\underline{i}} B_{\underline{j}} = 1/2(A_i B_j - A_j B_i)$ を意味する．(K.5) より

$$e^{k\alpha} e^{l\beta} \delta R_{kl\alpha\beta} = 2 e^{k\alpha} e^{l\beta} D_\alpha \delta\omega_{kl\beta} \tag{K.8}$$

が得られる．これに (K.7) を用いると

$$\begin{aligned} e^{k\alpha} e^{l\beta} \delta R_{kl\alpha\beta} &= -2D^k (\eta^{al} e_{\underline{k}\mu} D_{\underline{l}} + e^l{}_\mu \delta^a_{\underline{k}} D_{\underline{l}} + \delta^a_{\underline{k}} e_{\underline{l}\mu} D^l) \delta e_a{}^\mu \\ &= 2 e^a{}_\mu \Box \delta e_a{}^\mu - 2 D^a D_\mu \delta e_a{}^\mu \end{aligned} \tag{K.9}$$

となる．ただし，$\Box = D_k D^k$ である．(K.9) を (K.4) に用いると

$$\begin{aligned}
\delta R &= 2R^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu + 2e^a{}_\mu \Box \delta e_a{}^\mu - 2D^a D_\mu \delta e_a{}^\mu \\
&= 2R^a{}_\mu \delta e_a{}^\mu + 2e^a{}_\mu \Box \delta e_a{}^\mu - 2D_{(a} D_{\mu)} \delta e^{a\mu} \\
&= e^a{}_\mu R \delta e_a{}^\mu + 2e^a{}_\mu \Box \delta e_a{}^\mu - 2D_{(a} D_{\mu)} \delta e^{a\mu},
\end{aligned} \tag{K.10}$$

すなわち，

$$\delta R = e^a{}_\mu R \delta e_a{}^\mu + 2e^a{}_\mu \Box \delta e_a{}^\mu - 2D_{(a} D_{\mu)} \delta e^{a\mu} \tag{K.11}$$

が得られる．ただし，1 行目で

$$D^a D_\mu \delta e_a{}^\mu = D_{(a} D_{\mu)} \delta e^{a\mu} \tag{K.12}$$

を用い，2 行目で

$$R^a{}_\mu = \frac{1}{2} e^a{}_\mu R \tag{K.13}$$

を用いた．(K.11) より，結局

$$\delta(eR) = 2ee^a{}_\mu \Box \delta e_a{}^\mu - 2eD_{(a} D_{\mu)} \delta e^{a\mu} \tag{K.14}$$

が得られる．

参考文献

[1] K. Fujikawa, Phys. Rev. D **21**, 2848 (1980); **22**, 1499(E) (1980)

[2] K. Fujikawa, Phys. Rev. D **29**, 285 (1984).

[3] Y. -Z. Zhang, Phys. Lett. B **219**, 439 (1989).

[4] W. A. Bardeen, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).

[5] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B **37**, 95 (1971).

[6] R. W. Brown, C. C. Shik and B. L. Young, Phys. Rev. **186**, 1491 (1969).

[7] A. P. Balachandran, G. Marmo, V. P. Nair and C.G. Trahern, Phys. Rev. D **25**, 2713 (1982).

[8] M. B. Einhorn and D. R. T. Jones, Phys. Rev. D **29**, 331 (1984).

[9] A. Andrianov and L. Bonora, Nucl. Phys. B **233**, 232 (1984).

[10] L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, Nucl. Phys. B **243**, 449 (1984).

[11] W. A. Bardeen and B. Zumino, Nucl. Phys. B **244**, 421 (1984).

[12] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, Nucl. Phys. B **234**, 269 (1984).

[13] M. Marinkovic, Nucl. Phys. B **366**, 74 (1991).

[14] I. Tsutsui, Phys. Lett.B **229**, 51 (1989).

[15] H. Banerjee, R. Banerjee and P. Mitra, Z. Phys. C **32**, 445 (1986).

[16] H. Banerjee and R. Banerjee, Phys. Lett. B **174**, 313 (1986).

[17] R. Banerjee and H. Banerjee, Z. Phys. C **39**, 89 (1988).

[18] K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies* (Oxford Univ. Press, New York, 2004).

[19] Y. Ohshima, K. Okuyama, H. Suzuki and H. Yasuta, Phys. Lett. B **457**, 291 (1999).

[20] S. Osabe and H. Suzuki, Int. J. Mod. Phys. A **09**, 3377 (1994).

[21] Marcus T. Grisaru and S. Penati, Phys. Lett. B **504**, 89 (2001).

[22] G. V. Dunne and C. A. Trugenberger, Ann. Phys. **204**, 281 (1990).

[23] G. Kelnhofer, Z. Phys. C **52**, 89 (1991).

[24] Z. Qiu and H. Ren Phys. Rev. D **38**, 2530 (1988).

[25] B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields* (Gordon and Breach, London, 1965).

[26] M. Takeuchi and R. Endo, Prog. Theor. Exp. Phys. **2017**, 033B03 (2017).

[27] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. **60A**, 47 (1969).

[28] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).

[29] S. L. Adler and W. A. Bardeen, Phys. Rev. **182**, 1517 (1969).

[30] A. Zee, Phys. Rev. Lett. **29**, 1198 (1972).

[31] G. Bandelloni, C. Becci, A. Blasi and R. Collina, Comm. Math. Phys. **72**, 239 (1980).

[32] K. Higashijima, K. Nishijima and M. Okawa, Prog. Theor. **67**, 668 (1982).

[33] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Ann. Math. **87**, 484 (1968).

[34] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Ann. Math. **87**, 546 (1968).

[35] M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, Invent. Math. **19**, 279 (1973).

[36] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D **16**, 1052 (1977).

[37] L. Alvarez-Gaumé, J. Phys. A **16**, 4177 (1983).

[38] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, Phys. Rep. C **66**, 213 (1980).

[39] C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer, Phys. Lett. B **38**, 519 (1972).

[40] D. J. Gross and R. Jackiw, Phys. Rev. D **6**, 477 (1972).

[41] H. Georgi and S. Glashow, Phys. Rev. **6**, 429 (1972).

[42] S. Ferrera and B. Zumino, Nucl. Phys. B **87**, 207 (1975).

[43] T. E. Clark, O. Piguet and K. Sibold, Nucl., Phys. B **143**, 445 (1978).

[44] N. K. Nielsen, Nucl. Phys. B **244**, 499 (1984).

[45] M. T. Grisaru and P. C. West, Nucl., Phys. B **254**, 249 (1985).

[46] K. Harada and K. Shizuya, Phys. Lett. B **162**, 322 (1985).

[47] E. Guadanini, K. Konishi and M. Mintchev, Phys. Lett. B **157**, 37 (1985).

[48] G. Girardi, R. Grimm and R. Stora, Phys. Lett. B **156**, 203 (1985).

[49] R. Garreis, M. School and J. Wess, Z. Phys. Lett. C **28**, 623 (1985).

[50] H. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **56**, 1534 (1986).

[51] M. G. Green and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B **149**, 117 (1984).

[52] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec and R. Rohm, Nucl. Phys. B **256**, 253 (1985).

[53] H. Suzuki and A. Sugamoto, Phys. Rev. Lett. **57**, 1665 (1986).

[54] K. Pilch, A. N. Schellekens and N. P. Warner, Nucl. Phys. B **287**, 362 (1987).

[55] M. G. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory I,II* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).

[56] Y. Tanii, Phys. Rev. Lett. B **165**, 275 (1985).

[57] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[58] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979).

[59] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967).

[60] C. Becci, A. Rouet and R. Stora, Comm. Math. Phys. **42**, 127 (1975).

[61] J. Zinn-Justin, *Lecture Notes in Physics*, **37** (Splinger-Verlag, Berlin, 1975).

[62] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (World Scientific, 1990).

[63] B. Zumino, Y. -S. Wu, and A. Zee, Nucl. Phys. B **239**, 477 (1984).

[64] B. Zumino, in *Relativity, Groups and Topology II*, eds. B. S. De Witt and R. Stora (Eds.), (North-Holland, Amsterdam, 1984).

[65] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland Publishing, Amsterdam, 1960).

[66] K. Fujikawa, Nucl. Phys. B **226**, 437 (1983).

[67] T. Kimura, Prog Theor. Phys. **42**, 1191 (1969).

[68] R. Delbourgo and A. Salam, Phys. Lett. B **40**, 381 (1972).

[69] T. Eguchi and P. Freund, Phys. Rev. Lett. **37**, 1251 (1976).

[70] N. K. Nielsen, M. T. Grisaru, H. Romer and P. Van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. B **140**, 477 (1978).

[71] R. Endo and T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **63**, 683 (1980).

[72] R. Endo and M. Takao, Phys. Lett. B **161**, 155 (1985).

[73] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

[74] R. Endo and M. Takao, Prog. Theor. Phys. **73**, 803 (1985).

[75] K. Fujikawa, M. Tomiya and O. Yasuda, Z. Phys. C **28**, 289 (1985).

[76] R. Endo and M. Takao, Prog. Theor. Phys. **78**, 440 (1987).

[77] T. Matsuki, Prog. Theor. Phys. **75**, 461 (1986).

[78] F. Bastianelli and P. van Nieuwenhuizen, *Path Integrals and Anomalies in Curved Space* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006).