

誤差項に t 分布を仮定した 閾値自己回帰モデルのベイズ推定

砂 田 洋 志
(人文学部 総合政策科学科)

1. はじめに

金融データの特徴として、(1) 価格変化率の確率分布が裾の広い分布となるということ、(2) ボラティリティーの大きい時期や小さい時期には継続性があること、所謂ボラティリティークラスタリングの存在、が知られている。

閾値自己回帰モデル (Threshold Auto Regressiveモデル、以後TARモデルと略記する) を用いて経済現象の実証分析を行う場合、誤差項に正規分布を仮定したモデルを利用するのが普通である。¹ しかし金融データをTARモデルによって分析するならば、上述した特徴を考慮したモデルもさらに考えてみる必要があるだろう。Li=Li (1996) は (2) の特徴を考慮したTARモデルを考案した。それは誤差項にARCH過程を組み入れたTARモデル、つまり2重閾値ARCHモデル (Double Threshold-ARCH、以後DT-ARCHと略記する) である。次に (1) を考慮した場合はどうであろうか。正規分布ではなくもっと裾の厚い確率分布を仮定することになると考えられる。たとえば t 分布を仮定することが考えられるであろう。

本論文では誤差項に t 分布を仮定したTARモデルを取り上げる。というのも金融市場のデータにTARモデルを適用して、パラメータ推定を行うことを今後の課題としているからである。本論文ではこのモデルを t 分布TARモデル、略して t -TARモデルと記述する。

さて、TARモデルの推定方法には伝統的な統計学に基づく方法とベイズ統計学に基づく方法の2つがある。本論文ではベイズ統計学の立場から t -TARモデルを推定する方法を示すと共に、シミュレーションデータにこの推定方法を適用してその妥当性を確認する。

通常のTARモデルと t -TARモデルの違いは、誤差項の確率分布を正規分布から t 分布に変えるだけである。しかし効率よくベイズ推定を行う際には、複雑な推定方法である棄却サンプリング連鎖 (rejection sampling chain) を利用することになる。この手法を適用することによって、理論とプログラミングの両面が複雑になってしまうが、効率的に推定できる。

ここでTARモデルの発展について触れておこう。閾値モデルは構造変化を伴うモデルの1つであり、Tong (1978) とTong=Lim (1980) が考案した自己励起型閾値自己回帰モデル

¹ TARモデルの詳細は第2節を参考にされたい。

(Self-Exciting Threshold Auto Regressive model、以後SE-TARモデルあるいは単にTARと略記する)が有名である。TARモデルは1変量モデルの1つであり、過去の値がどの範囲の値をとるかで(現時点の)レジームが変化してモデルも変化する、構造変化を扱うモデルの1つである。TARモデルは精密化が図られてきており、前述したように誤差項がARCH過程に従うと仮定したモデルも考案されてきた。たとえばLi=Li(1996)はDT-ARCHを提案するとともに、同モデルで香港株式市場を分析し、モデルの適合度も検証している。さらにBrooks(2001)は2重閾値GARCHモデル(Double Threshold-GARCH)でフランス・フランとドイツ・マルクの為替を分析している。ここで言う2重とは、自己回帰部分の係数とARCH過程の係数の両方が閾値で同時に変化することを指している。上述した2つの論文はどちらもベイズ統計学を用いて推定していない。

次にベイズ統計学の立場からTARモデルをファイナンスへ応用した例を挙げてみよう。Pfann, Schotman and Tschernig(1996)は金利の期間構造の分析で閾値効果を考慮している。つまり金利に関する幾つかのモデルに閾値を導入したモデルを考えて、MCMCを用いたベイズ流の推定を行っている。分析に当たっては全てのパラメータにフラットな事前分布を仮定している。さらにGoldman=Agbeyegbe(2003)は米英の金利を対象にした平均回帰モデルをベイズ推定している。彼らは平均回帰モデルに閾値を組み込むと共に誤差項にARMA-GARCHを仮定している。

本論文の構成であるが、第2節では t -TARモデルの説明を行う。 t -TARモデルよりも簡単な構造を有するという理由から第3節では誤差項に t 分布を仮定した通常の自己回帰モデル(以後は t -ARモデルと略記する)の推定方法を説明する。第4節では誤差項に t 分布を仮定した閾値自己回帰モデルの推定方法を説明する。その後、パラメータを与えた上でデータを人工的に生成し、そのデータを用いてパラメータの推定を行い、推定方法の妥当性を検討する。最後の第5節で結論を述べる。

2. t -TARモデルの概説

Tong(1978)及びTong=Lim(1980)によって考案されたTARモデルは、2変量時系列過程 $\{x_t, y_t\}$ において x_t の過去の値(x_{t-d})によって y_t の自己回帰モデルが別の自己回帰モデルへと変更してしまうモデルである。本論文では説明を明確にするため2種類の自己回帰モデルしかない、つまりレジームが2つのモデルだけを考える。もちろん3つ以上のレジームを考えることは可能である。レジームが2つで、最初のレジームにおける自己回帰モデルの次数が p_1 、2番目のレジームにおける自己回帰モデルの次数が p_2 の場合、TAR(2, p_1 , p_2)と略記される。

このモデルを式で記述すれば以下の通りである。

$$y_t = \begin{cases} \gamma_0^{(1)} + \gamma_1^{(1)}y_{t-1} + \cdots + \gamma_{p_1}^{(1)}y_{t-p_1} + u_t^{(1)} & x_{t-d} \leq r \\ \gamma_0^{(2)} + \gamma_1^{(2)}y_{t-1} + \cdots + \gamma_{p_2}^{(2)}y_{t-p_2} + u_t^{(2)} & x_{t-d} > r \end{cases} \quad \dots (1)$$

ただし、 $u_t^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は第 i レジームの式における時点 t の誤差項であり、平均 0 で標準偏差が $\sigma_{(i)}$ の正規分布に従っている、つまり $u_t^{(i)}$ ($i = 1, 2$) $\sim N(0, \sigma_{(i)}^2)$ であると仮定する。 t -TAR モデルの場合は誤差項の確率分布として t 分布を仮定する。つまり誤差項の確率分布として t 分布を仮定している点だけが、正規分布を仮定する TAR モデルと異なる。また $u_t^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は相互に独立であると仮定する。この式から判る通り、 y_t は y_t 以外の変数である x_t の過去の値 x_{t-d} が閾値 (r) を超えるのをキッカケにして、その自己回帰モデルを変更する。

閾値自己回帰モデルで x_t と y_t が同じ場合、SE-TAR モデルあるいは簡単に TAR モデルと呼ばれる。式で記述すれば以下の通りである。

$$y_t = \begin{cases} \gamma_0^{(1)} + \gamma_1^{(1)}y_{t-1} + \cdots + \gamma_{p_1}^{(1)}y_{t-p_1} + u_t^{(1)} & y_{t-d} \leq r \\ \gamma_0^{(2)} + \gamma_1^{(2)}y_{t-1} + \cdots + \gamma_{p_2}^{(2)}y_{t-p_2} + u_t^{(2)} & y_{t-d} > r \end{cases} \quad \dots (2)$$

(2) で示された自己回帰部分は閾値を境にして、 y_{t-d} が r 以下になれば、次数 p_1 の自己回帰モデルになる。一方、 y_{t-d} が r よりも大きければ、次数 p_2 の自己回帰モデルになる。つまり閾値を境にして y_t の自己回帰モデルが変化する。

誤差項が平均 0 で標準偏差 $\sigma_{(i)}$ の正規分布に従っていると仮定すれば、通常の TAR モデルである。一方、誤差項の確率分布として t 分布を仮定すれば、 t -TAR モデル、あるいは t -SE-TAR モデルとなる。

3. t -AR モデルの推定方法

t -TAR モデルのバイズ推定について説明する前に、誤差項が t 分布に従う自己回帰モデルをバイズ推定する方法について解説しておこう。本節の議論は Koop (2003) と渡部 (2001) を参考にしている。バイズ推定するに当たっては情報事前分布 (informed prior) を仮定する。以下では本論文における推定方法の詳細について説明する。

3.1 t -AR モデル

t -AR モデルを行列表記する際に用いる Y と X であるが、 $Y = \{y_{p+1}, y_{p+2}, y_{p+3}, \dots, y_{n+p-1}, y_{n+p}\}$ 、 X は $\{Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_{n+p}\}$ 、 $Y_t = \{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \dots, y_{t-p}\}$ とする。

誤差項が正規分布に従うものの、その分散が不均一であると仮定した回帰モデルをモデル 1

と呼ぶ。数式を用いると以下のように記述できる。ただし対角行列 Ω の対角要素を纏めて n 次元ベクトル $\omega \equiv (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n)$ と記述する。

$$\text{モデル 1} : Y = X\gamma + u \quad u \sim N(0, \sigma^2 \Omega) \quad \text{diag}(\Omega) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n)$$

事前分布として γ には正規分布 $N(\gamma_0, A_0)$ 、 σ^2 には自然共役な逆ガンマ分布 $IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{s_0^2 \nu_0}{2}\right)$ 、 ω の各要素 ω_i には逆ガンマ分布 $IG\left(\frac{\nu_\lambda}{2}, \frac{\nu_\lambda}{2}\right)$ を仮定する。推定に必要な尤度関数は以下の通りである。

$$L(Y | \gamma, \sigma^2, \Omega) \propto \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (Y - X\gamma)' \Omega^{-1} (Y - X\gamma)\right\} \dots \quad (3)$$

次に誤差項が自由度 ν_λ の t 分布に従う均一分散の回帰モデルをモデル 2 と呼ぶ。数式を用いると以下のように記述できる。

$$\text{モデル 2} : Y = X\gamma + u \quad u \sim t(0, \sigma^2, \nu_\lambda)$$

つまりモデル 1 と同じ回帰係数 γ 、同じ分散 σ^2 を有する回帰モデルであることに加えて、誤差項が t 分布に従い、その自由度がモデル 1 の Ω のハイパーパラメータ ν_λ と同じである。

モデル 1 で γ 、 σ^2 と ω に上述したような情報事前分布を仮定した場合の事後密度と、モデル 2 で γ と σ^2 に情報事前分布を仮定した際の事後密度は、Koop (2003) によれば同一である。² モデル 1 で γ と σ^2 に非情報事前分布、そして ω に情報事前分布を仮定した場合の事後密度が、モデル 2 で γ と σ^2 に非情報事前分布を仮定した場合の事後密度と同一であることを Geweke (1993) は証明している。

したがって ν_λ を所与として誤差項の分散が不均一な回帰モデル（モデル 1）のパラメータをベイズ推定することは、誤差項が自由度 ν_λ を所与とした t 分布に従う回帰モデル（モデル 2）のパラメータを推定したことに同一である。

本論文では自由度 ν_λ も未知パラメータとして推定したい。そこで以下では γ 、 σ^2 、 ω と ν_λ という 4 つのパラメータをベイズ推定する際の方針を示す。

モデル 1 の推定であれば ω のハイパーパラメータ ν_λ は分析者が指定する値なので既知である。ゆえに、 ω 、 γ 、 σ^2 を Gibbs サンプリングで推定すれば良い。しかし現実には推定したいのは、誤差項が自由度 ν_λ の t 分布に従うモデル 2 であり、自由度 ν_λ が未知である。だから ν_λ も

² Geweke (1993) を利用して確認してある。

サンプリングする必要がある。

推定したいモデル 2 の事後密度は上述した事後密度に ν_λ の事前密度をかけた値である。ゆえにその事後密度から $\gamma, \sigma^2, \omega, \nu_\lambda$ といったパラメータのフルコンディショナルな事後分布を計算すれば良い。 ν_λ の事前分布をかけても事後密度の中で γ, σ^2, ω に関係する部分は変化しないから、モデル 2 のパラメータ γ, σ^2, ω のフルコンディショナルな事後分布は、 ν_λ を所与とした誤差項の分散が不均一な回帰モデルにおける γ, σ^2, ω のフルコンディショナルな事後分布と同一である。そこで不均一分散モデルで導出したフルコンディショナルな事後分布を利用して推定する。

次に未知パラメータである自由度 ν_λ の推定である。 ν_λ のフルコンディショナルな事後分布から簡単にサンプリングできない。そこで棄却連鎖サンプリングという効率的なサンプリング方法を用いて推定する。Geweke (1993) は、棄却連鎖サンプリング法と比べて効率性の低い採択棄却法を用いて自由度を含めたパラメータの推定を行っている。

以上の様に不均一分散モデルの推定方法を利用しながら、誤差項が t 分布に従うモデルの推定を行う。

本論文における計算では $\omega, \gamma, \sigma^2, \nu_\lambda$ をサンプリングする。以後の小節でこれらのパラメータのサンプリング方法について詳しく説明しよう。

3.1.1 ω のサンプリング

分散共分散行列 Ω は $n \times n$ の対角行列であり、その対角要素の ω は n 個の要素から構成され、 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ と記述した。前述したとおり ω_i ($i=1, 2, \dots, n$) の事前分布として $IG\left(\frac{\nu_\lambda}{2}, \frac{\nu_\lambda}{2}\right)$ という逆ガンマ分布を仮定すると、 ω_i のフルコンディショナルな事後分布は以下のような分布となる。

$$P(\omega_i | \cdot) = IG\left(\frac{\nu_\lambda + 1}{2}, \frac{\nu_\lambda + \varepsilon_j^2 / \sigma^2}{2}\right) \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1+p, 2+p, \dots, n+p)$$

この逆ガンマ分布から ω_i をサンプリングする。

ω の事前分布のパラメータ ν_λ が既知であれば、 $\omega_i, \gamma, \sigma^2$ を Gibbs サンプリングすれば良い。しかし現実には ν_λ が未知であるから、 ν_λ もサンプリングする必要がある。本論文における計算では γ, σ^2 の後にサンプリングする。

3.1.2 γ のサンプリング

事前分布として $N(\gamma_0, A_0)$ を仮定して γ のフルコンディショナルな事後分布を計算する

と、以下のような平均と分散を有する正規分布になる。この正規分布から γ をサンプリングする。

$$\text{平均} : \left(\frac{X' \Omega^{-1} X}{\sigma^2} + A_0^{-1} \right)^{-1} \left(\frac{X' \Omega^{-1} Y}{\sigma^2} + A_0^{-1} \gamma_0 \right)$$

$$\text{分散} : \left(\frac{X' \Omega^{-1} X}{\sigma^2} + A_0^{-1} \right)^{-1}$$

3.1.3 σ^2 のサンプリング

事前分布として逆ガンマ分布 $IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0 s_0^2}{2}\right)$ を仮定すると、 σ^2 のフルコンディショナルな事後分布は以下の通りである。

$$p(\sigma^2 | Y, X, \gamma, \Omega) \sim IG\left(\frac{\nu_0 + n}{2}, \frac{s^2 + \nu_0 s_0^2}{2}\right)$$

ただし $s^2 = (Y - \hat{Y})' \Omega^{-1} (Y - \hat{Y})$ 、 $\hat{Y} = X\gamma$ である。この逆ガンマ分布から σ^2 をサンプリングする。

3.1.4 ν_λ のサンプリング

ν_λ の事前分布としてガンマ分布 $GAM(1, \theta_0)$ を仮定する。この場合の ν_λ のフルコンディショナルな事後分布からサンプリングするのは困難なので、棄却連鎖サンプリング (reject sampling chain) 法を用いて ν_λ をサンプリングする。本小節では棄却連鎖サンプリングを ν_λ のサンプリングに適用する上で必要な関数の導出を行う。その後の 3.2 で、同サンプリングの説明を行うとともに、それを ν_λ のサンプリングに適用する方法を説明する。

γ に非情報事前分布を仮定すると、事前分布について幾つかの制約が出るが、本論文では情報事前分布を仮定しているのでその問題は回避される。以下の棄却連鎖サンプリングに基づいた ν_λ のサンプリングについては中妻 (2003) を参考にして説明する。

事前分布 $GAM(1, \theta_0)$ を仮定した場合の事後分布から ν_λ に関する部分を取り出したものは以下の通りである。³

$$p(\nu_\lambda | Y, X, \gamma, \sigma^2, \omega) \propto \left(\frac{\nu_\lambda}{2}\right)^{\frac{n\nu_\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_\lambda}{2}\right)^{-n} \exp(-\eta\nu_\lambda)$$

$$\text{ただし } \eta = \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{1}{\lambda_i} + \lambda_i \right) \text{ である。}$$

³ この式は中妻(2003)の(6.58)式で α_0 を 1, ν を ν_λ , λ_i を $1/\omega_i$ と変更したものである。

ここで $f(\nu_\lambda)$ を以下の様に定義すると、 $f(\nu_\lambda)$ に従う乱数を生成すれば、 $p(\nu_\lambda | Y, X, \gamma, \sigma^2, \omega)$ に従う乱数を生成したことになる。

棄却連鎖サンプリングを用いて $f(\nu_\lambda)$ に従う乱数を生成するので、その際に利用する近似分布を以下で導出する。

$$f(\nu_\lambda) \propto \left(\frac{\nu_\lambda}{2}\right)^{\frac{n\nu_\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_\lambda}{2}\right)^{-n} \exp(-\eta\nu_\lambda)$$

$\ln f(\nu_\lambda)$ をモード ν_λ^* の近傍で 2 次の項までテイラー展開すると、以下のような近似式が導出できる。

$$\ln f(\nu_\lambda) \approx \ln f(\nu_\lambda^*) + \frac{d^2 \ln f(\nu_\lambda^*) (\nu_\lambda - \nu_\lambda^*)^2}{2 d\nu_\lambda^2}$$

ただし $\frac{d^2 \ln f(\nu_\lambda^*)}{d\nu_\lambda^2} = \frac{N}{2} \left(\frac{1}{\nu_\lambda^*} - \frac{1}{2} \Psi' \left(\frac{\nu_\lambda^*}{2} \right) \right)$

である。さらに σ_*^2 を以下のように定義すると、

$$\sigma_*^2 = \left(-\frac{d^2 \ln f(\nu_\lambda^*)}{d\nu_\lambda^2} \right)^{-1}$$

$\ln f(\nu_\lambda)$ は以下のように近似できる。

$$\ln f(\nu_\lambda) \approx \ln f(\nu_\lambda^*) - \frac{(\nu_\lambda - \nu_\lambda^*)^2}{2\sigma_*^2}$$

したがって $f(\nu_\lambda)$ は以下のように記述できる。

$$f(\nu_\lambda) \approx f(\nu_\lambda^*) \times \exp\left\{-\frac{(\nu_\lambda - \nu_\lambda^*)^2}{2\sigma_*^2}\right\}$$

$$\approx \sqrt{2\pi\sigma_*^2} \Phi\left(\frac{\nu_\lambda^*}{\sigma_*}\right) f(\nu_\lambda^*) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_*^2} \Phi\left(\frac{\nu_\lambda^*}{\sigma_*}\right)} \exp\left\{-\frac{(\nu_\lambda - \nu_\lambda^*)^2}{2\sigma_*^2}\right\}$$

ここで $\sqrt{2\pi\sigma_*^2} \Phi\left(\frac{\nu_\lambda^*}{\sigma_*}\right) f(\nu_\lambda^*)$ は ν_λ^* に依存する定数なので K^* と記述しよう。そして

$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_*^2} \Phi\left(\frac{\nu_\lambda^*}{\sigma_*}\right)} \exp\left\{-\frac{(\nu_\lambda - \nu_\lambda^*)^2}{2\sigma_*^2}\right\}$ は ν_λ の関数なので $h(\nu_\lambda)$ と記述しよう。 $h(\nu_\lambda)$ は

切断正規分布 $N^+(\nu_\lambda^*, \sigma^{*2})$ の確率密度関数である。

$p(\nu_\lambda | Y, \gamma, \sigma^2, \omega)$ に比例する $f(\nu_\lambda)$ は以上のように K^* と $h(\nu_\lambda)$ で近似される。つまり、

$$p(\nu_\lambda | Y, \gamma, \sigma^2, \omega) \propto f(\nu_\lambda) \approx K^* \times h(\nu_\lambda)$$

である。したがって $p(\nu_\lambda | Y, \gamma, \sigma^2, \omega)$ そして $f(\nu_\lambda)$ からの乱数は K^* と $h(\nu_\lambda)$ 、そして棄却サンプリング連鎖を用いて生成できる。

最後にモード ν_λ^* の計算方法である。 $\ln f(\nu_\lambda)$ のモードなので以下に示す一階の条件を満たす。

$$\frac{N}{2} \left(\ln \left(\frac{\nu_\lambda^*}{2} \right) + 1 - \Psi \left(\frac{\nu_\lambda^*}{2} \right) \right) - \eta = 0$$

したがってニュートン法や二分法等を用いて上式を満たす ν_λ^* を計算して $f(\nu_\lambda)$ の近似式に代入すればよい。

3.2 棄却サンプリング連鎖

本小節では、 t 分布の自由度 ν_λ のサンプリングを念頭において、棄却サンプリング連鎖について一般的な説明を行う。その後で ν_λ のサンプリングへの応用に触れる。

$f(\nu)$ という確率密度関数からの乱数を生成したいが、 $f(\nu)$ から直接生成することが不可能な場合を考えてみよう。ただし $f(\nu)$ と似た確率密度関数 $h(\nu)$ からの乱数を生成することは可能であるとする。もし既知の K に対して $f(\nu) \leq K \times h(\nu)$ が全ての ν で満たされるならば、棄却採択法を用いることによって $f(\nu)$ という確率密度関数からの乱数を生成可能である。しかし K が未知で、 $f(\nu) \leq K \times h(\nu)$ が全ての ν で満たされるとは限らない場合もある。この場合に $h(\nu)$ からの乱数を利用して $f(\nu)$ という確率密度関数からの乱数を生成する方法が棄却サンプリング連鎖である。

棄却サンプリング連鎖による乱数の生成方法は以下に示す 1) ~ 6) である。サンプリング方法を考察してみよう。前述した通り、採択棄却法では全ての ν について $f(\nu) \leq K \times h(\nu)$ の成り立つことが必要である。もし $f(\nu) \leq K \times h(\nu)$ を成り立たせるような K が未知で、全ての ν について $f(\nu) \leq K \times h(\nu)$ が成り立っていないにも係らず、以下の 1) ~ 3) に従って乱数を生成した場合、生成された乱数は $\min \{f(\nu), K \times h(\nu)\}$ に従うと考えられる。⁴

- 1) u を $[0, 1)$ の一様分布から生成する。
- 2) ν を $h(\nu)$ から生成する。

⁴ この理由の詳細は付録Aで説明してある。

$$3) \quad u < \frac{f(\nu)}{K h(\nu)} \quad \text{ならば } \nu \text{ を採用する。}$$

$$u > \frac{f(\nu)}{K h(\nu)} \quad \text{ならば } \nu \text{ を棄却して 1) に戻る。}$$

ここで $g(\nu)$ を以下の様に定める。

$$g(\nu) \propto \min \{ f(\nu), K \times h(\nu) \}$$

つまり、 $\min \{ f(\nu), K \times h(\nu) \}$ に比例する関数として定める。

1) ~ 3) に従って乱数を生成すれば $g(\nu)$ からの乱数が生成されるが、 $g(\nu)$ は $f(\nu)$ ではないので、 $f(\nu)$ からの乱数を生成したければ、さらに工夫しなくてはならない。ここで $g(\nu)$ を独立連鎖における乱数生成用の確率密度関数と考えることにより、 $f(\nu)$ からの乱数を独立連鎖によって生成できる。具体的には 1) ~ 3) に続いて以下に示す 4) ~ 6) の手順を踏めば、 $f(\nu)$ からの乱数を生成できる。

4) ν を $g(\nu)$ から生成する。つまり 1) ~ 3) に従って乱数を生成する。

5) u を $[0, 1)$ の一様分布から生成する。

6) ν^{r-1} を直前のサンプリングで選んだ値とした場合、今サンプリングした ν と ν^{r-1} の何れを採用するかは以下の基準に従う。

$$u \leq \alpha(\nu^{r-1}, \nu) \quad \text{ならば } \nu \text{ を採用する。}$$

$$u > \alpha(\nu^{r-1}, \nu) \quad \text{ならば } \nu \text{ を棄却する。}$$

$$\text{ただし } \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{f(\nu) g(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) g(\nu)}, 1 \right) \text{ である。}$$

さらに $\alpha(\nu^{r-1}, \nu)$ は $f(\nu)$ と $K \times h(\nu)$ の大小関係によって以下の様書き直すことが可能である。⁵

$$\alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{K \times h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1})}, 1 \right) \quad \text{ただし } f(\nu) \leq K \times h(\nu) \text{ の場合}$$

$$\alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{f(\nu) h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) h(\nu)}, 1 \right) \quad \text{ただし } f(\nu) > K \times h(\nu) \text{ の場合}$$

3.1.4 では棄却連鎖サンプリング法を用いて $f(\nu_\lambda)$ に従う乱数を生成することを前提にして、 $f(\nu_\lambda)$ を近似すると同時にサンプリングし易い分布を導出した。以下では棄却連鎖サンプリングを利用した乱数生成の手順について考えてみよう。

⁵ この様に簡単に纏められる理由の詳細は付録Bで説明してある。

$f(\nu_\lambda)$ は以下の様に近似できることを既に示してある。

$$f(\nu_\lambda) \approx f(\nu_\lambda^*) \times \exp\left\{-\frac{(\nu_\lambda - \nu_\lambda^*)^2}{2\sigma_*^2}\right\} = K^* \times h(\nu_\lambda)$$

$$\text{ただし、} K^* = \sqrt{2\pi\sigma_*^2} \Phi\left(\frac{\nu_\lambda^*}{\sigma_*}\right) f(\nu_\lambda^*), \quad h(\nu_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_*^2} \Phi\left(\frac{\nu_\lambda^*}{\sigma_*}\right)} \exp\left\{-\frac{(\nu_\lambda - \nu_\lambda^*)^2}{2\sigma_*^2}\right\} \text{である。}$$

$f(\nu_\lambda)$ は K^* と $h(\nu_\lambda)$ によって上述した様に近似できるものの、

$$f(\nu_\lambda) \leq K^* \times h(\nu_\lambda)$$

という関係が全ての ν_λ に対して成り立たず、一部の ν_λ に対して成り立っているに過ぎない。したがって $f(\nu_\lambda)$ に従う乱数の生成には採択棄却法ではなく棄却連鎖サンプリングを利用することが適切となるのである。

K を K^* 、 ν を ν_λ に変更し K^* と $h(\nu_\lambda)$ をそれぞれ上述した通りに定めた上で、棄却連鎖サンプリングを行えば、 $f(\nu_\lambda)$ からのサンプルを得られる。

4. t -TARモデルの推定方法

本論文ではレジームが2つの場合の t -TARモデルのベイズ推定法を述べる。誤差項に正規分布を仮定したTARモデルの推定ならばGeweke=Terui (1993) を利用すれば良いが、 t 分布を仮定したので推定方法を紹介している。ベイズ推定するに当たっては情報事前分布 (informed prior) を仮定する。また閾値 r のサンプリングにはランダム・ウォーク・チェーン・サンプリング法を用いる。そして遅れ変数 d の決定であるが、最初に d を固定した上で他のパラメータをベイズ推定し、推定結果を利用して d ごとにAICを計算する。最小のAICをもたらす d 及び、その場合の推定値を正式な推定値として選択する。⁶ AIC以外の基準を考慮することも可能であろう。⁷ 以下では本論文における推定方法の詳細について説明する。

4.1 t -TARモデル

TARモデルでは t 時点ではなく $t-d$ 時点の値、つまり y_{t-d} の値が r 以下であると、時点 t ではレジーム1に属して $\gamma^{(1)}$ というパラメータを有する次数 p_1 の自己回帰モデルに従うと考える。逆に大きければ $\gamma^{(2)}$ というパラメータを有する次数 p_2 の自己回帰モデルに従うと考える。

⁶ Goldman=Agbeyegbe (2003) を参考に行っている。

⁷ Goldman=Agbeyegbe (2003) では周辺尤度も計算している。

この先、行列を用いて表示することが多いので、 $Y^{(j)}$ と $X^{(j)}$ ($j = 1, 2$) といった行列変数について説明しておこう。

$Y^{(1)}$ と $Y^{(2)}$ は閾値 r に基づいてデータ Y を分けて作成する。さらに $X^{(1)}$ と $X^{(2)}$ は $Y^{(1)}$ と $Y^{(2)}$ を用いて作成する。 $Y^{(1)}$ は $y_{t,d}$ が r 以下の値となる y_t だけを集めて作ったベクトルである。一方、 $Y^{(2)}$ は $y_{t,d}$ が r よりも大きな値となる y_t だけを集めて作ったベクトルである。() 付き添字は所属するレジームを表す。

次に $X^{(1)}$ であるが、 $X^{(1)}$ は行列であり、その行数は $Y^{(1)}$ と同じだが列数は $p_1 + 1$ である。そして $X^{(1)}$ の各行は対応する $Y^{(1)}$ の要素の 1 時点前の値、2 時点前の値、 \dots 、 p_1 時点前の値によって構成される。たとえば y_t がレジーム 1 に属し、上から s 番目の要素の場合、これに対応する $X^{(1)}$ の第 s 行は $1, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p_1}$ である。行列 $X^{(2)}$ も同様に作成する。

3. 1 のモデル 2 の事後密度を計算する際にモデル 1 の事後密度を利用した様に、誤差項が不均一分散に従う TAR モデルの尤度を利用して、誤差項に t 分布を仮定した TAR モデルをベイズ推定する。誤差項が不均一分散に従う TAR モデルの尤度関数は以下の通りである。

$$L(Y|\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \sigma_{(1)}^2, \sigma_{(2)}^2, \Omega_{(1)}, \Omega_{(2)}, X, d, r) \\ \propto \frac{1}{(2\sigma_{(1)}^2)^{\frac{n_1}{2}}} |\Omega_{(1)}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{(1)}^2} (Y^{(1)} - X^{(1)}\gamma^{(1)})' \Omega_{(1)}^{-1} (Y^{(1)} - X^{(1)}\gamma^{(1)})\right\} \\ \times \frac{1}{(2\sigma_{(2)}^2)^{\frac{n_2}{2}}} |\Omega_{(2)}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{(2)}^2} (Y^{(2)} - X^{(2)}\gamma^{(2)})' \Omega_{(2)}^{-1} (Y^{(2)} - X^{(2)}\gamma^{(2)})\right\} \dots \quad (4)$$

事前分布であるが、 r は一様分布、 $\gamma^{(1)}$ は正規分布 $N(\gamma_{01}, A_1)$ 、 $\gamma^{(2)}$ は正規分布 $N(\gamma_{02}, A_2)$ 、 $\sigma_{(1)}^2$ には自然共役な逆ガンマ分布 $IG\left(\frac{\nu_{01}}{2}, \frac{\nu_{01} s_{01}^2}{2}\right)$ 、 $\sigma_{(2)}^2$ には同様に $IG\left(\frac{\nu_{02}}{2}, \frac{\nu_{02} s_{02}^2}{2}\right)$ を仮定する。次に対角行列 $\Omega_{(1)}$ 、 $\Omega_{(2)}$ の対角要素を n_1 次元ベクトル $\omega^1 \equiv (\omega^1_1, \omega^1_2, \dots, \omega^1_{n_1-1}, \omega^1_{n_1})$ と n_2 次元ベクトル $\omega^2 \equiv (\omega^2_1, \omega^2_2, \dots, \omega^2_{n_2-1}, \omega^2_{n_2})$ と記述しよう。 ω^1_i と ω^1_j の事前分布としては $IG\left(\frac{\nu^1_\lambda}{2}, \frac{\nu^1_\lambda}{2}\right)$ と $IG\left(\frac{\nu^2_\lambda}{2}, \frac{\nu^2_\lambda}{2}\right)$ を仮定する。 $\nu^1_\lambda, \nu^2_\lambda$ には $GAM(1, \theta_0^1)$ と $GAM(1, \theta_0^2)$ を仮定する。 t -TAR モデルと t -AR モデルの違いは閾値である。そこで閾値以外のパラメータについては、 t -AR モデルと同様の方法で推定できる。 $r, \omega^1, \omega^2, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \sigma_{(1)}^2, \sigma_{(2)}^2, \nu^1_\lambda, \nu^2_\lambda$ のサンプリングを行う。以後ではこれらのパラメータのサンプリング方法について詳しく説明しよう。

4.1.1 $\omega^{(1)}$ と $\omega^{(2)}$ のサンプリング

分散共分散行列 $\Omega_{(1)}$, $\Omega_{(2)}$ はそれぞれ $n_1 \times n_1$ と $n_2 \times n_2$ の対角行列であり、その対角要素を ω^1, ω^2 と名づけた。 ω^1, ω^2 はそれぞれ n_1 と n_2 個の要素から構成され、 $\omega^1 \equiv (\omega^1_1, \omega^1_2, \dots, \omega^1_{n_1-1}, \omega^1_{n_1})'$ と $\omega^2 \equiv (\omega^2_1, \omega^2_2, \dots, \omega^2_{n_2-1}, \omega^2_{n_2})'$ と記述した。 ω^1_i と ω^2_j の ($i=1, 2, \dots, n_1, j=1, 2, \dots, n_2$) の事前分布として $IG\left(\frac{\nu^1_\lambda, \nu^1_\lambda}{2}, \frac{\nu^1_\lambda}{2}\right)$ と $IG\left(\frac{\nu^2_\lambda, \nu^2_\lambda}{2}, \frac{\nu^2_\lambda}{2}\right)$ という逆ガンマ分布を仮定すると、 ω^1_i と ω^2_j のフルコンディショナルな事後分布は以下のようになる。

$$p(\omega^1_i | \cdot) = IG\left(\frac{\nu^1_\lambda + 1}{2}, \frac{\nu^1_\lambda + \varepsilon_i^2 / \sigma_1^2}{2}\right) \quad p(\omega^2_j | \cdot) = IG\left(\frac{\nu^2_\lambda + 1}{2}, \frac{\nu^2_\lambda + \varepsilon_j^2 / \sigma_2^2}{2}\right)$$

4.1.2 $\gamma^{(1)}$ と $\gamma^{(2)}$ のサンプリング

事前分布として $N(\gamma_{01}, A_1)$ と $N(\gamma_{02}, A_2)$ を仮定して、 $\gamma^{(i)}$ のフルコンディショナルな事後分布を計算すると、以下のような平均と分散を有する正規分布になる。この正規分布から $\gamma^{(i)}$ をサンプリングする。

$$\text{平均} : \left(\frac{X^{(i)'} \Omega_{(i)}^{-1} X^{(i)}}{\sigma_{(i)}^2} + A_i^{-1} \right)^{-1} \left(\frac{X^{(i)'} \Omega_{(i)}^{-1} Y^{(i)}}{\sigma_{(i)}^2} + A_i^{-1} \gamma_{0i} \right)$$

$$\text{分散} : \left(\frac{X^{(i)'} \Omega_{(i)}^{-1} X^{(i)}}{\sigma_{(i)}^2} + A_i^{-1} \right)^{-1} \quad (i=1, 2)$$

4.1.3 $\sigma_{(1)}^2$ と $\sigma_{(2)}^2$ のサンプリング

事前分布として逆ガンマ分布 $IG\left(\frac{\nu_{01}}{2}, \frac{\nu_{01} s_{01}^2}{2}\right)$ と $IG\left(\frac{\nu_{02}}{2}, \frac{\nu_{02} s_{02}^2}{2}\right)$ を仮定すると、 $\sigma_{(1)}^2$ と $\sigma_{(2)}^2$ のフルコンディショナルな事後分布は以下の通りである。

$$p(\sigma_{(1)}^2 | Y, X, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \sigma_{(2)}^2, \Omega_{(1)}, \Omega_{(2)}, d, r) \sim IG\left(\frac{\nu_{01} + n_1}{2}, \frac{s_1^2 + \nu_{01} s_{01}^2}{2}\right)$$

$$p(\sigma_{(2)}^2 | Y, X, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \sigma_{(1)}^2, \Omega_{(1)}, \Omega_{(2)}, d, r) \sim IG\left(\frac{\nu_{02} + n_2}{2}, \frac{s_2^2 + \nu_{02} s_{02}^2}{2}\right)$$

ただし $s_1^2 = (Y^{(1)} - \hat{Y}^{(1)})' \Omega_{(1)}^{-1} (Y^{(1)} - \hat{Y}^{(1)})$, $\hat{Y}^{(1)} = X^{(1)} \gamma^{(1)}$, $s_2^2 = (Y^{(2)} - \hat{Y}^{(2)})' \Omega_{(2)}^{-1} (Y^{(2)} - \hat{Y}^{(2)})$, $\hat{Y}^{(2)} = X^{(2)} \gamma^{(2)}$ である。この逆ガンマ分布から $\sigma_{(1)}^2$ と $\sigma_{(2)}^2$ をサンプ

リングする。

4.1.4 ν^1_λ と ν^2_λ のサンプリング

事前分布として $\text{GAM}(1, \theta_0^1)$ と $\text{GAM}(1, \theta_0^2)$ を仮定する。この場合のフルコンディショナルな事後分布から ν^1_λ と ν^2_λ をサンプリングするのは困難なので棄却連鎖サンプリング (reject sampling chain) 法を用いる。詳細については 3.2 を参照されたい。

4.1.5 閾値 r のサンプリング方法

r の候補は以下のように生成する。

$$r_t = r_{t-1} + \varepsilon_t$$

そして r_t を用いて計算した事後密度と、 r_{t-1} を用いて計算した事後密度を計算してその比をとったものが、採択確率になる。

自己回帰のラグの次数と遅れ変数 d の決定に AIC を用いる。Tong (1980) に従ってレジームが 2 つの TAR モデルの AIC は個々の AR モデルの AIC の和と考える。

4.2 シミュレーションデータを用いた推定

4.1 では t -TAR モデルの推定方法について説明してきた。この推定方法の妥当性を確認するために、パラメータを与えた上で生成したデータを上述した方法で推定し直してみる。真の値が判った上での推定であるから、妥当性の確認はできるであろう。

モデルとしてはレジームが 2 つで、それぞれの自己回帰モデルのラグ次数が 1 という単純なモデルを利用する。数式で記述すれば以下の通りである。

$$y_t = \begin{cases} \gamma_0^{(1)} + \gamma_1^{(1)} y_{t-1} + u_t^{(1)} & y_{t-d} \leq r \\ \gamma_0^{(2)} + \gamma_1^{(2)} y_{t-1} + u_t^{(2)} & y_{t-d} > r \end{cases} \quad \dots (5)$$

パラメータは $\gamma_0^{(1)} = 0.7$, $\gamma_1^{(1)} = -0.6$, $\gamma_0^{(2)} = -0.6$, $\gamma_1^{(2)} = 0.5$, $\sigma_{(1)}^2 = 5$, $\sigma_{(2)}^2 = 2$, $\nu_\lambda^1 = 5$, $\nu_\lambda^2 = 50$, $r = 0.6$, $d = 1$ とおいてデータを生成した。このデータに対して $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $d = 1$ というモデルと $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $d = 1$ という 2 種類のモデルをベイズ推定した。決定係数と対数尤度がともに大きかった $d = 1$ のモデルを選んだ。その推定

結果は表 1 の通りである。各パラメータの事前分布であるが、 $\gamma_{(1)}^0$ は、 $N\left(\begin{pmatrix} 0.7 \\ -0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\right)$

$\gamma_{(2)}^0$ は $N\left(\begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}\right)$ と設定した。 $\sigma_{(1)}^2$ の事前分布は、 $IG\left(\frac{5}{2}, \frac{5 \times 3}{2}\right)$

$\sigma_{(2)}^2$ の事前分布は $IG\left(\frac{6}{2}, -\frac{6 \times 2}{2}\right)$ と設定した。 ν_{λ}^1 の事前分布は GAM (1, 5)、

ν_{λ}^2 の事前分布は GAM (1, 50) と設定した。ランダムウォークサンプリングで利用する誤差項の標準偏差はデータの標準偏差に0.05 ($d=1$ a のとき) を掛けた値とした。真の閾値でデータを分割した上で、データ毎に単純回帰モデルを最小二乗推定した結果を $\gamma_0^{(1)}, \gamma_1^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \gamma_1^{(2)}, \sigma_{(1)}^2, \sigma_{(2)}^2$ の最小二乗推定値として参考までに記述しておく。⁸

表1 t -TARによる推定結果 ($d=1, p=1$, 誤差項が t 分布に従う自己回帰モデル)

パラメータ	OLSE	真の値	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
閾値	---	0.60	0.5790	0.49397	0.06975
遅れ変数	---	1	1	N/A	N/A
$\gamma_0^{(1)}$	0.80599	0.70	0.63250	0.19860	0.10617
$\gamma_1^{(1)}$	-0.47540	-0.60	-0.54731	0.10556	0.08264
$\sigma_{(1)}^2$	9.25096	5.0	4.73225	0.92017	0.47262
ν_{λ}^1	---	5	4.61102	2.09553	0.79728
$\gamma_0^{(2)}$	-0.63854	-0.60	-0.44540	0.27690	0.07346
$\gamma_1^{(2)}$	0.50668	0.50	0.46248	0.07614	0.06245
$\sigma_{(2)}^2$	2.45004	2	1.99135	0.33603	0.29217
ν_{λ}^2	---	50	30.34359	29.15324	0.87800

$$y_t = \gamma_0^{(1)} + \gamma_1^{(1)} y_{t-1} + u_t \quad u_t \sim t(0, \sigma_{(1)}^2, \nu_{\lambda}^1) \cdots \text{レジーム 1}$$

$$y_t = \gamma_0^{(2)} + \gamma_1^{(2)} y_{t-1} + u_t \quad u_t \sim t(0, \sigma_{(2)}^2, \nu_{\lambda}^2) \cdots \text{レジーム 2}$$

r の採択率：0.5748, レジーム1の自由度の採択率：0.4249, レジーム2の自由度の採択率：0.9629,
レジーム1のデータ数：140, レジーム2のデータ数：159.

5. 結論

本論文では、まず誤差項に t 分布を仮定した閾値自己回帰モデル (t -TARモデル) を紹介した。その後で同モデルをベイズ統計学の立場から推定方法をする方法を紹介した。さらにパラメータを事前に定めた上でデータを生成し、そのデータからパラメータを推定した。その結果、同モデルの推定値が事前に決めた値をうまく推定していると判断されたので、推定方法が妥当なものであると判断された。

⁸ 最小二乗推定の結果とベイズ推定の結果では仮定に違いのあることに注意されたい。特に σ^2 であるが、ベイズ推定値では $\sigma^2 \Omega$ の σ^2 を推定しているのに対して、最小二乗推定では $\sigma^2 I$ の σ^2 を推定している。

参考文献

- [1] Brooks, C., 2001, “A Double-threshold GARCH Model for the French Franc/Deutschmark Exchange Rate,” *Journal of Forecast*, Vol. 20, pp135-143.
- [2] Chen, C. W. S. and Lee, J. C., 1995, “Bayesian Inference of Threshold Autoregressive Models,” *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 16, pp483-492.
- [3] Geweke, J., 1993, “Bayesian Treatment of the Independent Student-t Linear Model,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 8, ppS19-S40.
- [4] Geweke, J. and Terui, N., 1993, “Bayesian Threshold Autoregressive Models for Nonlinear Time Series,” *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 14, pp441-454.
- [5] Goldman, E. and Agbeyegbe, T. D., 2003, “Non-linearity in UK and US Short-term Interest Rate Data: Estimation of a Threshold-CKLS Model with ARMA-GARCH Error,” mimeography.
- [6] 刈屋武昭・照井伸彦, 1997, 『非線形経済時系列分析法とその応用—ガウス性検定と非線形モデル—』, 岩波書店.
- [7] 刈屋武昭・矢島美寛・田中勝人・竹内啓, 2003, 『経済時系列の統計』, 岩波書店
- [8] Koop, G., 2003, *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons.
- [9] Li, C. W. and Li, W. K., 1996, “On a Double-Threshold Autoregressive Heteroscedastic Time Series Model,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11, pp253-274.
- [10] 中妻照雄, 2003, 『ファイナンスのためのMCMC法によるベイズ分析』, 三菱経済研究所.
- [11] Pfann, G. A. and Schotman, P. C. and Tschernig, R., 1996, “Nonlinear Interest Dynamics and Implications for the Term Structure,” *Journal of Econometrics*, Vol. 74, pp149-176.
- [12] 砂田洋志, 2004, 「2重閾値ARCH (DT-ARCH) モデルのベイズ推定—米国10年もの長期金利への適用—」, 2004年日本統計学会報告論文.
- [13] Sunada, H., 2004, “Bayesian Estimation for Threshold Auto Regressive Model,” The 9th China—Japan Symposium on Statistics, Guilin, China.
- [14] Tong, H., 1978, “On a Threshold Models,” in *Pattern Recognition and Signal Processing*, Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam.
- [15] Tong, H. and Lim, K. S., 1980, “Threshold Autoregression, Limit Cycle and Cyclical Data,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 42, pp245-292.
- [16] Tsay, R. S., 1989, “Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 84, pp231-240.
- [17] 山本拓, 1988, 『経済の時系列分析』, 創文社.

付録A

3.2の1)～3)に従って生成された乱数が $g(\nu) = \min\{f(\nu), K \times h(\nu)\}$ に従うことの確認。

$g(\nu)$ を $\min\{f(\nu), K \times h(\nu)\}$ に比例する関数として、以下のように定める。

$$g(\nu) \propto \min\{f(\nu), K \times h(\nu)\}$$

以下で K 、 $h(\nu)$ と棄却採択法を用いて $g(\nu)$ から乱数を生成する手順を最初に示す。次に全ての ν について $f(\nu) < K \times h(\nu)$ が満たされていないのに棄却採択法を利用してサンプリングする手順を示す。両者の手順が最終的に一致すれば、両者は同一のものと考えられる。

・棄却採択法を用いて $g(\nu)$ から乱数を生成する手順

1) u を $[0, 1)$ の一様分布から生成する。

2) ν を $h(\nu)$ から生成する。

3) $u < \frac{g(\nu)}{K h(\nu)}$ ならば ν を採用する。

$u \geq \frac{g(\nu)}{K h(\nu)}$ ならば ν を棄却して1)に戻る。

$f(\nu)$ と $K \times h(\nu)$ の大小関係によって $g(\nu)$ の内容は変化する。3) は以下のように書き直せる。

3a) $f(\nu) < K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u < \frac{f(\nu)}{K h(\nu)}$ ならば ν を採用する。

3b) $f(\nu) < K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u \geq \frac{f(\nu)}{K h(\nu)}$ ならば ν を棄却して1)に戻る。

3c) $f(\nu) > K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u \geq \frac{K h(\nu)}{K h(\nu)} = 1$ ならば ν を棄却して1)に戻る。

3d) $f(\nu) > K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u < \frac{K h(\nu)}{K h(\nu)} = 1$ ならば ν を採用する。

$f(\nu) < K \times h(\nu)$ の場合、 $\frac{f(\nu)}{K h(\nu)}$ と u の大小関係によって採択される場合もあれば、棄却される場合もある。一方、 $f(\nu) \geq K \times h(\nu)$ の場合、 $u \sim [0, 1)$ であるから ν は必ず採用される。

・全ての ν について $f(\nu) < K \times h(\nu)$ が満たされないのに棄却採択法を利用した場合

1) と2) は共通である。3) は $f(\nu)$ と $K \times h(\nu)$ との大小関係によって以下の様書き直せる。

3 a') $f(\nu) < K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u < \frac{f(\nu)}{Kh(\nu)}$ ならば ν を採用する。

3 b') $f(\nu) < K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u \geq \frac{f(\nu)}{Kh(\nu)}$ ならば ν を棄却して 1) に戻る。

3 c') $f(\nu) \geq K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u \geq \frac{f(\nu)}{Kh(\nu)}$ (≥ 1) ならば ν を棄却して 1)

に戻る。

3 d') $f(\nu) \geq K \times h(\nu)$ の場合 $\dots u < \frac{f(\nu)}{Kh(\nu)}$ (≥ 1) ならば ν を採用する。

$f(\nu) < K \times h(\nu)$ の場合、 $\frac{f(\nu)}{Kh(\nu)}$ と u の大小関係によって採択される場合もあれば、棄却される場合もある。一方、 $f(\nu) \geq K \times h(\nu)$ の場合、 $u \sim [0, 1)$ であるから ν は必ず採用される。したがって 2 つのサンプリング方法は共通であり、同一であると考えられる。

付録B

$\alpha(\nu^{r-1}, \nu)$ を2つの場合に分けられる理由。

$$g(\nu) = \min \{f(\nu), K \times h(\nu)\} \text{ であるから、 } \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{f(\nu) g(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) g(\nu)}, 1 \right)$$

の内容は $f(\nu)$ と $K \times h(\nu)$ の大小関係及び $f(\nu^{r-1})$ と $K \times h(\nu^{r-1})$ の大小関係によって変化する。そこで大小関係を調べてみると、以下の4種類に分けられる。

(1) $f(\nu) < K h(\nu)$ かつ $f(\nu^{r-1}) < K h(\nu^{r-1})$ ならば

$$g(\nu) = f(\nu), g(\nu^{r-1}) = f(\nu^{r-1})$$

(2) $f(\nu) < K h(\nu)$ かつ $f(\nu^{r-1}) > K h(\nu^{r-1})$ ならば

$$g(\nu) = f(\nu), g(\nu^{r-1}) = K h(\nu^{r-1})$$

(3) $f(\nu) > K h(\nu)$ かつ $f(\nu^{r-1}) < K h(\nu^{r-1})$ ならば

$$g(\nu) = K h(\nu), g(\nu^{r-1}) = f(\nu^{r-1})$$

(4) $f(\nu) > K h(\nu)$ かつ $f(\nu^{r-1}) > K h(\nu^{r-1})$ ならば

$$g(\nu) = K h(\nu), g(\nu^{r-1}) = K h(\nu^{r-1})$$

次に以上の4通りについて $\alpha(\nu^{r-1}, \nu)$ を具体的に計算してみよう。

$$(1) \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{f(\nu) g(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) g(\nu)}, 1 \right) = \min \left(\frac{f(\nu) f(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) f(\nu)}, 1 \right)$$

$$= \min(1, 1) = 1$$

$$(2) \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{f(\nu) g(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) g(\nu)}, 1 \right) = \min \left(\frac{f(\nu) K h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) f(\nu)}, 1 \right)$$

$$= \min \left(\frac{K h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1})}, 1 \right)$$

$$(3) \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{f(\nu) g(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) g(\nu)}, 1 \right) = \min \left(\frac{K h(\nu) f(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) K h(\nu)}, 1 \right)$$

$$= \min(1, 1) = 1$$

$$(4) \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min \left(\frac{f(\nu) g(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) g(\nu)}, 1 \right) = \min \left(\frac{f(\nu) K h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) K h(\nu)}, 1 \right)$$

$$= \min \left(\frac{f(\nu) h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) h(\nu)}, 1 \right)$$

本文では $\alpha(\nu^{r-1}, \nu)$ を以下の2つと書き直せると記述している。(2)と(4)については整合的であるが、(1)と(3)についてはもう少し考察が必要である。

$$\alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min\left(\frac{K \times h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1})}, 1\right) \quad \text{ただし } f(\nu) \leq K \times h(\nu) \text{ の場合}$$

$$\alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min\left(\frac{f(\nu) h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) h(\nu)}, 1\right) \quad \text{ただし } f(\nu) > K \times h(\nu) \text{ の場合}$$

$$(1) \text{ では } f(\nu^{r-1}) < K \times h(\nu^{r-1}) \text{ であったから } \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min\left(\frac{K \times h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1})}, 1\right)$$

と記述しても $\alpha(\nu^{r-1}, \nu) = 1$ となる。同様に (3) では $f(\nu^{r-1}) < K \times h(\nu^{r-1})$ かつ

$$f(\nu) > K \times h(\nu) \text{ であったから、} \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min\left(\frac{f(\nu) g(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) g(\nu)}, 1\right) \\ = \min\left(\frac{f(\nu) K h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) K h(\nu)}, 1\right) \text{ と記述しても } \alpha(\nu^{r-1}, \nu) = 1 \text{ となる。以上から } \alpha(\nu^{r-1}, \nu)$$

を以下の2つと書き直すことには問題がない。

$$\alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min\left(\frac{K \times h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1})}, 1\right) \quad \text{ただし } f(\nu) \leq K \times h(\nu) \text{ の場合}$$

$$\alpha(\nu^{r-1}, \nu) = \min\left(\frac{f(\nu) h(\nu^{r-1})}{f(\nu^{r-1}) h(\nu)}, 1\right) \quad \text{ただし } f(\nu) > K \times h(\nu) \text{ の場合}$$

Bayesian Estimation of Threshold Auto Regressive Model, whose disturbance obey t distribution

Hiroshi SUNADA

(Department of Public Policy and Social Studies,
Faculty of Literature and Social Sciences)

In this paper we introduce Threshold Auto Regressive Model, whose disturbance obey t distribution. We name this model t -TAR and show how to estimate the model by Bayesian MCMC method.

The difference of ordinary TAR model from t -TAR model is only distribution of disturbance. But when we estimate the model, the difference makes estimation difficult. We use complicated but efficient sampling method, rejection sampling chain.

In this paper we estimate 2 regime t -TAR model whose *lag* order is commonly 1, and confirm validity of the proposed method.