

## 生徒が生み出す数学

### — 民族数学および文化と数学の視点から —

森 川 幾 太 郎

教育学部 数学教育研究室

菊 池 久 人

山形市立第二中学校

(平成12年9月26日受理)

### 概 要

この論攷は、二部で構成され、その第一部を第一筆者が、第二部を第二筆者がそれぞれ担当する。第一部では、森川が過去において行った提案と対比しながら、D'AmbrosioやP. Gerdesらが提唱する民族数学の特徴を明らかにする。例えば、彼らは、図形や数に関わる話題をその教育素材として取り上げても、物理分野や量を主体にした算術分野の話題を取り上げていないことを述べる。第二部では、山形県内に現存する算額の問題を原問題に、生徒がその発展問題作りに取り組んだ実践の概要と生徒の作った問題のいくつかを紹介する。こうした民族文化の伝統を生かした生徒主体の問題作りに関わる展開も「民族数学」の提案には見ることができない。

### 第一部 民族数学—その主張の特徴

#### 1. はじめに

「分数ができない大学生」<sup>(1)</sup>が1999年に発刊され、版を重ねていることにも見られるように、「学力低下」は現在の日本における深刻な教育課題の一つである。反面、90年代前期に実施された第3回国際学力調査で日本の児童生徒が高得点を得ていたこと、国内で実施した到達度調査の結果から学力低下の事実はない<sup>(2)</sup>、という声も聞こえてくる。しかし、分数に関わるM. E. Brennerらの調査を見れば、日本の子ども達の正答率はアメリカの子ども達よりは高いが、中国、台湾の子ども達にはそこで用いられたほとんどの問題、とりわけ、分数の意味を多角的に問う問題で及んでいない<sup>(3)</sup>。この調査でも計算能力に関してはまだ一定の水準を維持していることは見えるが、その機械的学力ですら危機的状況にあることを示したのが「分数ができない大学生」や2000年刊行の「小数ができない大学生」であった。

ところで、大学生の数学の学力低下の真の原因は、この本の著者達は触れていないが、彼らが数学を日常的に使っていないことにある。これは、数学が学校内の世界にのみ終始

し、人々が様々の場で判断を迫られたとき、それぞれの場に応じて数学をどう使いそれらの問題にどう対面するか、という観点からの教育がなされてこなかったことでもある。

私は、この学力問題以上に深刻な問題は、「学習離れ」の進行ととらえる。日本では昔から数学嫌いが多く、「数学嫌いの多いのが常態」というなかで、数学嫌いの多さは気にかかる問題としながらも、学力問題に比べれば、この問題への取り組みが弱かったことは率直に認めなければいけないであろう。しかし、第三回の国際学力調査の数学部門の報告書にあるように、中学生の家庭での学習時間が国際平均値を下回り、将来数学を活かした仕事につきたい、とする中学生の占める割合が参加国中の下位に位置する、という事実、さらには勉強嫌いは、数学、英語など上級学校への進学で重視されてきたいくつかの教科で起きているものではなく、学習そのものに対して起きている、という事態の進行に直面してはのんびりと構えているわけにはいかない<sup>(4)</sup>。

学習嫌い増加は、社会から絶対的な貧困が消え、また昨今の様々な事件からいわゆる有名校への進学へのむなしさ感が広がる、などの社会的要因も無視できないが、教科学習で扱う課題にもその大きな原因がある。即ち、日常の授業の課題の多くが受験学力の育成ではあっても「生きる力を育む」ためのものではない。これは、残念ながら、多くの教師が、教科書の解説者として機能しても、諸事象の構造を明らかにする、の視点から課題探しを怠り、自前の題材で授業を作るよう機能してこなかったことを反映している。

筆者の一人森川は、数学の題材を豊かにする、という視点から、様々な教材化を試みってきた。その視点は

○経済を含む様々な社会事象あるいは物理現象を数学的に表現する方法の探求と、その数学的表現をもとに各事象のもつ本質を数学の側面から明らかにする

○形のもつ秘密を変換の考えを中心に、場合によっては数の性質も用い、明らかにするであり、もう一つは

○長年にわたって人々によって作り上げられてきた様々な術の本質を数学の側面から明らかにする

であった。この三番目の視点から行った提案から3つの事例を選びその概略を紹介する。

### 1) 等周問題から発展して

一定の周長をもつ閉曲線で囲まれた図形の中で最大面積もつ図形は円であるが、この証明には、通常、変分法が用いられ、大学生でも偏微分法を学んだ2年生以降の扱いになる。しかし、等周問題も扱う図形を三角形に限定すれば、その面積公式を学んでいる小学校5年生で扱うことができる。この論証では二等辺三角形がより面積が大きい図形であることをまず導き、そして、どの底辺に対しても二等辺三角形になる場合、即ち正三角形のときに面積が最大となる、を導く<sup>(5)</sup>。

日本では切り妻型の屋根が多い。その理由として、左右対称図形であるので、屋根による加重が左右同じであり、さらには、鉛直水平の両方向にのびをもつ安定感のある形である、がまずあげられる。他に、「二等辺三角形はより面積が大きい形」を屋根に適用すると、切妻屋根にすることで、屋根裏部分の体積がより大きくでき、屋根を通しての外気温と室内温との交流をより小さくできる、をあげることができる。二等辺三角形の屋根は

細工がしやすい、も大事な理由であろう。

次いで、四角形で等周問題を考える。その対角線で2つの三角形に分割し、三角形に関わる等周問題の前段で見出した結論から、より面積の大きい形はひし形、を導く。そして、ひし形の面積公式から、等周四角形において最大面積図形は正方形、が導かれる。この結論を日本家屋に多用されている横開きの二枚戸の窓枠に適用すると、以下に示す理由からその形が正方形であることが合理的であることがわかる。

日本では窓は、まず、室内に外気を流入させ、室温を下げる役割をもつ。「外気の流入」の観点から、横開きという条件のもとでは二枚の戸が合同、が導かれ、さらに、光を室内に最大に取り入れるという条件を加えることで、「窓枠は正方形が望ましい」が明らかになる<sup>(6)</sup>。

ところで、空気の入れ換え、という条件からは二枚戸の窓であれば同時に開けることのできる、押し開き方式の方がよい。それがなぜ横開きの戸が主流になったのであろうか。それは、家の重さを壁ではなく、柱で支える方式を選択したためであろう。夏は開け放ちができ、冬は閉め切ることができる、という自在さを求めて、柱方式にしたのであろう。京都・嵯峨野の祇王寺であったか、大原の焼けてしまった寂光院であったか、書院の壁に大きな丸窓が切っただけである。壁構造の家ならば、丸窓の押し開き式の窓を多数見ることになったであろう。

窓も暑さの厳しい地域では、日本とは異なり、外気との交流が少なく、日光を室内に入れない、という条件がつくことになろう。これらの地域では、窓部の面積は小さい、が望ましい形となる。それが長方形であれば、細長いもののほど面積を小さくでき、三角形であれば、底辺部が短く、高さの低いものが望ましい形になる。このように、窓の形一つを考えても、その地域の気候や文化が反映され、そこで必要とされる形に違いがある。

## 2) 大工仕事の解説書から

和風建築の規矩術に関わる解説書には必ずといってよいほど、寄棟屋根の棒隅製作に関わる規矩術が扱われている。この説明は、説明にあたって平面図を添えることをはじめとして、墨入れに関わる記述は江戸中期発刊の技術書と現在発刊のそれとの間に大きな違いはない。そして、そこには、和算書と同様、墨入れ法は書いてあっても根拠は示されていない<sup>(7)</sup>。

そこで、私なりの方法で、各材の切断法の数学的根拠を明らかにしたことがある。そこで用いたのは、2つの直角三角形の相似定理である。空間内で相似図形を扱う、にやや問題はあがあるがその論理は中学生が十分扱え得るものである。なお、伝統的技術書では、寄せ棟屋根の棒隅直下の形は正方形に限定しているが、私は、この部分を長方形に変えた場合についての墨入れ法も扱った<sup>(8)</sup>。

## 3) 人工水路の秘密

登山道は峰や尾根筋を走ることが多い。これは、この部分を走る登山道が等高線と直交していることでもある。つまり、登山道は二つの等高線上にある点と点とを結ぶ最短線であり、その二等高線間での最大傾斜線でもある。実は、人工水路も登山道と同じ理屈で作られている。日本での人工水路の多くは農業用水であったこともあり、各部分で最大傾斜

をもつよう峰部分を縫いながら造られている。

人工水路のもつ秘密は、後に紹介するように、小学校中学年で扱うことができる。

これらの提案は、先にも触れたように、人々が行ってきた知恵や技の本質を数学を用いて明らかにし、この学習を通して数学への関心や興味を喚起させることを目的とした。ところで、民族の知恵を数学的に解析する、という作業は民族数学でも行われてきている。次節と次々節で、民族数学に関わる理念や実際の授業課題に関わる提案のいくつかを紹介する。

## 2. 民族数学の提案

「民族数学」は、Paulus Gerdesによれば、1920年代後半期、ドイツのFettweisによる提案などその前史となる動きもあったが、本格化するのは1970年代後半からという。それは、この前後に、発展途上にある国々が欧米各国における数学教育現代化の移植を試みたがいずれの国においてもその移植に失敗、が第一の理由であり、そして、教育全般にわたって「独立指向」の動きの急速化、が第二の理由という。そこには人種差別や偏見に対する闘いのあったことも彼は指摘している<sup>(9)</sup>。

また、彼は、以下のようにD'Ambrosioの主張のいくつかも引用し、民族数学のもつ一つの面を明らかにする。

- 1) 子ども達は、入学前、あるいは学校外で、数の数え方や量のこと、さらには量化的方法や推測の方法を学んだり使ったりしている。しかし、学校数学はそれらを排除したり無視してきた。これらが原因になって、子ども達の多くは学校で学んだことに同化できず、結局忘れ去ってしまう。
- 2) 学校数学は知識、理解を手助けし、よく知られた行為のカリキュラム化を手助けしなければならない。

さらに、P. Gerdesは民族数学について、その主張者によりさまざまな見解があることを紹介し、そのいくつかを次のように整理する<sup>(10)</sup>。

- ー 民族数学には数える、測定、図案、遊び、説明といった事柄が含まれ、数学的思考方に広く関わっている。
- ー 民族数学は数学自身の発達でも、数学指導や学習でもその社会からの影響を分析し、さらにその役割を重視する。
- ー 「数学は文化的産物」の観点から数学を扱う。どんな民族も独自の数学を作ってきた。数学というとかく全世界的な存在、というイメージが強いが、数学も歴史を持ち、数学が生み出された社会や文化的条件を強く反映している。
- ー アフリカやアジア、南米にとっては、学校数学は異邦人のカリキュラムの移植という見方が強い。しかし、実際に学校で教えている内容の多くはそれぞれの地域で生み出されたものである。
- ー 民族数学は、かつては、初期に入植した人たちの数学的知識をしっかりとらせるという意味で使われていた。彼らは植民主義擁護のための文化的要因を数学をはじめ多くの分野で探し求めた。

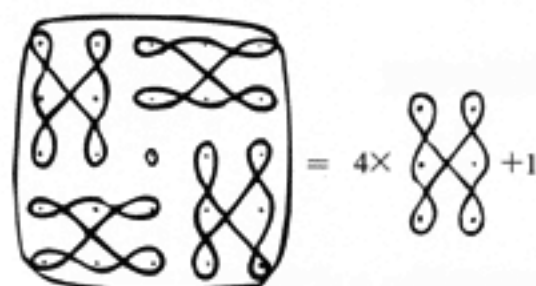


- 一 民族数学はクラスでの数学を磨き上げたり、行ったりする出発点として、文化的要因や活動の探求を行う学習である。
- 一 教育的には、民族数学は生徒達に生活する場を実際に考えさせ、彼らを解放し、発展させることを願って、数学を使えるようにするために行われている。

### 3. どんなことが取り上げられてきたのか

一節で紹介したように、私も伝統的建築物やそこでの技術を数学的に解析し、その教材化を行ってきたが、この視点からの提案は多くの人によって試みられてきた。例えば、1920年代、直観幾何の導入を強く主張したWilliam Betzの提案にもこのことを見ることができる。Betzは、直観幾何の素材の一つとしてアメリカ原住民の建物を取り上げた。BetzにはGerdesやD'Ambrosioのような民族の文化の解析を数学を通して行う、の視点はなく、柱体や錐体に関わる学習素材として、原住民の住まいを例に用いた、という立場からの扱いである。Betzは原住民の様々な建物を取り上げ、その名前とその数学的特性を調べるよう提案している<sup>(11)</sup>。

Gerdesは、Betzとは異なり、まず素材があり、それを数学的に分析し、その素材の数学的特性を明らかにする、という視点から扱っている。彼の提案の2例を簡略に紹介しよう。  
○アンゴラの砂絵に数学を見出すことができる。



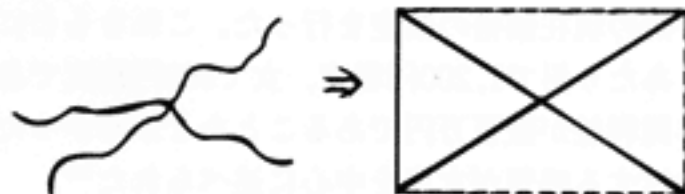
例えば、左図は、25の点を利用して描かれるが、それは右図に見るように、6点からなる図4つと中にある点一つを丸で構成される。そこで、この砂絵の中に、

$$5^2 = 6 \times 4 + 1$$

という関係が隠されている、とする。

#### ○長方形をつくる

右のような、等長の2本のひもをそれぞれの中央で結び、そのそれぞれをピンと張ることにより、このひもの4隅にできる四角形が長方形。この性質を利用してモザンビークの人々は建物を建てる<sup>(12)</sup>。



上の第I例のように、人々がその製作時には全く意識していなかったに違いない数学的事実を各素材の中に見出した。この点をGerdes自身も指摘している。彼はいう。

「支配者のイデオロギーから数学として意識されていない人々の日常の行いの中に数学的事実がある。初期に植民地化された人々の数学的伝統は失われ、古くからの技術に秘められた数学的事実を解凍し、再構築する試みをしなければいけない」<sup>(13)</sup>

### 4. 民族数学に欠ける視点

#### \* 1 算術書からの話題の設定

絵も含めて造形物は残る確率の高い遺産である。このこともあってであろう、民族数学では図形に関わる課題が多く取り上げられている。さらに、民族数学では、多くの民族がもっていた、長さや面積など空間的量に関わる話題、それと関係した形に関わる事柄、さ

らには数の呼称と計算術なども取り上げられている。

日本では江戸時代に数多くの算術書が発刊された。そのいくつかが現在再刊されている。その算術書<sup>(14)</sup>には

堰堤をある長さで建設するために必要な土囊の数量を求める問い

屋根瓦の必要枚数を算出するための問い

など、土木や建築素材の必要量を算定する手順や

金貨と銀貨の換算術 糸物取引など様々な取引に関わる計算術

など商業活動に関わる問題が多数含まれている。これらの多くは、現在小学校高学年で扱われる、求積や割合に関わる算術問題である。日本では、こうした算術書で取り上げてきた問題をテーマに民族数学を展開することができる。Gerdesらの民族数学の提案には、こうした過去に出版された算術書からのテーマ設定を見ない。

## \* 2 当時の生活の一端を探る

さらに、次ぎに紹介するような当時の人々の生活の様子を明らかにする、という視点からの課題設定もない。

土屋寿裕（天童・蔵増小）は、天童、河北を中心に山形県村山地域に残された資料をもとに、江戸中期以降の紅花生産の様子を明らかにする総合学習を試みた。この実験授業は6年生に対して行われたが、この学習において、子ども達は次のような課題を設定し、資料をもとにその解決にあたった。

\* 当時の紅花摘みなどの様々な作業で雇われた人の労賃の算定

\* 紅花生産農家の紅花による収入額の推定

\* 村山地区での紅花栽培面積の推定

\* 紅花の価格と米の価格の長期間にわたる対比

これらの問題の解決ため、まず当時の米価格と現行の政府買い上げ米価格とを対比し、一両の現在価格の推定を行った。これをもとに、紅花栽培で雇用された人々の労賃は、一日あたり男で1,200円程度、女で800円程度であることや、ある紅花商人の紅花取引による年間利益が数百万円であることなどがわかった。これらの学習後、女性の労賃が低いことに対する感想が女兒を中心に述べられた<sup>(15)</sup>。

森川みや子（武蔵野・境南小）は学区域を流れる玉川上水について、以下の事柄を小4の子どもとともに調べた。

\* 現在の水流の速さ \* 上水の断面積 \* 上水の総延長距離

これらの測定値と上水を流れる水の速さの推定値から

\* 上水を通して江戸市中に流入した水の飲み水としての一日の利用者数の推定

\* 上水の取り入れ口から下流域までの水が流れ下る所要時間の推定

などを行った。前者では、江戸町民一人あたり1日の水の使用量を10ℓと推定すると、玉川上水を通じて江戸市中に流入した水の利用者数は8600万人と算出された。一方、江戸市民の数は100万人～120万人。この数字から、玉川上水は飲み水供給の役割のみを担って建設されたわけではないことがわかる。そして、この上水は、自然の川の多くが低地を流れるのに対し、台地の峰部分を流れていること、その流域に「新田」をもつ地名がいくつもあつた、に目を向けることで、東京・武蔵野台地の農業用水としての利用も大きな目的であったことが見えてきた。武蔵野台地での食糧生産高に関わる資料が入手できていないが、こ

の種の資料が入手できたとき、玉川上水の分水路の掘削の歴史とそれとを重ねることで、農業用水としての役割がもっと鮮やかに浮かび上がってこよう。

幸いこの水路は学区域を流れていることもあり、この上水が峰部分を流れていることは実地で確かめることができる。子ども達は目で、足でこのことを確かめると同時に、地形図からも調べた。その地形図読みのため、半分に切断したジャガイモを山と見立て、その地形図作りに関わる学習も行った<sup>(16)</sup>。

量の変化をもとに事象の本質を明らかにする、という考えは17世紀以降のヨーロッパで発達した数学的手法である。事実、日本でも面積や体積を求める問題は、先にも触れたように、庶民むけ算術書に見ることができるが、速さや単位収量などをもとにした問題は見ない。このように、単位あたりの大きさに関わる考えや変数に関わる考えはヨーロッパ生まれであるが、これらの手法を用いて行う考察の対象は民族の生み出した文化遺産である。これら遺産を生み出した人々の思いや労苦を算数学習を通して明らかにすることは、人間教育として大事な役割を担うことになる。

なお、森川みや子の実践では、5年生で学ぶ、速さ、台形の面積公式、柱の体積公式等々が4年生で必要になった。このように学習を総合化すると、学年の枠を超えた数学的内容が必要になる。かつて藤原安治郎が「その場で必要な算数的事実はそこで教える」と述べた現地調達方式型の展開が要求されることになる<sup>(17)</sup>。

### ＊ 3 数学を発展させる

「民族数学」の提案においては、文化としての数学、それを生み出したり必要とする社会的条件の分析、という視点の指摘がある。しかし、その具体化を見ることは少ない。

松井泰一の行った数学文化史に関わる提案の一つに、近松門左衛門「冥土の飛脚一封印切の場」をヒントに、当時の商業活動の水準とその活動を支えた数学の整理がある。この話題と関連して、彼は、当時の和算書で取り上げられた商業算術場面の整理をもとに当時の商業活動に従事した人々の算術の水準も取り上げた。

さらに、日本には算額奉納の歴史もある。算額では、特殊条件のもとでの図形の求積や図形の作図がしばしば扱われた。そして、その多くが無限数学を必要としない問題である。このことは、算額の問題は条件を整備すれば、中学校あるいは高校の初年級の数学的知識で解決できる問題であることを意味する。それ故、算額で扱われた問題を数学における演習問題としての扱いもできようし、算額の伝統に従い、既存の算額の問題をもとにその発展問題の作成に挑戦することも可能である。この後者に注目したのが、第二部で展開する、算額からの問題作りである。とかく、数学は与えられた問題をどう解くかのイメージが強いが、より積極的に数学に向かうために、問題作りの視点は欠かせない。幸い、山形には「算数数学評価研究会」に集う先生方が、問題作りの実践を重ねてきている。このように、第二部における報告は地域の教育伝統にねざしたものである。

## 5. 暦を素材に

民族数学で扱う題材は自国の歴史の歩みの中で生み出したもの、と限定されると、日本では素材探しに苦勞する場面もあるが、民族の先輩が影響を受けた理論も可、となれば、古代中国における豊富な数学的遺産を民族数学の名で扱うことができる。例えば、漢代に編纂された九章算術には、方程式の名の由来となった「方程」の章や、三平方の定理が扱

われる「句股」の章、さらには連立方程式に関係する「盈不足」の章などがあり、中学生が挑戦するにふさわしい問題がこの算術書には多数ある。そして、これらの問題を通して数学が果たしてきた役割を知ることになろう<sup>(18)</sup>。

今回、やはり前漢代に編まれたという「周髀算經」－橋本敬造の注によると、同書の基礎となった観測値はBC580年頃のものであり、この書の基本部分はこの頃に確立したと想定される、という一で扱われる天体観測に関する記載、および太陽太陰暦に関わる話題からいくつかを取り上げ、中学校での総合学習への素材として整理を試みる<sup>(19)</sup>。最後に、整数解をもつ不定方程式としての問題も提供したい。

## 1) 太陽の動き、月の動き

「周髀算經」の冒頭で3:4:5の場合のみではあるが、三平方の定理が扱われる。そして、この比をもとにした高さ8単位の棒－ノーモンと同書では呼ぶ－が地面に垂直に立てられ、その際三平方の定理が使われている、と想定されるが、そのノーモンの太陽による影の長さの測定、さらにノーモンの先端部を利用しての28宿といわれる基準星の観測から冬至、夏至、春分、秋分の確定や一年の日数などが調べられた。太陽太陰暦に関わるいくつかの事柄を周髀算經の記述やいくつかの参考文献から整理してみよう<sup>(20)</sup>。

以下で扱う、ノーモンに関わる様々な観測値は、その高さが8単位、その太陽による影の長さは南中時の測定、星の観測は子午線通過時におけるものである。さて、これらの観測にあたっては南北線、東西線の確定が大事な問題である。同書では、日の出と日の入り時それぞれにおけるノーモンの影を観測し、その双方の影の先端部を結んで作った線が東西方向を示し、二つの影を折り重ねることで南北線を確定するという。これを中学生が使えるものに変えてみよう。

紙に同心円を多数描く。その中心部に垂直に棒を立てる。その棒の影を午前から午後にわたって克明に観測する。そして、その中で、影の先端部が同一円周上に来た二本の影について、その二つの影が作る角の二等分線として南北方向を確定し、それに垂直線を引くことで東西が正確に確定される。

日々のノーモンの太陽の南中時における影の長さの観測から、夏至、冬至は365日ないし366日ごとに繰り返されること、及び一年が365日と1/4日と判定された。一方、月については、その満ち欠けの回数が76年間に940回あることが観測され、この76年間の日数が27759であることに基づいて、朔から朔、あるいは望から望までの一ヶ月の長さは、 $27759 \div 940 = 29.53$ 日と算出された。

これにより、月の満ち欠けを単位にした一ヶ月は29日と30日とを組み合わせればよいことがわかる。しかし、連続2ヶ月を59日とすると2ヶ月に0.06日ずれる。そこで、33ヶ月に一度1ヶ月が30日の大の月が入ることになる。

さらに、一年=12ヶ月としたとき、76年間の月数は912。月の満ち欠けをもとにした月数は940。その差が28ヶ月。76と28の公約数から、19年に7回、つまりほぼ2年半に一度、うるう月を入れなければならない。そのうるう月の入れ方についての解説は周髀算經には書かれていない。後に、24節季と結びつけて、その入れ方が決められることになる。



## 2) 太陽の軌道

「周髀算経」には、天蓋説の立場から、太陽軌道に関わる様々な距離が記されている。その一部を紹介する。

陽城（洛陽の近くという）およびそこから北に1,000里、南に1,000里離れた地点の計3個所で高さ8尺のノーマンの夏至南中時における影の長さを測定し、1,000里の距離差に対し影の長さが一寸違うことを見出す。そして、影の長さ一寸に距離1,000里を対応させ、以下のような議論が展開される。

陽城における冬至、夏至の南中時のノーマンの影の長さはそれぞれ1丈3尺5寸、1尺6寸である。これより、冬至のとき、陽城より13万5千里南に行った地点でノーマンの影がなくなる、すなわち、冬至のとき太陽はその地の真上にある、と判定する。同様に、夏至のとき、太陽は陽城から南に1万6千里離れた地点の真上にある、と判定。

ここで、この観測値はどの位正しいのか検証してみよう。即ち、夏至の時、陽城を通る子午線に関して南北に1,000里離れた地点でノーマンの影の長さが1寸違った、という。冬至のとき、その子午線にそってはいったとき、その影の長さはやはり1寸の違いであろうか。そこで、夏至の時のデータを用い陽城及び、その子午線にそって南北に「千里」離れた地点の緯度を求める。なお、北回帰線の作る角は24度18秒とする。

$$\text{陽城の緯度} \cdots \arctan(16/80) + 24^\circ 18' = 35^\circ 04'$$

$$\text{南「千里」の緯度} \cdots \arctan(15/80) + 24^\circ 18' = 34^\circ 55'$$

$$\text{北「千里」の緯度} \cdots \arctan(16/80) + 24^\circ 18' = 36^\circ 17'$$

従って、それぞれの地点の冬至におけるノーマンの長さは、順に  $8 \tan(35^\circ 04' + 24^\circ 18')$  などの計算から、1丈3尺5寸（これは陽城での冬至の実測値と同じ）、1丈3尺3.4寸、1丈4尺1.8寸となって、後者では、大きく異なる。

なお、冬至の時、陽城におけるノーマンの影と一寸違う地点の緯度も求めてみると、  
南の地点  $\cdots \arctan(136/80) - 24^\circ 18' = 34^\circ 50'$  北の地点  $\cdots 35^\circ 14'$

このように、「子午線千里の隔たりに影1寸」は観測してみればすぐ間違いと分かるのだが、上で紹介したような議論が行なわれ、さらに以下のように話が続く。

北極星の冬至および夏至の子午線通過時の位置をノーマンの先端に結んだひもを使って調べ、ノーマンの足からひもの他端までの長さを地面で測定する。それらの値から陽城から北に11万45百里離れた地点の真上と9万15百里離れた地点の真上とが北極星の運動がつくる円の南北方向の両端、そして、その中心は陽城から北へ10万3千里はなれた地点の真上で、その円の半径は1万3百里と算定。

星も太陽も北極のまわりを円運動する、として以上の測定値から以下の結論が導かれる。陽城から北極までの距離と陽城から夏至の南中時までの距離とから、夏至のときの太陽の描く円の半径は、 $10.3 + 1.6 = 11.9$ 万里、冬至のときのそれは、 $10.3 + 13.5 = 23.8$ 万里。

太陽は、冬至から夏至、そして冬至へとその軌道半径を変えながら移動する、と考える。そして、一年12ヶ月であるので、それぞれの移動に6ヶ月を必要とする。そこで、それぞれの月における太陽のえがく軌道半径が、冬至と夏至との半径差を6等分することによって求められ、それらの各軌道上に太陽がある時が、冬至、大寒、雨水、春分、穀雨、小満、夏至、大暑、処暑、秋分、霜降、小雪の名で呼ばれる気である。そして連続する2つの気

に対応する各軌道の間中に位置するときが、立春、立夏、立秋、立冬などの節であるとし、12の気が設定される。節と気を合わせた24節季が農業を支える太陽暦として用いられる。

一年365日を24節季に等分するので、節と気は15日、ないし16日ごとに訪れる。そこで、連続する5節気間を61日とする。月の満ち欠けによって決まる2ヶ月は基本的には59日であるので、この2ヶ月間に節あるいは気は基本的には4回入る。ところで、連続5節気と連続2ヶ月とは2日ずつずれる。このことにより、連続2ヶ月間に節季が3回しかないときが、2ヶ月を単位にしたとき、その8単位目におきる。その次は、16単位。この16単位目は初めの月から31ヶ月目。これは2年とほぼ半年。そして、うるう月はほぼ2年と半年に一回に必要。そこで、気が入らない月をうるう月とした。

### 3) いくつかの不定方程式

上で紹介した事柄から、暦に関わる不定方程式をいくつか作ってみよう。まず、一般的注意を2つしておく。

a)  $a, b, c$  は互いに素な3整数とし、 $ax + by = c$  に一組、 $x = u, y = v$  という整数解が見つかったとき、その解の全体は  $x = -bt + u, y = at + v$  ( $t$  は整数) である。

b) 以下で扱う方程式は、 $ax + (a+1)y = c$  の形式である。この形式の場合、 $a(x + y) + y = c$

に直し、両辺を  $a$  で割り、その余りから、 $y = e$  (ただし、 $c = ad + e$ ) が求められ、そして、これを手がかりに  $x$  を求めることができる

1) 平年365日を一週7日で割ると、1あまる。このことから、 $7x + 8y = 365$  の解が存在することがわかる。

2) 一月の日数を30日、および31日としたときによってできる間： $30x + 31y = 365$

3) 太陰暦では一月は29日あるいは30日であった。29日と30日の組み合わせで一年が表現できるかに関わる問題： $29x + 30y = 365$

4) 太陰暦では、連続する2ヶ月の日数が59日である。そこで、29, 30以外の組み合わせで365にできるかどうかを調べる方程式：

$$28x + 31y = 365 \quad 27x + 32y = 365, \dots$$

5) 太陰暦で、4年間の総日数が1461であることから作った方程式： $29x + 30y = 1461$

6) 4) と同じように、和が59になる他の組み合わせで1461が表現できるか、という問：

$$28x + 31y = 1461 \quad 27x + 32y = 1461, \dots$$

7) 節と気は15日おとび16日間隔に設定されるによる問題： $15x + 16y = 365^{(21)}$

8) 15と16の組み合わせでつくった24節季で、365日を表現することができた。また、問2) では30, 31による「12節季」、また、問1) では7, 8に組み合わせによる「52節季」が可能であることを示した。しかし、問3) から29, 30の組み合わせによる節季作りはできないことがわかった。では、どのような連続2数の組み合わせで新しい節季を作ることができるか、という問題：

$a$  と  $a+1$  を係数とし、 $ax + (a+1)y = 365$  が整数解をもつ正整数  $a$  を求める

## 第二部 算額のアイデアで問題づくり

### 1. はじめに

算額は日本の全国各地の神社仏閣に奉納されている。山形市内では旧県庁である文翔館に隣接する湯殿山神社にも大正時代の算額の復元が色鮮やかに奉納されており、これは最上流の始祖である会田安明が市内七日町に生まれたこととも関係している。

算額には問題、その図、答を導くまでの過程、作成者名、所属する流派名などが書かれており、神様に感謝の意を表したと言われている。しかし、一方では人に見せるため、すなわち自分はこんなに難しい問題を解くことができたというPRのためという意味合いが強かった。ときには奉納された算額に対して、その誤りを訂正した算額が奉納され、論争にまで発展することもあった。

算額奉納というかつて全国にあった風習を数学教育に取り入れるために、問題づくりと関連させて算額作りを試みる実践を行った。繰り返しの要素を含む図形の面積を求める原問題を準備し、各自問題をつくって解き、清書し、図は色づけるという作業に取り組んだ。問題をつくる途中でプラス面を強調した形成的評価を前面に出して生徒たちに伝えることにより、その後の活動が飛躍的に向上した。さらに、原問題の構造の本質に迫る繰り返しの要素を含む図形に関する問題や発展的な問題も多く見られた。生徒たちが完成させた算額は、どれもカラフルで視覚に訴える仕上がりで、概ね達成感を味わいながら授業に取り組むことができた。

### 2. 教材化について

#### (1) 日本の数学史教育の実態

80年代前半の第2回国際数学教育調査では、日本独自に設定した「数学の勉強について」の中に「数学の歴史や数学者のエピソードについての勉強」が取り上げられた。この項目への回答状況から、中高ともに「数学の歴史」は好きだがそれは数学の学習にとってはあまり大切なものではないと考えていることがわかった<sup>(1)</sup>。それから十数年経過した現在でもこの傾向に変化は感じられない。

現在のカリキュラムでは、中学までの数学においては、数学史を正規に指導することにはなっていない。ようやく、2003年から高校の選択必修科目となる「数学基礎」の中で数学史を扱うことになった。

中学において生徒たちが数学史に関することに触れるのは、教科書の単元末のコラムでトピック的に扱われている内容を教師が取り上げたときに限られよう。指導者によっては、ほとんど無視して数学そのものについてしか指導しない場合も少なくない。したがって、余程数学史に対して生徒が興味を示し、自ら調べてみないかぎり、その知識は皆無に等しい。もちろん、わが国の数学者、たとえば関孝和や地元山形県出身の会田安明についても同様である。これは生徒だけでなく、数学教師についても言える。このように、教師は数学史を学ぶことと数学そのものを学ぶことを切り離して考えがちで、生徒は後者のみを学習して数学とはこのようなものであると認識している。

## (2) 数学史と数学の先行研究について

小倉金之助は郷里酒田で出版された雑誌で「僕は目下或学校で数学を教えて居るが、その講義の中には歴史を多く教えている。普通学校の講義には歴史が殆ど全く入って居ないが、僕の方針はこれに反対である。僕はその歴史を教えて、生徒の研究心を盛んならしめようと考えて居る。新たなる思想を啓く為めに、旧思想の歴史を語るは、興味深いことである<sup>(2)</sup>。」と主張している。このように彼は、単に数学を教えていれば良いということではなく、数学者の物まねをして右へならえ主義の数学を否定し、授業に対して自分なりに工夫しようとする意図が感じられる。本来数学を深く知るには、その歴史を最初に位置づけなければならない。数学史を教える目的は、数学の理解を容易にすることである。そして、数学史は人々が数学の対象をいかに認識したか、またいかに認識してきたかを歴史的にかつ具体的に明らかにしている。数学史を教えることは、数学の対象をより本質的に、より客観的に、より発展的に認識させるためにある<sup>(3)</sup>。

数学史全般を数学教育に取り入れる研究については、松岡元久が『数学史と数学教育』において、数学史を研究するにあたって、個々の歴史的事実を微に入り細に穿って追究し調査する方法と、これに対して史観をはっきり持ち大局から史実を見つめる方法があり、この両立こそが数学教育の効果を上げると論じている。また、日本人のせっかちで、物真似上手、漢字や数学まで他民族から大部分をいただいている民族性に触れ、数学史は政治、社会を切り離すことができないと考える<sup>(4)</sup>。

また、塚原久美子は『数学史の教材化に関する提言』において、数学史が授業の中で定着しない原因として、

①数学の歴史自身の繁雑さ

②超過密に構成されたカリキュラムの枠内で、数学史を導入する余裕がないこと

③数学史を授業に取り入れることの理由や目的が曖昧なこと

を挙げ、数学史の教材化として、特に問題解決型学習としての数学教育を重視している。

また、彼女は高等学校の数学における実践例を示し、生徒自身が歴史の流れに沿ったありのままの数学史を学ぶことによって、問題解決の当事者となり、広い視野から数学を見つめ、興味を持ち、諸概念の理解を深めることの有用性を主張している。問題解決型学習としての数学史教育に関しての有用性を、次の3点を挙げて強調している。

①歴史に見られる問題解決の過程を、授業の中で再現することによって、生徒自身もまた、問題解決の当事者になることができる。このことにより、本来、生徒の思考過程の中に内在する数学的な感性を引き出すことができる。

②日常的・具象的な世界から、抽象化された世界への過渡期である高校数学において、生徒が心底納得するのは、論理的な裏付けではなく、歴史によって如実に物語られる事実である。

③歴史は、試行錯誤の繰り返しの中で、人々の知恵が結集されていく過程である。生徒は、歴史に見られる様々な解法や理論の自由度に遭遇することによって、自らの数学的な考え方に自信を持ち、意欲のある知的態度を身につけていくことができる<sup>(5)</sup>。

日本の数学史を数学教育に取り入れた実践については、先日岡山大学教育学部附属中学校数学科のHP上で、本実践と同様に算額を創作する内容が紹介されていた。今後このような日本の数学史にかかわる実践は増えていくものと思われる。



片野善一郎は『数学史の利用』において、「和算は現在の数学とまったく関係ないので、和算を研究する目的といえは、一つは和算を文化史上の一事象とみて、他の文化と同様な立場でその特質などを考えること、もうひとつは和算の問題やその解法過程に見られる発想を教育指導に活用することである<sup>(6)</sup>」と主張する。また、本県の高校入試問題にも算額が登場し、和算の歴史的役割についても年々関心が高まってきている。

算額によく見られる問題についての研究は、その問題、図、解き方をまとめた藤井康夫著の『算法天生法指南問題の解説』に詳しい。ここには、最上流の会田安明の『算法天生法指南』の問題を当時の和算によって解いている<sup>(7)</sup>。内容的には中学までの数学で解けるものは少なく、ほとんど高校のレベル以上のものである。会田の研究については、加藤平左エ門著『日本数学史』も言及している<sup>(8)</sup>。また、深川英俊著の『例題で知る日本の数学と算額』では、和算および算額の存在を肯定し、これを生かす方向でその例題を中心に紹介し、全国算額一覧で現存するあるいは紛失した算額の奉納場所がわかる<sup>(9)</sup>。さらに、小寺裕によるインターネットに全国の算額の一部を写真で掲載しているサイトがあり、ここには高校生による算額を実際に奉納した実践結果が載っている。最近、岡山大学教育学部附属中学校のHP上で、算額にあるような問題を発展させて自作問題を作る実践が紹介されており、興味深い。

私は、数学史と数学教育の関わりを次のように考える。日本独自の数学の発展に寄与した算額奉納や遺題継承などの風習を知識としてその意義や背景を理解することは大事なことである。しかし、そこから発展して現在の数学教育に取り入れ体験させることはもっと重要であると思われる。かつての数学的風習が現在の数学教育にも寄与することを明らかにできればと考える。生徒たちは数学そのものだけを学ぶのではなく、文化をも学び、そこに数学と文化の接点を見いだすことができる。そして他国の数学史に触れたとき、わが国のそれと比較し、さらに数学に対する見方、考え方を広げることができる。また、自分たちの住んでいる地域の文化伝統を知る上でも、数学史は我々に寄与している。

### (3) 素材について

人の集まる神社、仏閣には数学の問題、答、術文の書かれた大きな額、いわゆる算額が奉納されていた。日本三景といわれる松島（塩竈神社）、宮島（厳島神社）、天の橋立（智恩寺）にも何枚かある。本県にも湯殿山神社（山形市旅籠町）、八幡宮（同市鉄砲町）豊烈神社（同市香澄町）、若松寺（天童市）など現存復元合わせて43面ある。しかし、近年算額の文化的価値が認められるようになって以来、一般に公開しているところが減ってきて自由に見学できなくなっていることは残念なことである。

新庄藩家臣藤田定之の養子となった藤田貞資は久留米藩に数学で仕え、寛政元年（1789年）算額の奉納されている場所や問題を著した『神壁算法』を出版した。以後、何人もの数学者が算額集を編集し、発刊するようになった。問題には、ほとんど図が描かれている。図が条件を表しているのので、文を読みながら図も見なければ条件を見落とす。直角三角形、正三角形、二等辺三角形のようなバランスのとれた三角形や正方形が使われている。曲線図形としては、円や楕円が使われ、全体として美しい形をしている。現存するものには色つきのものはほとんどないが、奉納されたときには何色も使われ、絵画的な意味も兼ねていた。視覚にも訴える算額は数学のあまり得意でない人にも受け入れられていたようだ。

算額奉納の風習は明治時代でも残っており、大正ぐらいまで続いた<sup>(10)</sup>。算額はその地域によって特徴があり、たとえば福島県にある算額の問題には、転距軌跡（サイクロイド）の作図に関するものも見られる<sup>(11)</sup>が、求積に関するものが大多数である。また、よく見られるのが容術といって、円と多角形あるいは、球と多面体が互いに接している図を伴う幾何の問題である。変わった問題として八幡町の八幡神社に現存する円周率に関係したもので、この種の問題は全国でも非常に珍しい例である。また、大正年間に奉納されたものもあり、本県では大正年間ではなお一層さかんであったことを示している<sup>(12)</sup>。

この実践で素材として算額を取り上げた理由は、

- ①算額そのものが身近なところに存在する
  - ②算額の図形が持つ色彩の美しさが生徒達の興味を惹く
  - ③問題づくりを体験させ、個性的な算額を作らせることができる
  - ④算額にはしばしば求積法についての問題が見られることより、原問題もこれにならって提示することができる
- などが挙げられる。

#### (4) 「問題の発展的な扱いによる授業」を取り巻く状況

いわゆる「問題づくり」を取り巻く状況を、山形算数数学評価研究会、ポリアの問題解決過程、構成主義の立場から概観する。

まず「問題づくり」の基本的な流れを説明しよう。①原問題を解く。②原問題を参考に問題をつくる。③つくった問題を鑑賞する。④つくった問題を分類する。⑤つくった問題を解く。(⑥もう一度問題をつくる。)このような流れによって以下のようなことが効果として期待できることがわかっている。

- ①すべての児童・生徒が積極的に授業に参加する。
- ②自分の力に応じてだれもが精一杯学習に励む。
- ③算数・数学に興味を感ずる。
- ④発見の喜びが味わえる。
- ⑤いつでも「問題を発展させる」態度が作られる。
- ⑥個別学習と集団学習の調和した授業が展開できる。
- ⑦多様な観点からの評価を可能にしてくれる。<sup>(13)</sup>

同研究会では最近、問題をつくる際に生徒たちは「答は考えなくてもいい」の指示にもかかわらず、答を求めることによって問題の適合性や数値の適宜性を考えたり、逆の発想で新たな問題への発展を考えたりしていることが明らかになってきている。

G. Polyaは、“How to solve it”で、問題解決の過程として、問題を理解すること・計画を立てること・計画を実行すること・振り返ってみることの4段階を提唱した。特に第2段階の計画を立てることでは、「前にそれを見たことがないか、または同じ問題を少し違った形で見たことがあるか」「似た問題ですでに解いたことのある問題を使うことができないか」と類推の必要性を説いている<sup>(14)</sup>。問題づくりの過程では、原問題を発展させる段階でこの逆の考えを使って生徒たちは取り組んでいることになる。また、仮に問題としては作ることができないとしても、過程において逆の発想で問題を考えている場合が多い。その意味において、問題を解く場合の発想と逆方向の発想は大事にしたいところである。また、

彼は「推論はきわめて教育的である。一つの実例は、もしもその他のいろいろな場合に適用できる事柄がそれから学びとられるならば、教育的であり、可能な応用範囲が広ければ広いほど、ますます教育的である<sup>(15)</sup>。」にあるように、一つの問題を発展させ、応用できる力をつけることの重要性を説いている。それは、生徒の自発的な思考を促す教師の働き掛けの必要性をも説いているように思われる。

1980年代にアメリカに登場した構成主義は、Piagetの心理学をもとに人間の生物的发展に足場をおく急進構成主義とVygotsky心理学を基礎に認識への社会的影響を強調する社会構成主義に分かれる。前者の提唱者はE. v. Glasersfeldで、知識は主体者の認識によって生き生きと形成されるものであると主張する<sup>(16)</sup>。一方、P. Cobbは、学級内の子ども相互間および教師と子ども達のコミュニケーションを重視する姿勢を持つ<sup>(17)</sup>。問題づくりにおける原問題から問題を作るという発想は彼らが主張する構成主義にはないが、Cobbの授業論として、教師の役割のひとつは子ども達の間の社会的相互作用が行われるよう授業展開を行うこと<sup>(18)</sup>は、問題づくりの授業ではまさに生命線となる。あくまで問題を作るのは生徒自身であり、教師は各々の生徒が能力や興味に応じて問題を作るための環境を整えることを重視しなければならない。その方策として、生徒間の交流を促進することが挙げられる。それによって互いのアイディアに触発されたり、互いの考えの良さに気づいたりすることができ、個人の活動への意欲がかきたてられる。しかしながら、このような授業形態はもともと日本の伝統的な指導法であり、現在に至っている。むしろ、Cobbの提唱する社会的相互作用を学級集団内にのみ限定せず、外の社会へと広げることも必要である。そうすることにより、広く数学と社会との関わりを見い出すことが可能である。

### 3. 実践について

今回の実践の対象としたのは、3年の選択数学のクラスである。このクラスは国語・社会・数学・理科の中から各自の希望で選択させた結果の2クラスを本実践のために1クラス40余名にまとめたものである。ここで学習する生徒は必ずしも数学を得意と感じているわけではないが、約半数は得意であると思っている。

#### (1) 実践のねらい

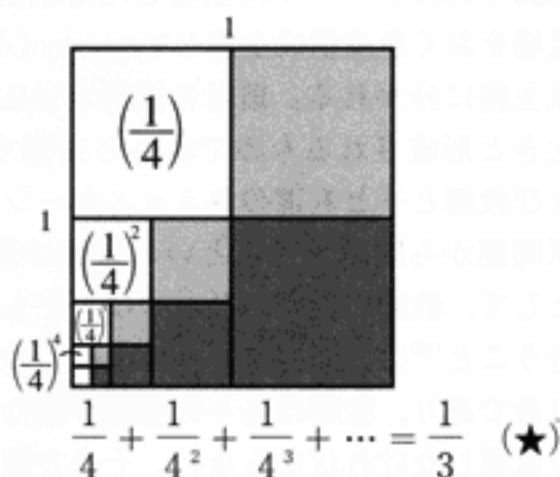
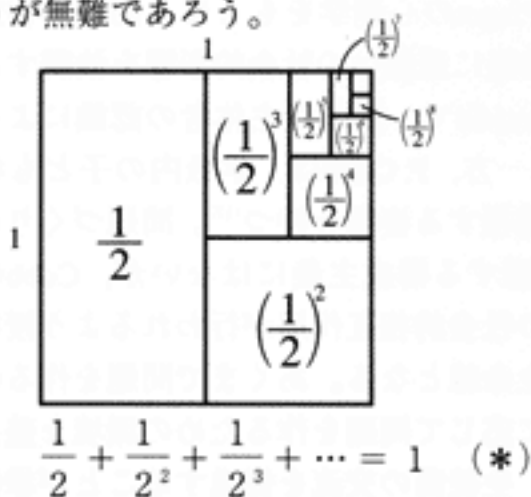
本実践のねらいは、かつてのわが国の数学的風習の一つである算額奉納が、これまで生徒たちが学習してきた内容の理解を深めるのに役に立つことを実感させることである。また、問題づくりを多様な視点で考えることができるようにすることである。

そのために、

- ①算額奉納の風習に興味をもち、自ら問題を作り、それに挑戦しようとしたり、無限に対して興味を示すことができるようにする
  - ②幾何学模様の規則性にしがって問題を作り、自ら解決できるようにする
- が必要である。

授業では原問題で繰り返しの図形を用い、無限和にも興味をもたせたい。問題そのものの工夫に加え、図形の組合せや繰り返しの美しさにも気づかせたい。算額は本来奉納を目的としたものだから、美的センスも大いに発揮させて、作品として各自が満足できるものを目指したいと思う。完成した算額はしばらく廊下に掲示して、多くの生徒に鑑賞させた

い。また、無限和についての説明は高校における数列およびその総和をそのまま数式で表現すると、等比数列の総和の公式および極限値を考えることになり、現行の中学の内容では理解が困難であると予想される。したがって、無理に代数的な処理をせず、下の図のように図形的な処理によって視覚に訴えて納得させることが可能と考える。その場合、式表現としては下の(\*) (★) を使うが言葉の上では「1に近づく」「1/3に近づく」と断ったほうが無難であろう。



さらに、これらより一般に

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots = \frac{1}{n-1}$$

が成り立つことも類推できる。

## (2) 指導の展開

山形市立第二中学校にて、平成10年12月、平成11年1月に実施した授業の流れは次のようであった。

### 1 時間目

#### [1] 算額の由来を聞く

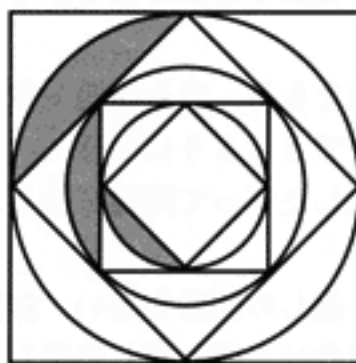
- ・湯殿山神社の算額を例に、算額の意味やその目的などについて説明する。
- ・算額に使われる図形自体がカラフルで美しいことに気付かせる。

#### [2] 算額の問題を解く(原問題を解く)

問題づくり形式で授業を進める。

#### 原問題

右の図で、外側の正方形の  
一辺の長さが8 cmのとき、斜  
線の部分の面積を求めよ。



#### [3] 原問題の解答

三平方の定理を使って正方形の一辺の長さや円の半径を求めることを丁寧に説明する。



## 〔4〕 原問題をもとに問題を作る

下の枠内の○は実際の生徒の反応を表す。

予想される変更部分

○一辺の長さ

○図形 — ・ 正方形のみ ・ 正三角形のみ ・ 円のみ ・ 長方形とひし形  
 — ・ 正三角形と円 ・ 正六角形と円 ・ 正方形と円と正三角形  
 — ・ 円と正六角形と正三角形

○求めるもの — ・ 面積 ・ 特定の周の長さ ・ 周の長さの総和  
 — ・ もとの正多角形の一辺の長さや円の半径

○繰り返す回数

○繰り返しでない図形

机間指導で生徒が作る問題を観察し、必要に応じて途中で何人かの生徒に作った問題を発表させ、変更可能な部分の確認をして、さらに問題を作らせる。

## 2 時間目

## 〔5〕 作った問題の解答を考える

途中の式も丁寧に書くようにさせ、教師のチェックの後に清書させる。

## 〔6〕 算額を作る

図は視覚に訴えるようにし、配色にも気を配るようにさせる。

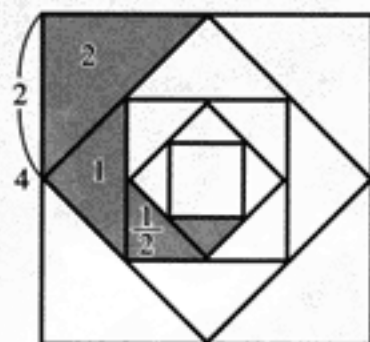
## 3 時間目

## 〔7〕 算額を鑑賞し、それを解く

算額を鑑賞して互いに感想を述べ合う。

## 〔8〕 無限和に挑戦

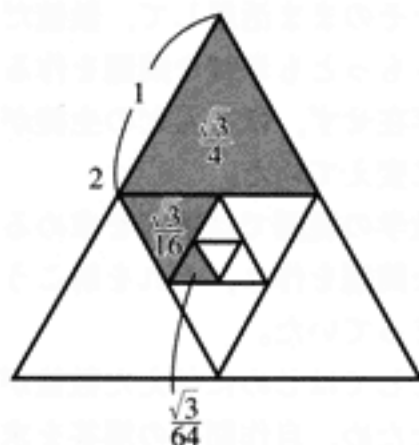
生徒から問題で周の長さや面積の無限和についての考察についての疑問や興味がでてきた場合は、簡単にそれらの求め方に触れる。たとえば、無限に繰り返した場合の下の図の斜線部の面積を求める場合は、



それぞれ (＊)(★) より、

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 3 + 1 = 4$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4^2} + \frac{\sqrt{3}}{4^3} + \dots = \sqrt{3} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



となる。

### (3) 授業中の生徒の反応

実際の所要時間数である5時間分の授業における生徒の反応を紹介する。

#### [1] 授業中の生徒の反応

各時間における生徒の反応は次のようであった。

##### [1時間目]

- ・算額の図には非常に興味を示していた。配色のカラフルさが際立っていたためと思われる。
- ・原問題の途中の式、 $(4\pi - 8) + (2\pi - 4) + (\pi - 2) = 7\pi - 14$   
それぞれの( )内の第一項が $4\pi$ ,  $2\pi$ ,  $\pi$ , 第二項が $-8$ ,  $-4$ ,  $-2$ と2分の1ずつ半減していることに気づかせ、4番目の面積も求めると仮定すれば  
 $(\frac{1}{2}\pi - 1)$  となることを確認した。
- ・オリジナルの問題を作るときには、原問題にはあまりこだわっていなかった。原問題と同じ図を使って問題を作る生徒はほとんどいなかった。

##### [2時間目]

前時までは原問題をもとに自分の問題を作る取り組みであったが、ほとんどの生徒は問題の図を描くのもやっとといった状態で、とてもこの時間内では算額を完成させることは無理であった。実際にこの時間内ではほぼ完成に近い状態へ漕ぎ着けた生徒は一人か二人であった。しかも、かなり簡単な問題であり、中学三年までの既習事項を使わなくとも、極端に言えば小学校レベルの知識で十分解くことができるような問題であった。見通しの甘さはこの程度では納まらず、結局あと2時間算額の作成に費やすことになった。その原因として、作業に対する取り組みが緩慢であるということでは決してなく、次のようなことが考えられる。

- (ア) 原問題の図をそのまま活用して、数値だけ変えるというもっとも単純な問題を作る生徒が一人も存在せず、ほとんどの生徒が原問題を大幅に変えていた。
- (イ) 中学で学ぶ数学の範囲では解答を求めることが不可能な問題を作り、それを解こうとして行き詰まっていた。
- (ウ) 問題の条件としてはじめに与えた数値が適切でなかったため、自作問題の解答を求めるための計算の途中で、その煩雑さのために計算の能率が低下した。また、計算の難しさに気づいて数値を修正するなど試行錯誤を繰り返していた。このように、はじめに与えた数値と答の関係を見抜き、問題解決の法則性を発見しようとする姿勢が見られた。

すなわち問題における与えられた数値は適当に決められているのではなく、ある程度考



えられていることにも気づかせることができた。

- (エ) 図を描くときに無地の白い厚紙を使ったため、線がややずれたりして作図をやり直さねばならない場合があった。
- (オ) 全体的に「算額」づくりの見通しが立っていなかった。

### 3時間目

越年しての3時間目は前時の様々な理由から取り組みが緩慢であったことの反省を生かし、前時終了後、原問題をもとに作った問題やその解き方をまとめた学習プリントを回収して、一人一人に次のような内容を含むコメントを添えて渡し、本時の活動の見通しをもたせた。

- ①作った問題に対する評価として、その問題を解くのに要する数学的な考え方、原問題の変更部分、工夫した点など。
- ②問題文やその解き方などで追加、削除、修正すべき点のアドバイス。
- ③問題の解き方のヒント。
- ④問題をまだ作ってない生徒へのお勧めの図の提示。
- ⑤清書の際の色付けなどのアドバイス。

その結果、本時は前時と較べ著しく算額づくりへの取り組む姿勢が改善された。自分の作品に対するプラスの評価を得て、やる気がでてきた証拠である。自分で気づかなくとも、教師の指摘によって、質の高い内容や考え方を含んでいることを知り、自作の問題に自信を持ち、算額づくりに意欲的に取り組むようになった。

形成的評価の大切さはこれまでも主張され続けてきたが、今回の授業では、すべての活動が終わってからの多大な評価より、途中でのちょっとした評価が意欲を最後まで持続させるのに有効であることを実感した。もちろんその評価は本人が気づいていなくとも、指摘されて納得のいくものであれば十分である。普段の授業においても、このような評価のタイミングを上手にとっていくことが、生徒のやる気を出させることを可能にする。生徒にとって自分の作った問題を様々な角度から見て、そのよさを見い出すことは必ずしも容易ではない。

また、自分の問題を解くと数値が煩雑になり、なんとかそれを解消できないかと考える生徒が出てきた。途中の式の数値が条件として与えた数値に従属していることに気づかせ、そのためには始めに与える数値をどのようにすれば整数値になるかを考えさせた。

### 4時間目

生徒たちは一生懸命取り組んでいるが、非情にも時は流れる。色付けや問題文や途中の式などの清書が未完成の生徒には、週末までの提出を課題とした。次時の鑑賞に間に合うようにと考えた。

机間指導の際に「この問題は～という考えが隠されているんだね。」などとコメントすると、生徒は「全然気づかなかった。」といいながらも自分の作った問題に満足した様子であった。また、図としてはとてもきれいであるが、中学の内容では解けそうもない問題を作ってしまった生徒に対しては、原問題では「面積」を考え、「周の長さ」を考えれば可能であることをアドバイスして、問題として成り立つことを指示した。このように「面積」

を求めることと「周の長さ」を求めることがまったく異なることであることに気づかせることも大切である。【図A(410頁掲載)でははじめはピンクの部分の面積を求める問題だった】

### 5時間目

ホールに生徒の作品を並べ、鑑賞する時間をとった。図案や図のカラフルさに美しさを感じながら、自分の作品との共通点などを口にしてしている生徒もいた。その後の無限についての授業では、時間が差し迫っているという事情と内容の難しさのため、生徒たちの反応はすこぶる悪く、こちらが期待したほど理解していた生徒はほとんどいなかった。「無限に繰り返す」という表現の意味するところがよく理解できず、無限という概念を数値化するのとは初めての経験ということもあり、中学生にはこのような駆け足の指導ではとうてい無理であることを痛感した。図を用いて視覚に訴えたつもりであったが、逆に視覚に訴えたがゆえに、半分ずつ分割していても面積に含まれない部分が残るイメージのためか、1に近づくということを納得させることがうまくできなかった。

また、式の表現においても、 $=$ で結ぶよりも、近づくという意味で $\rightarrow$ を用いたほうがよかったのではと思うが、この二つを混同してかえって混乱するという懸念もあり、結局は $=$ で統一した。しかし、思い切って $\rightarrow$ を使ったほうが今までの計算との区別というねらいで有効だったかもしれない。

### (4) 生徒が作った問題の分類

生徒が作った問題を〔1〕原問題との関係、〔2〕問題に含まれる内容、の2つの観点で分類した結果、次のようになった。

#### 〔1〕原問題との関係

①原問題の変更部分およびそのままの部分の部分を次のようにまとめた。

変更部分	変更部分の内容・そのままの部分の数(延べ問題数)
図形	<b>そのまま</b> : 1 正方形と円: 15 正三角形と円: 5 正方形のみ: 3 長方形と円: 2 円のみ: 2 正方形の接し方: 2 長方形とひし形: 1 正三角形のみ: 1 外へ広がる: 1 長方形と二等辺三角形: 1 その他: 3
求めるもの	<b>そのまま</b> (面積の和): 22 一部分の面積: 6 周の長さ: 3 面積の差: 3 2つ以上の部分の面積: 2 長さの合計: 1 部分と合計の面積: 1
パターン	<b>そのまま</b> (同じような繰り返しのパターン): 14 異なるパターン: 24
数値	<b>そのまま</b> : 1 変更: 37
与えられた数値の位置	<b>そのまま</b> (外側の図形の一边の長さなど): 30 内側の図形の一边の長さ: 8
条件追加	3(線分の長さの比: 2, 図形の合同: 1)
条件を求めさせる	1(三平方の定理の逆より直角を求める)

#### ②考察

①図形: 原問題とまったく同じ図形はひとつしかなかった。原問題が正方形と円が次々と内側に接していく図をもとにしていたので、パターンは違うが正方形と円(半円なども含む)の組合せによる図が多かった。原問題の影響で繰り返しの図形が多かった。ほと



んどが内側へ向かって繰り返すものであるが、ひとつだけ外側へ向かって繰り返す思い切った発想の問題があった。【図B参照】

@求めるもの：原問題と同じ面積の和を求めるものが半数を占めた。面積を求めるものに集中する中、周の長さや面積の差を求めるという発想は発展性のあるものである。

@パターン：問題の構造の本質とも関わる場所であるが、繰り返しによって相似な図形が次と縮小されて出てくる問題が14で、そのうち原問題のように回転を伴っているパターンは6つだった。これは構造の本質を見抜いた作品といえる。【図C, Dは典型的な縮小・回転を使ったパターン。図Eは回転の伴わない縮小のみのパターン、図Fは間にもう一段階縮小・回転の図形を加えると図C, Dと同様のパターンになる。】

@数値：問題を作る際にもっとも簡単なのが数値を変えることである。図にともなう数値も工夫する必要があるが、原問題と同じ数値のままにしている問題は1つしかなかった。

@与えられた数値の位置：原問題では外側の正方形の一辺の長さを与えていたことより、各自の問題でも概ね外側の図形の辺の長さや円の半径などを与えているものが多かった。中には少しひねって、外側の円の周の長さや正方形の対角線の長さを与えている問題もあった。また、発展性のある内側の図形の長さを与えている問題が8つあったのは柔軟な発想ができている証拠である。

@条件追加：元来算額の問題は図に様々な条件が含まれており、文章ではいちいち説明していないものがほとんどであった。それゆえ、図よりだいたいその図形の特徴がつかめればあえてその説明はなくてもよいのだが、丁寧に問題文に説明を加えているものもあった。図から明らかと言いきれないような条件についてはきちんと説明を付ける必要がある。ここで生徒が作った問題として、線分の比を指定したり【図G参照】、図形の合同を提示して【図H参照】それぞれの長さを求める手がかりとさせるなど工夫が見られる。

@条件を求めさせる：図より明らかに合同だったり、相似だったりする場合が多く見られる。直接図形の合同や相似には問題文では言及していないが、それらを見抜いて答えを導くまでの過程として重要である。ここではこのような図よりすぐに関係がわかるものについては原問題の変更として数えていないが、1問だけ3辺の長さの関係から三平方の定理の逆を使って直角を導き、そこから問題の条件を整えて解いていく問題があった。「逆」と名のつく定理はあまり利用される機会が少なく、忘れられがちだが、このように直接条件が提示されていない中から自ら求めるという思考を通して、定理の大切さに気づいてくれればと思う。各自の問題は変更部分は1つだけでなく、ほとんど3つ程度あり、原問題を発展させようとする意識が強く感じられた。

## [2] 問題に含まれる内容

①解き方の要素についての分類は以下のようになった。

三平方の定理：23 (うち辺の比 $1:1:\sqrt{2} \rightarrow 11$ , $1:2:\sqrt{3} \rightarrow 3$ )
根号の混じった計算：20      文字の式の計算：17      おうぎ形の面積：15
二次方程式：9      図形の移動：7      中点連結定理：6      相似比：5
おうぎ形の弧の長さ：3      三角形の重心：2      面積比：2
三平方の定理の逆：1      円の定義：1

## ②考察

⑥相似比や面積比の關係を用いて、周の長さや面積の和を求めることが可能な問題に対する生徒の解き方は、18問中5問がその關係を用いていた。その5問中3問が中点連結定理に関するもので、残り2問が面積比に関するものだった。このように図形の相似關係に気づいていない。あるいは、漠然とわかっていても、比について考察にまで至らずに解いている。原問題の解答の際に、図形の相似を見抜かせ、面積比の確認まで踏み込めなかったことが原因のひとつと思われる。また、図形のなかに相似な図形が複数含まれるような問題に馴染みがないということも原因としてあげられるであろう。

⑦求めたい部分の長さを文字で置き換え、三平方の定理によって二次方程式を作って解く方法が多かった。【図Iでは、大きい円の半径は4cmとわかるので、小さい円の半径をxcmとして、三平方の定理を利用して、2次方程式を作って解いている】作った問題の図では正三角形や直角二等辺三角形がよく使われていた。特別な直角三角形では辺の比 $1:1:\sqrt{2}$ や $1:2:\sqrt{3}$ の關係を使っても求めることができるので、比の等式から求めている事例が半数近くあった。根号の混じった計算が多いことは三平方の定理の利用によって求めた数が無理数になる場合が多く、それを用いて面積の計算をすることと關係している。また、文字の式の計算については円やおうぎ形の面積などが $\pi$ を使って表され、それらの和を考えるとときに $\pi$ を文字扱いすることと關係している。図形の移動は、それぞれの図形の面積は求めることができないが、ある部分の図形を移動することによって簡単に求めることのできる図形になるときに使われている。【図Jでは、移動によって正方形の面積を求める問題になっている】中点連結定理は繰り返しの際にもとの図形の中点を結んで次の図形を作るという操作をすることより、ほぼ直観的に思いつく定理である。【図Kでは長さの和を求める問題になっている】正三角形と円が内接する場合には、円の中心が正三角形の重心と一致することを利用している。【図L参照】

## (5) 本実践の自己評価のまとめ

5時間目の授業の終わりに、40人の生徒に対して行った以下の8問に対する自己評価の結果は次のようになった。

## 〔1〕自己評価の結果

算額を作る授業についての自己評価は次のようになった。

Q1. 算額に興味をもったか?

もった 30                      もたない 1                      どちらともいえない 9

Q2. 自分で問題を作ることができたか?

できた 37                      できなかった 0                      どちらともいえない 3

Q3. 自分で作った問題を解くことができたか?

できた 34                      できなかった 4                      どちらともいえない 2

Q4. 算額をうまく作ることができたか?

できた 30                      できなかった 3                      どちらともいえない 7

Q5. 他の人の算額を鑑賞しての感想として、肯定的な4例を紹介する。

・簡単そうな問題でも難しかったり、難しそうな問題でも考え方を工夫すれば楽に解ける問題があったりしてすばらしいと思った。

- ・自分の作った形と全然違う形がたくさんあった。解くのが楽しそうな問題もいくつかあった。みんな算額をつくるのにすごい工夫をしていた。
- ・自分には考えもつかないようなものがたくさんあってすごいと思った。
- ・色づかいがシンプルなんだけど、すごくきれいだったり、図形が可愛かったりと、みんな工夫しているなと思った。すごく難しそうな問題もあり、よく考えられるなと思った。

Q 6. 授業の感想として、肯定的な8人の声を紹介する。

- ・自分では最初は何を書けばいいかわからなかった。でも、先生や友達のアドバイスでとても良いものが出来たし、図形の面積の求め方の復習もでき、とても楽しい良い授業でした。
- ・はじめはどんな図形にしようとても悩んだけど、次第にイメージが出来上がり、最終的には自分でも満足できる図形ができたので良かったし、色あいも工夫できたので良かった。図形に興味をもつことができた。
- ・問題を作っているときはとても真剣に悩んだので、完成したときとても満足した。寺や神社にこういう問題があったことを初めて知った。今度寺や神社に行ったときは見てきたいと思う。楽しかった。
- ・自分で作る問題の案が出てこなかったときには苦勞したけど、問題を決めてからは集中することができた。算額に片足つまこんだだけの形になったけど、興味をもつことができたので良かった。
- ・友達に手伝ってもらいながらも、きちんと算額が書けたので良かったです。自分ではとても良い出来だったので感無量でした。とても充実した授業でした。
- ・「算額」と聞いたとき、正直言って「何それ?」と思ったが、自分で問題を考えるのはおもしろかった。本物の算額を今度見てみたいと思った。
- ・はじめはどうしたらいいのかわからなかったけれども、やっているうちに楽しくなってきた。
- ・じっくり考えて何かを作るという機会は美術や技術でしかなかったけれど、数学という教科を通して出来たのでよかった。

無限和についての授業の感想は次のようになった。

Q 7. 無限の和について図で理解することができたか?

できた 21      できなかった 3      どちらともいえない 16

Q 8. 授業の感想として、5人の声を紹介する。

- ・数字だけだとわからないことも、図を使うことで理解できた。数学ではいろいろなことが考えられて、おもしろいと思った。
- ・無限の和の公式は難しいけど、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ と続けると1に近づくとは今まで全然思わなかった。
- ・無限和の公式を応用することが少し難しかった。
- ・複雑なようで実は単純だった。楽しく学習できた。
- ・難しかった。何が無限なのかもわからなかった。

## 〔2〕考察

生徒の自己評価を見ての感想を述べる。

## Q1に対して

1時間目に文翔館わきの湯殿山神社に奉納されている算額の図を現物とほぼ同じ色で塗って見本として提示した。図の鮮やかさゆえ、一体これはなんだろう、何のために神社に奉納されたのかといった素朴な疑問があり、興味をもったものと思われる。

自分の算額を作っているうちに、「算額」の意味や意義をすっかり忘れてしまい、完成したときにはなぜこのような活動に取り組んだのか理解できずに終えてしまった生徒も若干いた。出来れば導入は現地へ生徒を連れていき、現物を見せるに越したことはない。そうすれば、自ずと算額への関心も高まるに違いない。

## Q2に対して

解ける解けないはともかく、ほとんどの生徒が自分の問題を作ることができたと評価している。実際全員が問題を作ることができたが、作った問題を見てみると、原問題の数カ所を変更している。また、図もかなり発展的なものになっている。これらのことより、自分の問題に対して満足しているものと思われる。

## Q3に対して

「できた」と答えた生徒の中には、教師のアドバイスや友達に聞いて解くことができたものも含まれる。完全に自力で解けなかったにせよ、自分で問題を解くことができたと答えること自体、その生徒にとっては自信となっているはずである。わからないことを解決するということは、それだけ重要なのである。気持ちの面でも解けたような気がすると思うことによって、授業を通して意欲が出てきて、作品の完成度にもよい影響を与えている。

## Q4に対して

「できなかった」「どちらともいえない」を合わせて10名であるが、これは鑑賞したことによって自分が思いつかなかった視点で作った他の人の算額のいいところが見えてきたため、自分の作ったものに満足がいかなかったと考えることができる。概ね出来映えはカラフルで、目を引くものが多く、美術作品のような趣も感じられる。

## Q5に対して

ほとんどの生徒が自分との相違点を意識しながら鑑賞していた。最も目に訴えるのが色や形で、その工夫について感じる場所が多かったようだ。また、問題の難易度についてもある程度考えながら鑑賞していた。自分が気づかなかった発展的な問題に対し、敬意を表しているようだった。気づいていたら自分も作りたかったという思いがある。

## Q6に対して

概ね好意的で、自分の問題を作るという経験が初めてという生徒がほとんどで、新しいことへの挑戦という意味で意欲が最後まで持続した。また、図を描いたり、色を塗ったりしてじっくり作品を作る活動に美術や技術以外で取り組む機会がなかった。だから、算額を作る際に、友達と相談したりして、アイデアを膨らませて楽しくできたようである。

図形に色をつけることより、完成度が高くなったような気になるためか、算額づくりの活動全体に対して、振り返ってみると充実感を感じたり、作品に満足している様子が見える。

## Q7に対して



授業中の生徒の反応などから、一部生徒以外は理解できないのではと思ったが、約半数の生徒が理解していたのには驚いた。図形的な処理で無限和を視覚に訴えたことにより、抽象的な式で考えるよりイメージしやすかったようである。なんとなく図で押し切ったといえなくもないが…。「できなかった」「どちらともいえない」と評価した残り半数の生徒は課題が何であるのかという出発点からわかっていなかったようだ。

Q8に対して

無限和の考え方や公式がわかったことに対する好意的な感想が多かった。しかし、難しいという感想も多く、その理由として「何が無限なのかわからなかった」と感想にあるように、繰り返しの操作のイメージがわかなかったようである。この辺りは無限の概念の大事なところなのでじっくり時間をかけたいところである。また、「理解できた」と答えた生徒の一人は「無限でもすべてたすと1になる」という感想を書いた。これは、ここでの操作( $1/2$ 倍ずつしたものの和)以外でも、同じような $1/3$ 倍ずつ、 $1/4$ 倍ずつしたものの和、つまり

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots, \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots$ についても1と勘違いした可能性があり、より丁寧な指導が必要であった。

課題として提示した原問題を無限に繰り返した場合に、次々に( )内の各項が $1/2$

倍になっていくことは予想できた。しかし、無限和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ が1であることを

応用して、答を求めることを十分に理解するに至らなかった。無限和の授業に対する取り組みについては、算額づくりで満足感をもつ生徒ほど、集中して理解に努めた。また、無限和の求め方では、感想に「数字だけだとわからないことも、図を使うことで理解できた。」

「複雑なようで実は単純だった。」とあり、視覚に訴える図形での処理が有効であることがわかった。

#### 4. 成果と課題

算額と聞いても、ほとんどの生徒というよりも全員がその言葉を漢字で書くことはできないであろう。ましてその意味するところとなると我々大人でさえも、無関心である場合が多い。恥ずかしい話だが、私自身も数年前市内の数学科の研修で初めて知った。そのときに周辺の神社仏閣を巡り、現物を目のあたりにして説明を受けながら記憶に止めた。数学教師が日本古来の数学に関する風習などにどれだけ精通しているかはなはだ疑問であるが、何かの機会に知識を得れば、その教材化を試みようとするのはごく自然の流れだと思う。

この授業の成果と課題をそれぞれ4点にわたって述べる。

(成果)

@算額奉納という数学的風習を現代の数学教育に取り入れることは、先行研究で紹介した塚原も言うように子ども達の知的好奇心をかき立てるのに役立ち、これまでの学習内容の復習に適していることがわかった。

@2時間目終了の段階でプリント類を回収し、次時に向けての活動の方針がわかるように、各自が作った問題に対する評価や問題の解き方のアドバイスを書いて3時間目に渡した。

これがこちらの想像以上に功を奏した。「はじめは難しいと思っていたけど、先生からアドバイスをもらい、とても良い出来の算額を作れたので、とても充実した。」と感想にあるように問題を作って解くという活動においては、十分手をかけて個別の指導をすることの大切さを感じた。これがなかったら、おそらくもう1時間は余計に必要だったかもしれない。生徒たちが自ら作った問題を相互に解き合い、問題への感想を述べ合って、その問題のよさに気づくことが望ましい。しかし、今回の実践のように教師側で問題の価値を教えて、以後の取り組みに意欲を持たせる方法も十分に有効であることがわかった。

@算額が身近な場所（文翔館のとなり）にあることを知り、その気になれば現物を見に行けることより、教材に親しみを持たせることができた。感想に「寺や神社にこういう問題があることを初めて知った。今度寺や神社に行ったときには見てきたいと思う。」とあった。また、算額のカラフルな色彩が非常に強烈なインパクトを与え、問題の難解さとは無関係に図を工夫して作ってみたいという動機づけには十分であった。それが問題を作る際に図をどうするかに多くの時間を割いたことと関係している。

@自己評価の結果、自分で問題を作ることができたと答えた生徒は9割を越え、その問題を解くことができたと答えたのは8割を越えていた。問題づくりを経験することは問題に対する見方や解き方のコツをつかむうえでも、数学的な考え方を養うことを可能にする。今回初めて問題を作った生徒が多かったが、図が与える影響の強さのためか、問題を作るには独自の図を考える必要があるという発想で問題を作ったようである。問題づくりにおいて、数値だけを変えろというのがもっとも容易な方法であるが、ここではそのような問題を作った生徒はひとりもいなかった。原問題をいかに発展させるかということに知らず知らずのうちにほぼ全員が集中していた。問題を作ってから、その解き方を書くために解かなければならないので図と問題文は考えたものの自力では解けない生徒が多かった。というのも、問題がかなり難しかったり、中学の範囲では解けない問題だったりしたことが原因であった。以上のことより、先に述べた山形算数数学評価研究会の成果にあるように、全員が独自の問題を作ろうと集中し、これまで学んだ数学的な考えや計算を駆使し、発展的な問題を作ろうと努力した。また、自ら作った問題を解くことによって、これまでの学習の振り返りができた。

#### （課題）

@普通問題づくりの手法として、作った問題を分類する過程で問題の構造的なものへ迫り、本質をつかませることになる。しかし、この実践では分類の時間をとる余裕がなかったため、問題の構造の本質へ迫るためには、原問題を解いていくときに教師側からその伏線となる相似（縮小）、回転の2つの要素は必ず確認させるべきである。これが欠けたために、繰り返しの図形からまったく無関係なものへと発展させる生徒がいた。約半数の生徒の意識は、図を描いて問題を作ればよいといった安易な方向へ流されたものと思われる。1対1の面接によるインタビューの結果より、原問題の構造を生かした問題を作った生徒は、「原問題の特徴はどんなところですか？」の質問に、相似（縮小）と回転の要素と答えることができることがわかった。問題づくりをさせる前に指導者として、どの程度の枠のなかで作らせたいのかというビジョンを明確に持って臨みたいものであ

る。ここでは縮小して回転させた繰り返しの図形部分を考えるということをもベースにして、問題を作らせる方法が有効であったと思う。

@問題づくりにおける変更可能などの確認をせずに進めたことより、図にはかなりこだわって独自性を発揮したが、他の変更箇所については数値以外はあまり意識して作っていなかったようだ。問題づくりの経験があまりない生徒たちということも考慮に入れて、丁寧に問題の作り方を説明するべきだったかもしれない。

@鑑賞の時間をもっと多くとり、実際に他の人が作った問題に挑戦させたり、本当にその解き方でいいのかを確認させたりして、互いの問題のよさや価値に気づかせるようにしたい。

@算額作成の途中で意図的に他の人の問題を見るように指示するなど、周りとの交流を図っていくと各自の問題にも広がりが出るものと思われる。

### 参考文献・注記

#### 《第一部》

- (1) 岡部恒治他編著「分数ができない大学生」, 東洋経済, 1999
- (2) 例えば, 「日本の高校生, 学力良好—学習到達度予備調査 国際的な正答率上回る。『数学, 理科も参加国全体に比べて, そのほとんどがよかった』」という新聞報道 (00.6.10毎日)
- (3) M. E. Brenner et. al "Cross-National Comparison of Representational Competence", JRME vol. 30, no 5, 1999, pp. 541—557
- (4) 「中学校の数学教育・理科教育の国際比較」国立教育研究所紀要第127集, 1997 (平9年) の70ページなど  
佐藤学「教育改革をデザインする」, 岩波, 1999
- (5) 森川幾太郎他編著「算数だいすき 5年生版」, 民衆社, 1997, p. 84
- (6) 森川幾太郎「こんなところにも見つかる算数・数学」, 算数数学の授業 no. 38, あいわ出版, 1986, pp. 92—95
- (7) 小林源蔵「隅矩雛形」, 青木国夫他編集「江戸科学古典叢書16巻」, 恒和出版, 1978に所載
- (8) 森川幾太郎「寄棟屋根の棒墨構造について」, 算数数学の授業 no. 70, 1993, pp. 37—42
- (9) P. Gerdes "Reflection on Ethnomathematics", "for the Learning of Mathematics", vol. 14, no. 2, pp. 19—21, 1994
- (10) Paulus Gerdes "Ethnomathematics and Mathematics Education", A. J. Bishop et. al eds. "International Handbook of Mathematics Education", Kluwer, pp. 909—943, 1996  
なお, この論文の参考資料欄には, 民族数学に関わる代表的な論文が掲載されている。
- (11) William Betz "The Teaching of Intuitive Geometry", NCTM Year Book Vol. 8, pp. 55—164, 1933
- (12) Paulus Gerdes "On Possible Uses of Traditional Angolan Sand Drawing in the Mathematics Class", Educational Studies in Mathematics, vol. 19, 1988, pp. 3—22  
— "On Culture, Geometrical Thinking and Mathematics Education", —, vol. 19, 1988, pp. 141—144  
掲載した図版もこれらの論文からのコピーである。
- (13) 前掲(9)
- (14) 北邑一恵他校注「算元記」, 下平和夫監修「江戸初期和算選書第2巻」, 研成社, 1991

- (15) 土屋寿祐の実践は2000年3月に行われ、同年6月24日開催の山形算数数学教育研究会で報告された。この実践を含めての論攷は2001年3月に提出される山形大学大学院修士論文としてまとめられる予定。
- (16) Morikawa Ikutaro & Miyako "North District and South District", ICME 9 のTSG11で行った口頭発表原稿。この発表は、E. Pehkonenらが編集する"ICME 9 /TSG11発表報告集"に収録予定。
- (17) 森川幾太郎「緑表紙における数教育（第11回）」、月刊すうがくno94、数学教育実践研究会、1979. 9、pp. 24-31
- (18) 川原秀城訳「劉徽註 九章算術」、『中国天文学・数学集』に収録、朝日出版、1980
- (19) 橋本敬造訳「周髀算経」、『中国天文学・数学集』に収録、朝日出版、1980
- (20) 佐藤政次「日本暦学史」、駿河台出版、1968  
ニーダム著、吉田忠他訳「中国の科学と文明、第5巻—天の科学—」、思索社、1976
- (21) 暦計算研究会編「新こよみ便利帳頂」によれば、現在の節季は春分を始点に黄道を見込む角を24等分することで決めている、という。また、同書には各年ごとの節季が一覧になっている。これによれば、16日間隔は夏至の周辺に並ぶ。例えば、2001年の場合、立夏（5/5）～小満（5/21）、芒種（6/5）～夏至（6/21）、夏至～小暑（7/7）、小暑～大暑（7/23）、立秋（8/7）～処暑（8/23）、白露（9/7）～立秋（9/23）

このように、16日間隔が方程式を解いて得たものより1多いのは、節季間隔が14日のものが一日あるためである。

また、同書には春分の日算出のための次ぎの式も掲載されている。

$$20.8431 + 0.242194 \text{ (西暦表記の年} - 1980) - \text{int} [(西暦表記の年 - 1980) / 4]$$

## 《第2部》

- (1) 片野善一郎：1982「数学史の学習についての中学・高校生の反応」『数学史研究』、95号、pp. 26-27、日本数学史学会
- (2) 小倉金之助：1950「数学者の回想」、河出書房、pp. 102-103
- (3) 岡部 進：1983「数学教育改造運動と共に」『小倉金之助その思想』、pp. 52-54
- (4) 松岡元久：1987「数学史と数学教育」『数学史研究』no. 112、日本数学史学会、pp. 22-26
- (5) 塚原久美子：1996「数学史の教材化に関する提言」『数学史研究』no. 151、日本数学史学会、pp. 9-17
- (6) 片野善一郎：1994「和算の思想と特質、その教育における利用」『数学史の利用』、共立出版、pp. 164-165
- (7) 藤井康夫：1997「算法天生法指南問題の解説」、大阪教育図書
- (8) 加藤平左エ門：1968「和算成熟時代」『日本数学史下』、槇書店、pp. 109-122  
会田は、愛宕山神社に奉納した算額の訂正を求められたことに端を発して藤田貞資およびその弟子と20年にわたって論戦を繰り返し、自身の主張を曲げなかった。このことがきっかけとなり、関流に対抗し、独自の最上流を旗揚げするに至った。また、会田は数学を系統的に簡素化することに努めた。算木計算の繁雑さを避け、算盤で簡単に計算することを考えた。また個々の公式から帰納してこれを一般化しようと努めた。彼の創意と見るべきものが、楕円周を求める算法、対数の理論などに認められるという。
- (9) 深川英俊：1998「全国算額一覧」『例題で知る日本の数学と算額』、森北出版、pp. 148-149



- (10) 佐藤健一：1994「庶民の算法「算額奉納」」「日本人と数江戸庶民の数学」，東洋書店，pp.128-141
- (11) 平山 諦：1982「数と図形が作った史談・巷談」『新・福島のと算』，福島県和算研究保存会，p.155
- (12) 平山 諦，松岡元久：1966『山形の算額』，東北大学理学部
- (13) 竹内芳男，沢田利夫：1984「問題から問題へ」『問題から問題へ』，東洋館，p.21-23
- (14) G. Polya：1945 "How to Solve It", Princeton University Press, pp. 16-17
- (15) G. Polya：1969 "Induction and Analogy in Mathematics", Princeton University Press, pp. 12-23
- (16) 森川幾太郎：1998「構成主義と数と計算」，実践研究No.11，数学教育実践研究会
- (17) Paul Cobb：1996 'Constructivism and Activity Theorem：A Consideration of Their Similarities and Difference as They Relate to Mathematics Education'  
H. M. Mansfield et. al. (eds.) "Mathematics for Tomorrow's Children：International Perspective on Curriculum", Kluwer, pp. 10-58
- (18) P. Cobb, E. Yackel, T. Wood：1992 'A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education' JRME, Vol.23, No.1, pp. 2-33

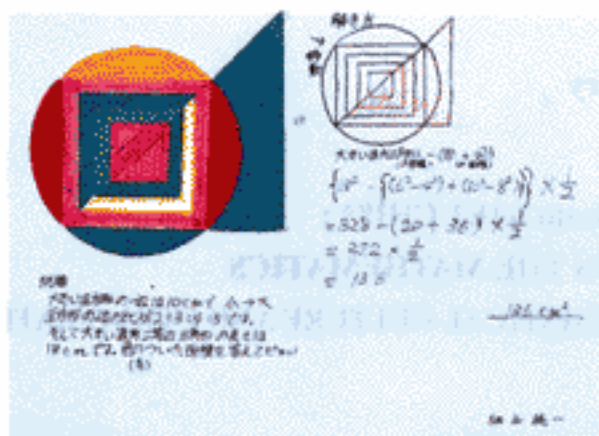
この論攷の第二部は2000年3月，菊池が山形大学教育研究科に提出した修士論文「民族の文化や伝統に根ざした数学教育」の第6章の一部として作成したものを発展・整理したものである。また，この部分の概要は，2000年7月31日～8月6日千葉・幕張で開催された第9回数学教育世界会議（ICME9）のWGA13「数学と文化」分科会において，菊池が00年8月2日発表した。

この論攷の副題に「民族数学」の名を入れ，第一部において民族数学に関する諸提案を批判的に検討を行った経緯を簡単に記す。

本論攷第二部に掲載した授業実践にあたりGerdesら民族数学研究者による諸提案を輪読し，それらから多くのことを学んだ。その概要は上記修士論文第4章に掲載されている。この経緯から，ICME9の組織委員会には，当初TSG21「民族数学」での発表を第一筆者と第二筆者の連名で申し込み，同分科会主任責任者のD'Ambrosio氏から発表許可を得た。そこで，TSG21分科会での発表準備も兼ね，第一部を森川が構想し執筆にあたった。その大綱が出来上がった段階でWGA13での発表と分科会変更を知らされた。しかし，民族数学の特徴をこの機会に整理し，発表することは意義があると考え，当初の予定通り第一部を完成し，第二部に添付することにした。なお，本論攷の第一部に掲載の実践の一部はICME9のTSG11分科会「問題解決」において森川が口頭発表を00年8月2日に行っている。



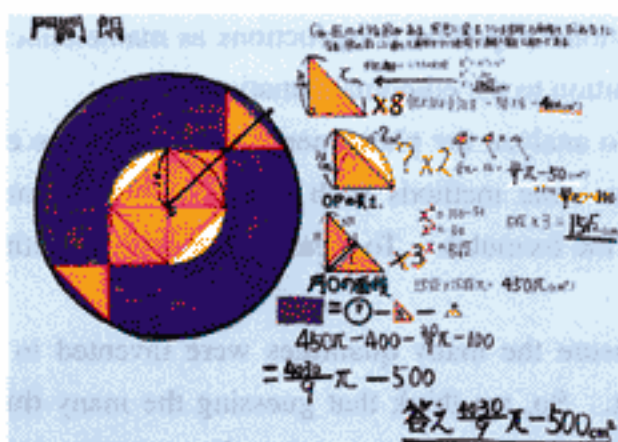
G



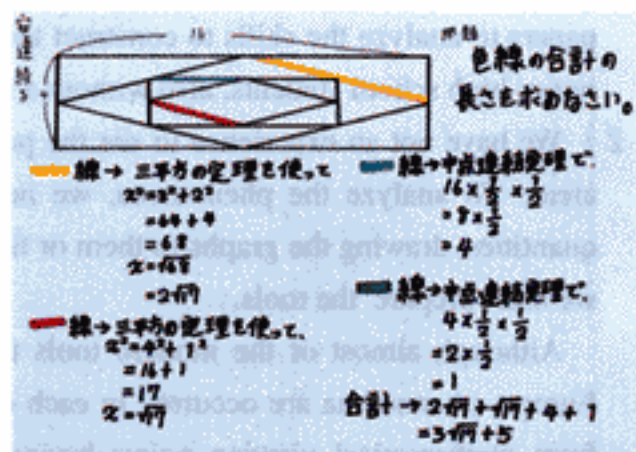
J



H



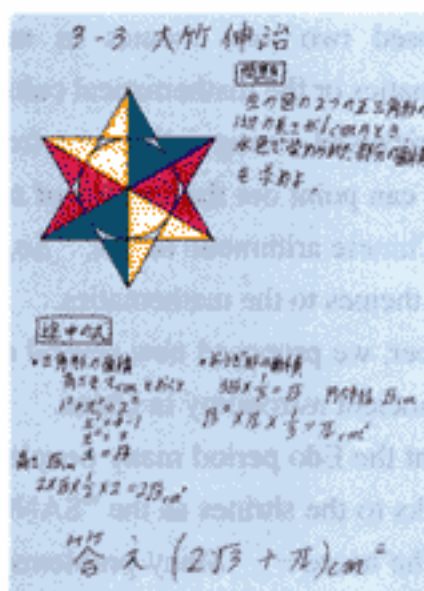
K



I



L





## Summary

Ikutaro MORIKAWA\*, Hisato KIKUCHI\*\* :

### PRODUCTIVE ACTIVITIES IN THE MATHEMATICS

#### —FROM THE VIEWING POINTS OF THE MATHEMATICAL CULTURE AND ETHNOMATH—

In the first part, we point out some characteristics things in the ethnomathematics ;

- 1) We can see often the geometrical things in the papers written representational persons to the branch. It would mean that they analyzed the memorial things or heritages being seen in present times from mathematical points. And then, we know that many persons tried to present the themes as mathematics education by analyzing many traditional geometrical constructions from previous days whether they had the recognitions to the ethnomathematics or not. We had the papers to analyze the skills to construct the traditional Japanese constructions as mathematics in junior high school students, also without a recognition to the ethnomathematics.
- 2) We have not an experience to see the papers to analyze the phenomena often met in the each area ; To analyze the phenomena, we need the some methods such as measuring the many quantities, drawing the graphs to them or finding the formulas. To measure the many quantities, we must prepare the tools.

Although almost of the modern tools to measure the many quantities were invented in the Europe, phenomena are occurred in each district. So, we think that guessing the many things from mathematical viewing points basing on data in those days are excellent themes in the ethnomathematics. But we can not see the papers written from this point as ethnomathematics unfortunately.

We proposed two new themes in mathematics education to the Japanese students as ethnomathematics or the mathematical culture ;

- 1) Japanese received strong influences from the Chinese cultures since ancient periods. For example, we can point out the sources of several mathematical words used in present Japan from the ancient Chinese arithmetic books. So, we treat the arithmetic or astronomy found in ancient China as the themes to the mathematics.

In this paper, we proposed new several equations related to the calender basing on some facts found in an ancient astronomy in China.

- 2) In Japan, at the Edo period many peoples enjoyed the mathematics. Some persons dedicated the own works to the shrines as the “SANGAKU”—written several mathematical problems with answers on the board—. Many problems of them are requiring the areas or drawing to special figures. And then, many of them belong to the finite mathematics. So, some of them could solve by the mathematics learnt in secondary school. Then, we can treat them as the themes in secondary schools.

In later part of this paper, we introduced the outline of the instruction challenging to make new



original mathematical problem including the remaking or to modifying an original “Sangaku” problem. In last part, we introduced as photo12problems represented as “Sangaku” by students.

(\*Section of Math. Education, Faculty of Education)

(\*\*Daini Junior High school in Yamagata city)