

## 一致高和による林分材積の推定に関する理論的研究

北 村 昌 美  
(山形大学農学部森林経理学研究室)  
昭和39年8月31日受領

### Theoretical Studies on the Estimation of Stand Volume Through the Sum of *Deckpunkthöhen*

Masami KITAMURA

(Laboratory of Forest Management, Faculty  
of Agriculture, Yamagata University)

#### 目 次

まえがき	366
緒 論	366
§ 1. 定角測定による林分材積推定法の研究史	366
§ 2. WZPの解釈における問題点	368
第1章 一致高和による林分材積推定の理論	369
§ 1. 拡大樹幹の想定と一致高和	369
§ 2. 林分材積推定式の誘導——積分幾何学の応用	370
§ 3. 林分材積推定式の誘導——定面積プロットを想定する場合	371
§ 4. 一致高和の不均質誤差	374
§ 5. 理論の拡張	377
§ 6. 一致高和の変動係数	378
§ 7. 林分形状高	379
第2章 理論の検証	380
§ 1. 検証林分と検証の方法	380
§ 2. 林分材積の点推定——Point samplingの場合	381
§ 3. 林分材積の点推定——定面積プロットを想定する場合	382
§ 4. 不均質誤差の分散の大きさ	383
§ 5. 林分材積の区間推定——定面積プロットを想定する場合	385
§ 6. 林分材積の区間推定——Point samplingの場合	386
第3章 応用上の配慮	387
§ 1. Spiegel-Relaskopによる一致高の測定	387
§ 2. 二重抽出の応用	389
§ 3. 二重抽出による標本調査の設計	391
§ 4. 定面積プロットを想定する場合の標本調査の設計	391
§ 5. 適用例	392
結 論	394
要 約	394
参考文献	396
Summary	397
附 表	399

## ま え が き

BITTERLICH (1948) が Winkelzählprobe (WZP) を発表して以来、定角測定法の研究は急速に進展してきた。その研究の内容は、WZP の理論的解明と共に、定角測定という手段を用いる新しい林分材積推定法の確立をめざしてきたものと言えよう。

WZP の著しい特徴は、驚くばかりの実施の容易さに見出されるのであるが、それと共に解釈の多様性にもまたとまどわざるを得ない。しかし解釈の多様性は、それぞれの前提とする仮定の相違にもとづくものであつて、仮定が許されるなら何れも理論的には成立つであろう。それゆえ本研究においては、異なつた解釈を共に並立させ、かつ互いに援用しながら理論を展開することとした。

WZP から林分材積推定に至る道程には多くの困難が存在するが、それらの困難を克服する理論もまた種々の角度から展開されてきた。しかしながらこれまでの方法は、それぞれ WZP を出発点としながらも、終始定角測定で一貫したものではなかつた。すなわちある場合は林分形数を、ある場合は林分材積表を介してというように、定角測定とは異質の手段の適用を必要とした。いわば WZP が 2 次元空間での定角測定法であるのに対し、3 次元空間における定角測定法の理論は未だ完全なものとは言えなかつたのである。本研究は、この点に着目することによつて、3 次元空間における定角測定法の理論の確立を目的として行なわれた。すなわち本研究は、定角測定で終始統一された林分材積推定の方法を新たに開拓しようとするものである。

本法の実用化についてはなお多くの問題が残されてはいるが、本論文においてはとりあえず筆者が現在までに明らかにした推定の理論を主として記述した。なお本論文は京都大学審査学位論文としてとりまとめたものである。

本研究に當つてたえず御指導を賜つた京都大学岡崎文彬教授、山形大学菊池捷治郎教授、京都府立大学大隅真一助教授その他同学の方々に厚く御礼を申し上げる。

## 緒 論

### § 1. 定角測定による林分材積推定法の研究史

1947年に BITTERLICH (1947) の発表した“Winkelzählmessung”の考え方は、その後の定角測定法発展の端緒となつた。はじめ林木の正三角形結合を仮定して演繹された理論は、後に胸高断面の拡大円を想定することによつて、“Winkelzählprobe (WZP)”として一般化されると共に、測定器具としての種々のレラスコープ特に BITTERLICH の Spiegel-Relaskop の考案により急速に実用化された。同時に WZP の理論的研究も種々の角度から進められた。特に GROSENBAUGH (1952) は、BITTERLICH 自身の発想とは全く異なつた Point sampling の観点からの確率論的概念を WZP に与え、これを木梨 (1952) が日本に紹介した。Point sampling の考え方は、後に増山 (1953) によつて積分幾何学から根拠が与えられた。AFANASIEV (1958) は BITTERLICH の発想のもとをなした可変半径プロット法 (Variable plot radius method) の考え方を採用しているが、これに対し PRODAN (1953) が WZP に与えた証明は、定面積プロットを考え方基礎におくものと解することができる。

ここで WZP の解釈は、いわゆる Plotless sampling という言葉に表現されているように、母集団は点の上の拡大円の数から構成されるとする考え方と、プロット内に存在する林木

の胸高直径を輪尺で測定する代りに、定角測定を行なうものとする考え方の2つに大きく分れた。解釈の相違は、必然的に標本調査の方法、誤差評価の仕方に相違をもたらすのである。

一方平田(1955)は、樹高の変換円を想定して、定角測定による林分平均樹高推定の方法を見出した。甲斐原(1957)は、これとは別に積分幾何学を応用して、林面上に想定した定長の線分による平均樹高推定法を明らかにした。甲斐原の方法は Line sampling の一種である。

STRAND(1957)は、Line sampling の応用によつて、断面積合計と円柱体積の合計とを推定する方法を発表し、平田(1958b)が日本に紹介した。立体を直接定角測定の対象とした点でこの方法の意義は大きい。その後断面積合計または円柱体積合計を林分材積に結びつけるための研究があいついで進められた。平田(1958c)は、林分の楕円柱体積をコノメータと輪尺を用いて推定し、これから林分材積を求める方法を明らかにした。ここに楕円柱というのは、直径と樹高に比例した量を両径とするもので、楕円柱の高さは樹高である。また WZP と林分材積式とを組合せる方法については高田(1962)等の研究がある。さらに平田(1962)は、WZP と単木材積表を組合せた方法を新しく提案した。これらとは別に大隅(1958, 1960a)は、望高法の価値を再認識し、Spiegel-Relaskop の使用による林分形状高の測定を通して林分材積を推定する方法を明らかにした。

上述の諸方法が、何れも定角測定で統一されていないのに対し、BITTERLICH(1955, 1956)の林分区分求積法は、一応定角測定で一貫した方法とみることができる。この方法は従来単木に対して行なわれてきた区分求積法を、林分に適用するものである。各区分の断面積は、WZP により推定される。すなわち、レラスコープで林木の胸高を観測したとき、カウントされた林木は、胸高以上の高さで必ずスリット巾と直径とが一致してみえる点をもつ。この点を BITTERLICH は“Deckpunkt”そして Deckpunkt の地上高を“Deckpunkthöhe”と名付けた。平田(1958a)は、“Deckpunkt”を“一致点”“Deckpunkthöhe”を“一致高”と訳した。本研究ではこれらの訳を採用してある。一致高は Spiegel-Relaskop の樹高測定用目盛を用いて測定できる。一致高がわかれば、各地上高においてカウントされる林木の数が求められる。BITTERLICH は、樹冠内で一致点を見出すのは困難であるとの考えから、観測可能な高さを“B-Grenze”と称し、B-Grenze 以下の一致高を測定することとした。その結果、B-Grenze 以下の林分欠頂幹材積が区分求積法によつて得られる。B-Grenze 以上の梢端部は円錐とみなす。円錐の高さは、平田のコノメータによる林分平均樹高から B-Grenze の高さを引いたものである。この方法はいわゆる BITTERLICH 法と平田法を併用するという意味で“B-H-Messung”とも言われる。

筆者(1962)は、1標本点で観測される一致高の和を“一致高和”と名付け、一致高和の標本平均から林分材積の推定値に至る理論の概要を示した。B-H-Messung が、同じ一致高の測定にもとづきながらも、結局断面積合計の推定値に一旦おきかえ、理論的には WZP の範囲を出ないのに対し、筆者の方法は直接林分材積の推定値を求める新しい定角測定法である。しかも、上部に至る程断面積推定の精度が落ち、さらに梢端部材積の求め方にも疑点の残る B-H-Messung の欠陥を是正している。定角測定法研究の努力が、定角測定と林分材積を直接結びつけることに主として注がれてきたことから考えると、一致高和を用いる筆者の方法の意義が自ら明らかになるものと言えよう。

## § 2. WZPの解釈における問題点

大隅(1960b)はWZPが3つの立場から解釈できることを指摘した。すなわち

1. Point sampling の立場
2. Variable plot method の立場
3. WZP 本来の立場

である。一致高和による林分材積推定の場合も、解釈の相違は異なつた理論の展開を要求する。それゆえ、まずWZP解釈上の重要な問題点を明らかにしておきたい。問題点の第1は、標本抽出の対象としての母集団の概念であり、第2は誤差の評価である。

### 1) 母集団の概念

Point sampling の立場はGROSENBAUGH(1952)によつて確立された。この場合の母集団は、林面上の点の上に重なる拡大胸高断面の数の集合として規定される。したがつて母集団の大きさは無限である。拡大胸高断面は林分外にもはみ出すから、もし林分内部だけで標本抽出を行なうなら推定値は偏りをもつ。この偏りを除くには、はみ出した拡大胸高断面をすべて含むように拡大面積を考え、その拡大面積内で標本抽出が行なわれなければならない。これは増山(1953, 1956)のいう“不偏性の条件”をみたすことである。

これに対し大隅のいうWZP本来の立場は、PRODAN(1953)の証明に基礎をおくもので、母集団を定面積プロット内の断面積の集合と考える。したがつて母集団の大きさは有限である。当然のことながら不偏性の条件を考慮する必要はない。その代り、測定点の位置は定面積円形プロットのある中心にあると考えられ、そのため少くともプロットの半径の大きさだけ林分境界より内側に定められる。ただし林縁木が林分内部の林木と本質的に異なることを考慮すれば、母集団を機械的に等質とみなすことは危険であると言えよう。したがつて、層化を行なうとか、あるいは林縁に対しては異なつた測定法を適用する等の配慮も必要である。WZPをいかなる立場から解釈するにしても、林縁木が生物学的に異質であることは共通の問題として考慮されるべきであろう。

主としてAFANASIEV(1958)によつて明確にされたVariable plot methodの考え方は、Plot samplingの立場をとりつつも、面積を直径階毎に想定するものである。すなわち、各直径階の断面積に比例した異なる大きさのプロットの集合としての母集団が想定される。したがつて母集団の性格は、標本抽出の対象としては極めてあいまいであると言わねばならない。そこで本研究においては、Point samplingの立場と定面積プロットを想定する立場の2つに整理した上で検討をすすめてゆくこととした。

### 2) 誤差の評価

Point samplingの立場をとるときは、標本抽出誤差のみが評価される。不偏性の条件をみたすよう林分の拡大面積を設定して標本抽出を行なうときは、林分境界附近ならびに林分外の標本点における拡大胸高断面の重なり数、すなわち“カウント数”は、林分内部の標本点にくらべて当然少くなる。したがつて抽出誤差としては不当に大きい値が得られるであろう。それゆえ誤差評価の面からみるときは、拡大面積を設定しないでカウント数の偏りを補正する方法が望ましい。

定面積プロットを想定する立場をとるときは誤差評価における著しい特徴は、PRODAN(1953)のいう“*Inhomogenitätsfehler*”の存在である。PRODANの仮定は、林木配置の“*statistisch homogen*”であるが、これは大隅(1961a)によれば、与えられた林木が林面



に偶然的にばらまかれたあらゆる可能な場合のうち、平均的狀態を意味するものと理解することができる。したがってこの仮定が成立しなければ、いわゆる “Inhomogenitätsfehler” が生じる。大隅はこれを “不均質誤差” と訳した。

定面積プロットを想定する場合の誤差は、この不均質誤差と標本抽出誤差との2つの部分から成立つ。しかも定面積としてどのような大きさを採用するかによつて、両者の割合はいかようにも評価できるのである。仮に林分全体を1つの抽出単位と考えるならば、標本抽出誤差は存在せず不均質誤差のみとなる。また定面積プロットを想定する限り、単位面内における最大直径木の拡大胸高断面の大きさ以下にはプロットを細分することはできないから、想定されたプロットのすべてを抽出しても、推定には必ず不均質誤差を伴うのである。

## 第1章 一致高和による林分材積推定の理論

### § 1. 拡大樹幹の想定と一致高和

はじめに次の仮定を設ける。

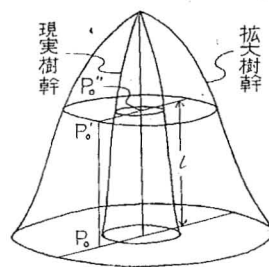
- 1° 幹軸は直線であつ直立している。
- 2° 現実樹幹の横断面は、すべて幹軸を中心とする円である。
- 3° 現実樹幹の直径は、梢端より根元に至る区間で単調に増加する。
- 4° 林面は水平である。

1°~3°の仮定は、積分幾何学の応用という観点からみれば必ずしも必要ではないが、後の理論展開に都合なように、測樹学の常識にしたがつて設けた。4°の仮定は現実に即しないが、傾斜に対する補正を同時に考えることの煩わしさを避けるために設けた。測定に際して、傾斜に対する補正が自動的に行なえるレラスコープを用いるならば、4°の仮定のもとでの推定理論はそのまま傾斜面にも適用できる。

次に、梢端から根元に至るすべての位置で、現実樹幹の直径の $\rho$ 倍の直径を有する仮想の樹幹を考え、これを “拡大樹幹” と名付ける。拡大樹幹の横断面積は、どの位置でも現実樹幹の横断面積の $\rho^2$ 倍となつており、体積もまた現実樹幹の材積の $\rho^2$ 倍である。

ここで図(1-1)の如く、点 $P_0$ が拡大樹幹の底面内に含まれる場合を考える。 $P_0$ において垂線を立て、垂線と拡大樹幹表面との交点を $P_0'$ とすれば、線分 $P_0P_0'$ が拡大樹幹内に含まれる。この $P_0P_0'$ の長さを $l$ とする。ところで $P_0'$ は、現実樹幹の幹軸上、地上高 $l$ なる点 $P_0''$ を中心とし、その位置の現実樹幹の直径の $\rho$ 倍を直径とする拡大円の円周上にある。したがつて $P_0''$ はBITTERLICHのいう一致点、 $l$ は一致高にほかならない。ただしB-H-Messungにおいては断面積常数4が用いられたが、ここでの断面積常数は、 $\rho$ の定め方によつて異なつたものとなる。

林分内のすべての林木の現実樹幹を拡大樹幹でおきかえれば、これら拡大樹幹の体積の合計は林分材積の $\rho^2$ 倍となる。倍率 $\rho$ をある程度大きくとれば、拡大樹幹は空間を重複して占めることになるであろう。したがつて林分の地表面内に任意の1点 $P_0$ をとるときは、



図(1-1) 拡大樹幹

P<sub>0</sub>の上にいくつかの拡大樹幹の一致高が立つ。P<sub>0</sub>におけるすべての一致高の和を“一致高和”とよぶこととする。

## § 2. 林分材積推定式の誘導——積分幾何学の応用

林分外にはみ出した拡大樹幹の底面をすべて含むように拡大面積を設定する。これは不偏性の条件をみたすためである。ここで林分面積を  $T$ ，拡大面積を  $T'$  で表わす。

材積  $v$  を有する林木の拡大樹幹の体積は  $p^2v$  であるから、点の測度を  $[dx, dy]$  とするとき、単一の拡大樹幹については明らかに

$$p^2v = \int_{T'} l dx dy$$

ここで  $\int_{T'}$  は  $T'$  の内部について積分することを示す。一方

$$T' = \int_{T'} dx dy$$

であるから、 $l$  の母平均  $m_l$  は

$$m_l = \frac{\int_{T'} l dx dy}{\int_{T'} dx dy} = \frac{p^2v}{T'} \dots\dots\dots (1-1)$$

次に一致高和を  $L$  とかけば、 $L$  は単一樹幹の一致高  $l$  の和であるから、 $L$  の母平均  $M_L$  について次式が成立する。

$$M_L = \frac{\int_{T'} L dx dy}{\int_{T'} dx dy} = \frac{\int_{T'} (\Sigma l) dx dy}{\int_{T'} dx dy} = \frac{p^2 \Sigma v}{T'} = \frac{p^2 V}{T'} \dots\dots\dots (1-2)$$

$V = \Sigma v$  : 林分材積

したがって  $V$  の不偏推定値を  $\hat{V}$  とすれば、式 (1-2) より

$$\hat{V} = \frac{T' \bar{L}}{p^2} \dots\dots\dots (1-3)$$

$\bar{L}$  :  $L$  の標本平均

測定実施の際には、現実樹幹の底面内に標本点をとることができないので、厳密には大友(1960)のWZPに対する証明の如く、そのために生じる偏りの補正を要する。しかし林分面積に対する現実樹幹の底面積の割合は普通極めて小さいのでここでは偏りを無視した。

前沢(1957)、芳賀・前沢(1959)によれば、Point samplingの立場からWZPを実施するとき、林分の形が特に細長いとか不規則でなく、面積が特に小さくないときは林分境界による偏りを考慮しなくともよいと述べている。これは上記の条件のとき  $T' = T$  が近似的に成立つことを意味すると考えてよい。一般に  $T' = T$  が成立てば、式 (1-3) は

$$\hat{V} = \frac{T \bar{L}}{p^2} \dots\dots\dots (1-4)$$

とかける。なおここで  $T$  を 1 ha とすれば、ha 当り材積の不偏推定値  $\hat{V}/\text{ha}$  については

$$\hat{V}/\text{ha} = \frac{10000 \bar{L}}{p^2} = K \bar{L} \dots\dots\dots (1-5)$$

$K$  : 断面積常数

ただし、 $T'=T$  なる条件が常に成立するとは限らない。例えば全標本点数に対して林分境界近くに落ちる標本点数の割合が比較的大きい場合には、偏りを無視することができないであろう。 $T'=T$  を一般に成立させる、すなわち拡大面積を設定することなく林分材積の不偏推定値を得るためには、適切な補正法が考えられねばならない。そこでまず WZP における補正法について考察してみよう。

林分境界による偏りの問題については、HUSCH (1955, 1956) と GROSENBAUGH (1955) とが意見を交換した。ただし最大直径木に対する拡大円の半径だけ林分境界より内側に標本点をとるべきであるとする HUSCH の見解は、Variable plot method の立場をとるものであるからここでいう補正法の中には入らない。ここでは GROSENBAUGH の方法のみが問題となる。GROSENBAUGH は、林分境界近くの標本点では全周すなわち  $2\pi$  を観測せず、林分内部に向つて  $\pi$  だけ観測し、測定値を 2 倍することを提唱している。もし  $2\pi/3$  を観測すれば 3 倍し、 $\pi/2$  の場合は 4 倍すればよい。これに対し筆者 (1961) は、拡大胸高断面の林外にはみ出した部分を、林分境界線上で林内に折返したと仮定し、折返し部分のカウント数を林内の標本点のカウント数に加えることによつて近似的に不偏性の条件をみたし得ることを述べ、かつ実験例を示した。GROSENBAUGH の補正法は、標本点が林分境界線上に落ちるときに限り筆者の補正法と一致する。ただし何れの場合も林縁木の特異性を考慮に入れていない。この問題について配慮を要することは既述の通りである。

Point sampling の立場をとる限り、筆者の補正法は  $T'=T$  なる条件をみたす適切な方法と考えられるが、一致高和による林分材積推定の場合は WZP の場合と異なり適用が著しく困難となる。したがつて理論的にはともかく、実施上 GROSENBAUGH の補正法が最も適切と考えられる。

$T'=T$  なる条件が成立すれば、式 (1-4) は Point sampling の立場における林分材積推定の基本公式となる。

この基本公式から直径級別材積の推定式を導くことができる。すなわち一致高測定木の胸高直径を同時に測定すれば、直径級別一致高和の標本平均から次式が得られる。

$$\hat{V}_i = \frac{T\bar{L}_i}{p^2} \dots\dots\dots (1-6)$$

$\hat{V}_i$  : 第  $i$  直径級材積の不偏推定値

$\bar{L}_i$  : 第  $i$  直径級一致高和の標本平均

$i=1, 2, \dots\dots\dots, t$  ( $t$ : 直径級の数)

ただし測定実施の際に直径級の中をあまり狭くすることは好ましくないであろう。なお直径級別  $1\text{ha}$  当り材積の不偏推定値  $\hat{V}_i/\text{ha}$  についても次式が成立する。

$$\hat{V}_i/\text{ha} = K\bar{L}_i \dots\dots\dots (1-7)$$

### § 3. 林分材積推定式の誘導——定面積プロットを想定する場合

定面積プロットを想定する考え方は一致高和による林分材積推定の場合にも成立つ。

いま仮に現実樹幹の底面を観測できるものとして、林分内の任意の 1 点でレラスコープによる定角測定を行なう場合を考えてみよう。定角からはみ出して見える底面のうち、最大のものの直径を  $d_\alpha$  とする。 $d_\alpha$  はその林分の最大底面の直径  $d_t$  とは必ずしも一致しない。ここで PRÓDAN (1953), 大隅 (1961a, 1961b) と同様に、標本点を中心とし  $pd_\alpha$  を

直径とする円形プロットを考え、その面積を  $R_\alpha$  とすれば、

$$R_\alpha = \frac{\pi}{4} p^2 d_\alpha^2 = p^2 g_\alpha$$

$g_\alpha$  : プロット内最大底面の断面積

ここで  $R_\alpha$  内の林木配置が完全に偶然的であるという仮定をおく。いま一般に現実樹幹の底面積を  $g_0$  とかけば、単一樹幹の一致高  $l$  についてまず次の確率が得られる。

$$\Pr \{l = 0\} = 1 - \frac{p^2 g_0}{R_\alpha} \dots\dots\dots (1-8)$$

一方、一般に幹曲線式を

$$Y^2 = F(X) = F(h-l)$$

$Y$  : 梢端を原点、幹軸を  $X$  軸にとつたときの樹幹の半径

$X$  : 梢端からの長さ

$h$  : 樹高

と表わせば、単一樹幹については  $h$  は一定であるから、 $Y$  は  $l$  のみの関数となり幹曲線式は次のように改められる。

$$Y^2 = f(l)$$

$Y$  : 幹軸と樹幹底面との交点を原点としたときの樹幹の半径

したがって幹軸上任意の位置における現実樹幹の横断面積  $g$  は

$$g = \pi f(l)$$

これより  $l$  の分布関数  $\Phi(l)$ 、確率密度  $\varphi(l)$  を導くことができる。

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(l) &= \frac{p^2}{R_\alpha} \{g_0 - \pi f(l)\} \dots\dots\dots (1-9) \\ &\quad (0 < l \leq h) \end{aligned} \right.$$

$$\varphi(l) = -\frac{p^2}{R_\alpha} \pi f'(l) \dots\dots\dots (1-10)$$

$l$  の母平均  $m_l$  は、 $l$  の原点周りの 1 次のモーメント  $\mu'_{l1}$  に等しく、式 (1-10) より

$$\begin{aligned} m_l = \mu'_{l1} &= \int_0^h l \left\{ -\frac{p^2}{R_\alpha} \pi f'(l) \right\} dl \\ &= \frac{p^2}{R_\alpha} \left\{ -\left[ l \pi f(l) \right]_0^h + \int_0^h \pi f(l) dl \right\} \end{aligned}$$

幹曲線の定義によつて

$$\left[ l \pi f(l) \right]_0^h = 0$$

となるから

$$m_l = \frac{p^2}{R_\alpha} \int_0^h \pi f(l) dl = \frac{p^2 v}{R_\alpha} \dots\dots\dots (1-11)$$

$R_\alpha$  内にある  $z_j$  本の林木の一致高和の母平均  $M_{Lj}$  は、単一樹幹の一致高の母平均の和となるから

$$M_{Lj} = \sum_{j=1}^{z_j} m_l = \frac{p^2 \sum_{j=1}^{z_j} v}{R_\alpha} = \frac{p^2 V_j}{R_\alpha} \dots\dots\dots (1-12)$$

$V_j$  : 第  $j$  プロットの材積の和

大隅 (1961a, 1961b) は、標本抽出に応用する立場からみると、単位面として林分内林木の最大直径に対する拡大円をとり、これを抽出単位とするのが WZP の場合妥当として

いる。一致高和による林分材積推定の場合も、標本抽出のためにプロットの大きさを揃えるには、林分内の最大底面の直径  $d_l$  に対する拡大円

$$R_l = p^2 g_l$$

$g_l$ : 林分内最大底面の断面積

をとり、 $R_l$  を抽出単位とするのが適切であろう。すると、これまでの式 (1-8)~(1-12) における  $R_a$  はすべて  $R_l$  におきかえられる。

林分  $T$  内に面積  $R_l$  のプロットが  $N$  個含まれるとすれば、

$$T = NR_l$$

と表わすことができる。したがって式 (1-12) より林分材積  $V$  について次式が得られる。

$$V = \sum_{j=1}^N V_j = \frac{R_l}{p^2} \sum_{j=1}^N M_{Lj} = \frac{T \sum_{j=1}^N M_{Lj}}{p^2 N} = \frac{T \bar{M}_{Lj}}{p^2}$$

ここで林分全体の一致高和の母平均を  $M_L$  とかけば

$$M_L = \bar{M}_{Lj}$$

から

$$V = \frac{T M_L}{p^2}$$

したがって  $V$  の不偏推定値  $\hat{V}$  は、 $L$  の標本平均  $\bar{L}$  から求められる。

$$\hat{V} = \frac{T \bar{L}}{p^2} \quad \dots\dots\dots (1-13)$$

これは式 (1-4) と全く同じ形である。また同様に ha 当り材積に関する式 (1-5) も成立する。

ここで

$$T = NR_l$$

は厳密には成立しないが、普通の円形プロット法と同様に許されてよいであろう。

さてこれまでは林木の根元を観測できるものとして考えてきた。しかし現実には樹幹の根元を観測することが困難なこともあり、また観測し得るとしても、形状の複雑さのために誤差を生じやすいと考えられる。したがって観測を胸高以上に限るものとしてみよう。これは胸高以下を円柱と仮定することに相当する。この仮定は既に望高法で採用されている。望高法自身の正確度が比較的高く実用上充分であることは、吉田 (1930)、大隅 (1960a) 等により詳述されているところである。さらに根張りの部分の利用価値が低いことをも併せ考えれば、胸高以下を円柱とみなしても実用上支障はないであろう。

いま胸高を  $h_b$ 、胸高断面積を  $g_b$ 、林分内最大胸高直径を  $d_{lb}$ 、林分内最大胸高断面積を  $g_{lb}$  とすれば、単位プロットの面積  $R_{lb}$  は

$$R_{lb} = \frac{\pi}{4} p^2 d_{lb}^2 = p^2 g_{lb}$$

となり、まず式 (1-8) の代りに

$$\Pr \{l=0\} = 1 - \frac{p^2 g_{lb}}{R_{lb}}$$

が得られる。さらに式 (1-9)、(1-10) はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} \Phi(l) = \frac{p^2}{R_{lb}} \{g_b - g_b\} = 0 \\ \varphi(l) = 0 \end{cases} \quad (0 < l \leq h_b)$$

$$\begin{cases} \Phi(l) = -\frac{p^2}{R_{lb}} \{g_b - \pi f(l)\} \\ \varphi(l) = -\frac{p^2}{R_{lb}} \pi f'(l) \end{cases} \quad (h_b < l \leq h)$$

したがって単一樹幹の  $l$  の母平均  $m_{lb}$  は

$$\begin{aligned} m_{lb} &= \int_{hb}^h l \left\{ -\frac{p^2}{R_{lb}} \pi f'(l) \right\} dl \\ &= -\frac{p^2}{R_{lb}} \left\{ -\left[ l \pi f(l) \right]_{hb}^h + \int_{hb}^h \pi f(l) dl \right\} \end{aligned}$$

ここで胸高以下の円柱部分の材積を  $v_1$ , 胸高以上の材積を  $v_2$  とおけば

$$\begin{aligned} -\left[ l \pi f(l) \right]_{hb}^h &= v_1 \\ \int_{hb}^h \pi f(l) dl &= v_2 \end{aligned}$$

さらに単一樹幹の材積  $v$  について

$$v = v_1 + v_2$$

と表わせば

$$m_{lb} = \frac{p^2}{R_{lb}} \{v_1 + v_2\} = \frac{p^2 v}{R_{lb}} \quad \dots\dots\dots (1-14)$$

となり, 以下式 (1-13) と全く同様の誘導過程を経て

$$\hat{V} = \frac{T \bar{L}_b}{p^2} \quad \dots\dots\dots (1-15)$$

$\bar{L}_b$ : 胸高以下を円柱とみなしたときの一致高和の標本平均

が成立する. さらに  $ha$  当り材積については

$$\hat{V}/ha = K \bar{L}_b \quad \dots\dots\dots (1-16)$$

が得られる. なお記号  $\bar{L}_b$ ,  $L_b$  の添字は, 今後特にまぎらわしくない限り省略する.

#### § 4. 一致高和の不均質誤差

定面積プロットを想定して一致高和による林分材積の推定を行なう場合には, WZP の場合と同様に林木のあらゆる可能な偶然的配置のうち平均的状态に対してのみ正しい値を与える. しかし現実にはこの平均的な状態を測定し得ないので一般に誤差を伴う. この誤差を WZP の場合と同様に“一致高和の不均質誤差”ということにする. 本節では一致高和の不均質誤差の大きさについて検討する. ここでの仮定は, 前節と同様, 定面積プロット内における林木の完全な偶然的配置である.

はじめに林木の底面まで観測するものとして検討をすすめる. いま単一樹幹の一致高  $l$  の, 原点周りの 2 次のモーメントを  $\mu'_{l2}$  とかけば, 林分内最大底面の直径  $d_l$  に対する拡大円面積  $R_l$  に等しい面積をもつプロット内では

$$\begin{aligned} \mu'_{l2} &= \int_0^h l^2 \left\{ -\frac{p^2}{R_l} \pi f(l) \right\} dl \\ &= -\frac{p^2}{R_l} \left\{ -\left[ l^2 \pi f(l) \right]_0^h + 2 \int_0^h l \pi f(l) dl \right\} \end{aligned}$$

幹曲線の定義から

$$\left[ l^2 \pi f(l) \right]_0^h = 0$$

また平均値の定理により次式を成立させる  $l_\xi$  ( $0 < l_\xi < h$ ) が存在する.

$$\int_0^h l \pi f(l) dl = l_\xi \int_0^h \pi f(l) dl = l_\xi v \quad (1-17)$$

したがって

$$\mu'_{l_2} = \frac{2p^2 l_\xi v}{R_l} = 2l_\xi m_l$$

一致高の分散を  $\sigma^2_l$  とかけば

$$\sigma^2_l = \mu'_{l_2} - \mu'^2_{l_1} = 2l_\xi m_l - m_l^2 \quad (1-18)$$

ここで  $l_\xi$  の大きさについて検討してみる.  $l_\xi$  の大きさは式 (1-17) より

$$l_\xi = \frac{\int_0^h l f(l) dl}{\int_0^h f(l) dl} \quad (1-19)$$

となり, 幹曲線式としていかなるものが適合するかによつて異なる.

まず KUNZE の幹曲線式を想定すれば, 式 (1-19) より

$$l_\xi = \frac{\int_0^h l(h-l)^r dl}{\int_0^h (h-l)^r dl} = \frac{h}{r+2}$$

$r$ : 形状指数

ここで

$$l_\xi = \xi h$$

と表わせば,  $r=1$  のとき  $\xi=1/3$ ,  $r=1.5$  のとき  $\xi=1/3.5$ ,  $r=2$  のとき  $\xi=1/4$  が得られる.

幹曲線式として代表的な KUNZE 式のほかに, 従来多くの式が発表されているが, それらのうち最近の研究成果である大隅 (1959) の相対幹曲線式を次に想定してみる. 相対幹曲線式とは, 梢端を原点とし, 幹軸上  $X$  なる距離における半径を  $Y$ , 樹高を  $h$ ,  $x=X/h$ ,  $x$  の定値  $x_0$  における直径を  $dx_0$ ,  $y=Y/dx_0$  とするとき,  $y$  を  $x$  の関数として表わした式のことである.  $x_0=0.9$  としたときの相対幹曲線式として大隅は

$$y = ax + bx^2 + cx^3$$

$a, b, c$ : 常数

を採用している. 大隅の例示したのは, 附表 (1-1) に総括した10種のスギの相対幹曲線式である. これらのうち O群に属する6種は, 京都府立大学大野演習林の47年生スギ一斉林の主伐木, Y群に属する4種は, 奈良県吉野郡川上村の63~71年生スギ一斉林の主伐木を資料として得られたものである. それぞれ番号が大きくなるにしたがい幹形は完満となっている.

大隅の相対幹曲線式に対して, 式 (1-19) は

$$\begin{aligned} l_\xi &= \frac{\int_0^h l \left\{ a \left( 1 - \frac{l}{h} \right) + b \left( 1 - \frac{l}{h} \right)^2 + c \left( 1 - \frac{l}{h} \right)^3 \right\}^2 dl}{\int_0^h \left\{ a \left( 1 - \frac{l}{h} \right) + b \left( 1 - \frac{l}{h} \right)^2 + c \left( 1 - \frac{l}{h} \right)^3 \right\} dl} \\ &= h \left\{ 1 - \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{2ab}{5} + \frac{2ac+b^2}{6} + \frac{2bc}{7} + \frac{c^2}{8}}{\frac{a^2}{3} + \frac{2ab}{4} + \frac{2ac+b^2}{5} + \frac{2bc}{6} + \frac{c^2}{7}} \right\} \end{aligned}$$



上式から大隅の10種の相対幹曲線式に対する $\xi$ を求めれば表(1-1)の通りとなる。

表(1-1)から、幹形が完満になるにしたがつて $\xi$ の値は大きくなり、かつ KUNZE 式と比較すると大体  $r=1$  から  $r=1.5$  の間にあることが見出される。10種の相対幹曲線式が林木の幹形をすべて表現しているわけではないが、一応梢殺の場合は  $1/3.5$ 、完満の場合は  $1/3$  程度とみてよさそうである。

ところで不均質誤差分散の理論式誘導の主たる目的が、標本調査への理論値の応用にあることを考えると、ここではむしろ分散の大きさを過小評価しないという配慮をして、 $r=1$  すなわち  $\xi=1/3$  と仮定するのが適切であろう。この仮定は、分散の大きさを論ずる場合に限り幹形を放物線体とみなすことと一致する。

このとき式(1-18)は

$$\sigma_l^2 \doteq -\frac{2}{3} h m_l - m_l^2 \dots\dots\dots (1-20)$$

となる。

はじめから幹曲線を放物線と仮定しておけば、 $l$  の確率密度  $\varphi(l)$  は

$$\varphi(l) = \frac{p^2 g_0}{R_l h} \quad (0 < l \leq h)$$

となつて  $l$  を含まない。ここで再び胸高以下を円柱とみなせば

$$\varphi(l) = \frac{p^2 g_b}{R_{lb}(h-h_b)} = \frac{m_b}{h-h_b} \quad (h_b < l \leq h)$$

ここで  $m_b$  は、WZP における単一樹幹のカウント数の母平均で

$$m_b = \frac{p^2 g_b}{R_{lb}}$$

である。このとき  $l$  の原点周りの2次のモーメント  $\mu'_{l2}$  は

$$\mu'_{l2} = \int_{h_b}^h l^2 \frac{m_b}{h-h_b} dl = \frac{m_b}{3} (h^2 + h h_b + h_b^2)$$

したがつて、胸高以下を円柱とみなした場合の単一樹幹の一致高の分散  $\sigma_{lb}^2$  は

$$\sigma_{lb}^2 = \frac{m_b}{3} (h^2 + h h_b + h_b^2) - m_b^2 \dots\dots\dots (1-21)$$

ここで

$$m_{lb} = \frac{m_b(h-h_b)}{2} + h_b m_b = \frac{m_b}{2} (h + h_b)$$

となるから、式(1-21)の  $\sigma_{lb}^2$  と、式(1-20)の右辺の  $m_l$  を  $m_{lb}$  でおきかえたときの値との差  $\delta_{\sigma^2}$  を求めると

$$\delta_{\sigma^2} = \frac{m_b}{3} (h^2 + h h_b + h_b^2) - \frac{1}{3} h m_b (h + h_b) = -\frac{h_b^2 m_b}{3}$$

ここで近似的に

$$m_{lb} \doteq \frac{h m_b}{2}$$

表(1-1) 大隅の相対幹曲線式における $\xi$ の大きさ

群—番号	$\xi$
O—I	0.2932
O—II	0.3099
O—III	0.3164
O—IV	0.3181
O—V	0.3278
O—VI	0.3307
Y—I	0.3162
Y—II	0.3205
Y—III	0.3300
Y—IV	0.3359

において、式 (1-21) に対する  $\delta_{\sigma^2}$  の百分率  $\varepsilon(\%)$  を求めれば

$$\varepsilon(\%) = \frac{\frac{h_b^2 m_b}{3}}{\frac{2}{3} h m_{lb} - m_{lb}^2 + \frac{h_b^2 m_b}{3}} \cdot 100 \div \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4} m_b\right) \left(\frac{h}{h_b}\right)^2 + 1} \cdot 100$$

$m_b$  は 1 をこえることがなく、また測定の対象となる林分では  $h/h_b$  はふつう 10~25 程度と考えられる。しかも  $m_b$  の大きい林木ほど  $h/h_b$  は一般に大きいから、 $\varepsilon$  が 1% をこえることはほとんどない。そこで差  $\delta_{\sigma^2}$  を無視すれば、胸高以下を円柱とみなした場合でも、単一樹幹の一致高の分散の式として、近似的に式 (1-20) と同形の式、すなわち

$$\sigma_{lb}^2 \div \frac{2}{3} h m_{lb} - m_{lb}^2 \dots\dots\dots (1-22)$$

が適用できる。ただし今後は添字を略して、結局式 (1-20) を単一樹幹の一致高分散の式として用いる。

$R_{lb}$  内の  $z_j$  本の林木の配置が完全に偶然的であるとき、一致高和の不均質誤差の分散  $V(L_j)$  は、単一樹幹の一致高の分散の和となるから、式 (1-20) より次式が得られる。

$$\begin{aligned} V(L_j) &\div \sum_{i=1}^{z_j} \sigma_i^2 \\ &\div \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{z_j} h m_i - \sum_{i=1}^{z_j} m_i^2 \\ &\div \frac{2}{3} M_{Lj} \bar{h}_j \left(1 + \rho_{hj \cdot vj} C_{hj} C_{vj}\right) - \frac{M_{Lj}^2}{z_j} (1 + C_{vj}^2) \dots\dots\dots (1-23) \end{aligned}$$

$M_{Lj}$  : 第  $j$  プロットにおける一致高和の母平均

$\bar{h}_j$  : 第  $j$  プロットにおける平均樹高

$\rho_{hj \cdot vj}$  : 第  $j$  プロットにおける  $h$  と  $v$  の相関係数

$C_{hj}$  : 第  $j$  プロットにおける  $h$  の変動係数

$C_{vj}$  : 第  $j$  プロットにおける  $v$  の変動係数

## § 5. 理論の拡張

定面積プロットを想定する立場をとるとき、プロットの大きさを  $R_{lb}$  に限る必要はなく、 $R > R_{lb}$  なる任意の面積  $R$  を単位にとつても推定の理論は成立する。なお今後はすべて胸高以下の一致高観測は行なわないという前提のもとに検討をすすめる。

単位面を林分全体とした場合への証明の拡張を考えてみよう。いま林木総本数を  $Z$  とし、林分面積を  $T$  とし、 $T$  内での林木配置が完全に偶然的であると仮定すれば、一致高  $l$  の母平均  $m_l$  は式 (1-14) と同様に

$$m_l \div \frac{p^2 v}{T}$$

となり、一致高和の母平均  $M_L$  は

$$M_L = \sum_{i=1}^Z m_i \div \frac{p^2 \sum_{i=1}^Z v}{T} = \frac{p^2 V}{T} \dots\dots\dots (1-24)$$

したがって  $V$  の不偏推定値  $\hat{V}$  は

$$\hat{V} \div \frac{T \bar{L}}{p^2}$$

となつて、既に得られた式 (1-15) と全く同じである。

次に一致高和の不均質誤差の分散  $V(L)$  は

$$\begin{aligned} V(L) &= \sum_{i=1}^Z \sigma_i^2 \\ &\doteq \frac{2}{3} \sum_{i=1}^Z h m_i - \sum_{i=1}^Z m_i^2 \\ &\doteq \frac{2}{3} M_L \bar{h} \left( 1 + \rho_{h,v} C_h C_v \right) - \frac{M_L^2}{Z} (1 + C_v^2) \dots\dots\dots (1-25) \end{aligned}$$

$\bar{h}$ ,  $\rho_{h,v}$ ,  $C_h$ ,  $C_v$  は, すべて林分全体に対する値となる.

この場合におかれた仮定は,  $T$  内での林木の完全な偶然的配置であるから, 林分境界の影響を受けない範囲で設けられたどの測定点についても, 式 (1-24), (1-25) は成立する. すなわちプロット面積を拡げれば, 測定点の位置をプロットの中心に固定する必要はない. したがって  $T$  内に 2 以上の測定点を設けて, 不均質誤差分散の推定値を得ることが可能になる.

$T$  内での林木配置が完全に偶然的であると仮定する限り, 林面上に点を固定して林木が動くと考えても, 林木を固定して点が動くと考えても, 単一樹幹における一致高  $l$  の確率分布は同じ式で表わされ, さらに一致高和の母平均および母分散についても同じ式が導かれる. 点が動くとする後者の考え方は Point sampling の立場をとるものと言えよう. したがって式 (1-24) および式 (1-25) の解釈は, 立場によつて異なつたものとなる.

定面積プロットを想定する立場をとれば, 式 (1-24) は  $T$  内の林木のあらゆる可能な偶然的配置を考えたときの一致高和の母平均であり, 式 (1-25) は不均質誤差の母分散である. これに対して Point sampling の立場をとれば, 式 (1-24) は, 林木配置が完全に偶然的であるときの一致高和の母平均であり, 式 (1-25) は標本抽出誤差の母分散である. ただし式 (1-24) の成立のためには, 既に § 2 で積分幾何学を応用して演繹した通り, 林木配置が偶然的であることを必要としない.

式 (1-25) の解釈は上述のように立場によつて分れはするが, 何れの立場でも共に成立つことからみて, 林分全体を単位面とみなしたときが両方の解釈の一致する点であると考えられる. ただし, 林木配置が完全に偶然的であるという仮定はその際に必要である.

## § 6. 一致高和の変動係数

Point sampling の立場をとるとき, 式 (1-25) は標本抽出誤差分散の大きさを表わすので, 一致高和の変動係数  $C_L$  の大きさについては次式が得られる.

$$\begin{aligned} C_L^2 &= \frac{V(L)}{M_L^2} \\ &\doteq \frac{2\bar{h}}{3M_L} \left( 1 + \rho_{h,v} C_h C_v \right) - \frac{1}{Z} (1 + C_v^2) \dots\dots\dots (1-26) \end{aligned}$$

一方平田 (1958d) は,  $T$  内での林木配置が完全に偶然的であるという同じ仮定のもとで, Point sampling の立場から WZP におけるカウント数  $B$  の分散  $V(B)$  と, 変動係数  $C_B$  の理論式を誘導した. すなわち

$$\begin{aligned} V(B) &= M_B - \frac{M_B^2}{Z} (1 + C_k^2) \\ C_B^2 &= \frac{1}{M_B} - \frac{1}{Z} (1 + C_k^2) \end{aligned}$$

$M_B$ :  $B$  の母平均

$C_k$  : 拡大胸高断面の変動係数

これらの式から、実用的には

$$V(B) \doteq M_B$$

$$C_B^2 \doteq \frac{1}{M_B}$$

とするものである。

さて式 (1-26) において、 $Z$  はふつうかなり大きいので第 2 項を無視し

$$\bar{h} = \frac{V}{FG}$$

$F$  : 林分形数

$G$  : 林分胸高断面積合計

とおけば

$$C_L^2 \doteq \frac{2T}{3p^2FG} (1 + \rho_{h,v} C_h C_v) \dots\dots\dots (1-27)$$

ここで

$$M_B = \frac{p^2 G}{T}$$

を代入し、平田の実用式を用いるならば

$$C_L^2 \doteq \frac{2C_B^2}{3F} (1 + \rho_{h,v} C_h C_v) \dots\dots\dots (1-28)$$

さらに経験的な数値として、 $C_h \doteq 0.5C_d$ ,  $C_v \doteq 2.5C_d$ ,  $\rho_{h,v} \doteq 0.8$  および  $F \doteq 0.5$  を採用すれば

$$C_L^2 \doteq \frac{4C_B^2}{3} (1 + C_d^2) \dots\dots\dots (1-29)$$

比較的均質な人工植栽林の場合は  $C_d^2 \ll 1$  とみなせるし、さらに母分散の理論式誘導の過程で  $\bar{h}$  の大きさをやや大きく見積つたこと、式 (1-26) の第 2 項を無視したことなどを考えれば、実用式としては

$$C_L^2 \doteq \frac{4}{3} C_B^2 \dots\dots\dots (1-30)$$

が充分役立つものと考えられる。

なお式 (1-27)~(1-30) の形から明らかなように、精度と断面積常数との関係については WZP に対して述べられていることがそのままあてはまる。すなわち  $C_L$  の大きさは断面積常数の平方根にほぼ比例する。

## § 7. 林分形状高

一致高和から直接林分材積を推定できることが既に明らかにされたので、林分形状高または林分形数は林分材積推定の因子としての意味を持たなくなった。しかし特に林分形状高を推定する必要がある場合には、既述の理論から容易にその方法が見出せる。

Point sampling の立場をとる場合はもちろんのこと、定面積プロットを想定する場合でも、単位面を林分全体としたときには林分形状高  $F\bar{h}$  は次のように表わすことができる。

$$F\bar{h} = \frac{V}{G} = \frac{M_L}{M_B} \dots\dots\dots (1-31)$$

分母分子とも標本平均を用いれば

$$F\bar{h} = \frac{\bar{L}}{\bar{B}} \dots\dots\dots (1-32)$$

となり、一致高の測定に必ず伴うカウント数  $B$  の測定値から  $F\bar{h}$  は容易に推定できる。  
式 (1-32) は、WZP におけるカウント木の平均一致高が、林分形状高にほかならぬことを意味する。

## 第2章 理論の検証

### § 1. 検証林分と検証の方法

理論の検証に用いたのは次の2林分の資料である。

第Ⅰ林分 山形大学附属演習林内42年生スギ人工植栽林

面積0.4641ha (全林分) (1960年測定)

第Ⅱ林分 京都府立大学附属大野演習林測定試験地内47年生スギ人工植栽林

面積1.0000ha (2.6haの林分のうち100m×100mを区画) (1961年測定)

第Ⅰ林分、第Ⅱ林分とも、胸高直径を2cm括約、樹高を0.5m括約で毎木測定し、かつ毎木について立木位置を測定して1/200の立木位置図を作製した。1/200図上に5cm×5cm(現地では10m×10m)の格子線を設定し、格子線の交点を測定点または標本点とした。なお格子線の網と林面との相対的な位置関係は任意に定めたものである。その結果、第Ⅰ林分では47、第Ⅱ林分では100の交点が得られた。両林分の直径階別・樹高階別本数は附表(2-1)、(2-2)の通りである。

一致高の計算値を求めるために、附表(1-1)に示した大隅の相対幹曲線のうち、最も梢殺のO-Iによつて表わされる幹形をもつ林木と、最も完満のY-IVによつて表わされる幹形をもつ林木とを別々に想定した。その結果、第Ⅰ林分、第Ⅱ林分とも、現実の胸高直径、樹高、立木位置をもち、幹形だけがO-Iで表わされる場合と、Y-IVで表わされる場合の両方が考えられることとなつた。

いわば理論の検証に用いた林分は、上述の意味で半模型林分である。

推定の対象となる林分材積は当然想定された幹形から導かれたものでなければならない。そこで想定された2種類の相対幹曲線式O-IおよびY-IVから、新たにそれぞれの理論的材積表を作製し、これらの材積表から求めた数値を林分材積の真値とした。かくして得られた半模型林分の基礎数値を総括して示せば表(2-1)の通りである。

一致高の計算値は次のようにして求めた。まず幹形について

表(2-1) 検証林分の基礎数値

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分
	全林	ha当	全林(ha当)
面積 $T(\text{m}^2)$	4,641		10,000
林木本数 $Z(\text{本})$	659	1,420	698
平均胸高直径 $\bar{d}_0(\text{cm})$	21.00		29.76
平均樹高 $\bar{h}(\text{m})$	15.06		22.02
胸高断面積合計 $G(\text{m}^2)$	24.52	52.84	52.32
材積 $V(\text{m}^3)$	O-I	188.77	406.74
	Y-IV	223.77	482.16
	材積表*	195.48	421.20
林分形数 $F$	O-I	0.511	0.475
	Y-IV	0.606	0.563
	材積表	0.529	0.463

\* 第Ⅰ林分 秋田・山形地方スギ人工林立木材積表  
第Ⅱ林分 近畿・中国・福井及び石川地方スギ立木材積表

相対幹曲線式の逆関数

$$x=g(y)$$

が成立つものとみなす。相対幹曲線式で誤差なく表わすことのできる幾何学的立体を想定しているから、この仮定をおくことは許される。次に標本点と林木との距離を図上で測定し、断面積常数 4 (すなわち  $p=50$ ) を用いるものとして、林木の胸高直径  $d_b$  と樹高  $h$  から一致高を求めた。すなわち一致高  $l$  のときの一致点の直径を  $d$  とかけば、相対幹曲線の定義から

$$f\left(\frac{l}{h}\right) = \frac{d \cdot f\left(\frac{h_b}{h}\right)}{d_b}$$

が成立つ。標本点と林木の距離を  $u$  とすれば、断面積常数 4 のときは

$$d(\text{cm}) = 4u(\text{m})$$

となるので、 $u$ ,  $d_b$ ,  $h$  から相対一致高、 $l/h$  が得られるのである。ただし計算には  $f\left(\frac{l}{h}\right)$  と  $f\left(\frac{h_b}{h}\right)$  の表を作製して使用した。 $l/h$  から  $l$  を求めることは極めて容易である。

## § 2. 林分材積の点推定——Point sampling の場合

前節の方法によつて求めた各標本点における一致高和の計算値を附表 (2-3), (2-4) に示す。林分境界による偏りに対しては、既述の理由により GROSENBAUGH の補正を施すこととした。ここでは林縁木が異質であることを考慮していない。その理由は林木のすべてに同一の幹形を想定したことにあるが、特に第Ⅱ林分では人為的に  $100\text{m} \times 100\text{m}$  の区画を行なつたので、事実上異質な林縁は存在しない。

GROSENBAUGH の補正を採用した結果、 $\pi$  観測の標本点は第Ⅰ林分で 18, 第Ⅱ林分で 32 となつた。これらの標本点では一致高和測定値を 2 倍せねばならない。この倍率を乗数  $\lambda$  で表わせば、 $\lambda=3$  の標本点は第Ⅰ林分で 2, 第Ⅱ林分で 0,  $\lambda=4$  の標本点は第Ⅰ林分で 1, 第Ⅱ林分で 4 となつた。

式 (1-4) によつて林分材積の点推定値を求めた結果は表 (2-2) の通りである。表中の  $\epsilon(\%)$  は

$$\epsilon(\%) = \frac{\text{推定値} - \text{真値}}{\text{真値}} \cdot 100$$

として求めた。また O-I と略記してあるのは、林分内のすべての林木を O-I の相対幹曲線式で表わされる樹幹でおきかえた半模型林分を意味する。Y-IV と記したのも同様の意味である。

表 (2-2) 林分材積の点推定 (GROSENBAUGH の補正法適用)  
Point sampling の場合

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-IV	O-I	Y-IV
標本点数 $n$	47		100	
平均一致高和 $\bar{L}(\text{m})$	102.48	121.29	134.85	160.00
推定林分材積 $\hat{V}(\text{m}^3)$	190.25	225.16	539.40	640.00
林分材積 (真値) $V(\text{m}^3)$	188.77	223.77	546.87	648.66
$\epsilon(\%)$	+0.78	+0.62	-1.37	-1.34

表(2-2)によれば、推定値は真値に極めて近い。このことは式(1-4)の正しさを意味するとともに GROSENBAUGH の補正法がこの場合適切であつたことを示すものと考えられる。

次に式(1-6)より直径級別材積の点推定値を求めてみる。直径級としては、ふつうに行なわれる次の分類、すなわち

小径級：24cm以下

中径級：26cm～38cm

大径級：40cm以上

を用いた。この分類によれば第Ⅰ林分では大径級を欠くので、第Ⅱ林分に対してのみ計算した。結果は表(2-3)に示した通りである。

表(2-3) 第Ⅱ林分 直径級別材積の点推定値 (GROSENBAUGHの補正法適用)  
Point sampling の場合

	O-I			Y-IV		
	～24cm	26cm～38cm	40cm～	～24cm	26cm～38cm	40cm～
平均一致高和 $\bar{L}_i$ (m)	15.82	76.94	42.09	18.80	91.32	49.88
推定材積 $\hat{V}_i$ (m <sup>3</sup> )	63.28	307.76	168.36	75.20	365.28	199.52
材積(真値) $V_i$ (m <sup>3</sup> )	60.20	318.82	167.86	71.41	378.19	199.06
$\epsilon$ (%)	+5.12	-3.47	+0.30	+5.31	-3.41	+0.23

表(2-3)に見られる通り、直径級に区分することによつて偏りの大きさは増すものと考えられる。理論的には式(1-6)が常に成立しても、現実には級を分けるのに限度があると言えよう。

### § 3. 林分材積の点推定——定面積プロットを想定する場合

定面積プロットを想定する場合には、プロットが重なり合うことを認めないから、前節で用いた標本点数とプロット数とは一致しない。

単位面  $R_{lb}$  (以下  $R_l$  と略記) の大きさは、第Ⅰ林分では最大直径40cmに対する拡大円の大きさとなる。第Ⅱ林分での最大直径は54cmであるが、これはただ1本で他はすべて50cm以下なので、取扱いに好都合なように、直径50cmに対する拡大円の大きさを  $R_l$  とし

表(2-4) 林分材積の点推定  
定面積プロットを想定する場合

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-IV	O-I	Y-IV
プロット面積 $R_l$ (m <sup>2</sup> )	314		491	
プロット総数 $N(\doteq T/R_l)$	15 ( $\doteq 14.78$ )		20 ( $\doteq 20.37$ )	
標本プロット数 $n$	7		9	
平均一致高和 $\bar{L}$ (m)	95.81	114.09	142.12	166.68
推定林分材積 $\hat{V}$ (m <sup>3</sup> )	177.86	211.80	568.48	666.72
林分材積(真値) $V$ (m <sup>3</sup> )	188.77	223.77	546.87	648.66
$\epsilon$ (%)	-5.78	-5.35	+3.95	+2.78



た。その結果、前節の標本点のうち単位プロットの測定点とみなし得るのは、第Ⅰ林分で7、第Ⅱ林分で9となつた。

式 (1-15) によつて林分材積の点推定値を求めた結果は表 (2-4) の通りである。

この場合の抽出比は何れも  $1/2$  近くになつていて必ずしも小さいとは言えないが、偏りはかなり大きい。格子線の設定が定面積プロットを想定する場合を前提としていないことにもよるが、それにしても抽出比を1にすることは不可能であり、かつ不均質誤差の存在も避けられない事実であることを考えれば、定面積プロットを想定して行なう推定法には適用の限界がありそうである。

#### § 4. 不均質誤差の分散の大きさ

まず単一樹幹の不均質誤差の分散を式 (1-18) から計算し、次いでそれらの和として一致高和の不均質誤差の分散をプロットごとに求めた。計算に用いたのは前節で抽出した16プロットである。

単位面の大きさを前節では林分ごとに一定とみなしたが、ここでは理論値計算を目的とするので、プロット内最大直径  $d_{\alpha}$  に対する拡大円の大きさとした。なお計算は、相対幹曲線式 Y-Ⅳ をもつ樹幹を想定した場合に対して行なつたものである。 $\xi$  の大きさとしては、相対幹曲線式 Y-Ⅳ に対する理論値 0.3359 を用いた。計算の結果は表 (2-5) に示した通りである。

PRODAN (1953) が、WZP における不均質誤差の標準誤差率を経験的に  $\pm 1 \sim 8\%$  としているのと対照してみると、表 (2-5) に示された標準誤差率はかなり大きい。しかし表 (2-5) の  $\sigma_{Lj}$  から

表 (2-5) 不均質誤差の分散の大きさ (相対幹曲線式 Y-Ⅳ を適用)

林分	プロット番号	最大直径階 $d_{\alpha}(\text{cm})$	プロット本数 $z_j$	プロット材積 $V_j(\text{m}^3)$	現実カウン ト数 $B_j$	現実一 高致和 $L_j(\text{m})$	期待一 致高和 $M_{Lj}(\text{m})$	不均質 誤差の 分散 $V(L_j)$	標準誤 差 $\sigma_{Lj}(\text{m})$	標準誤差率 $C_{Lj}(\%)$
第Ⅰ	9	26	33	7.235	15	130.2	136.28	667.9	25.84	18.96
	11	28	24	5.894	11	86.7	95.71	416.1	20.40	21.31
	13	30	21	5.880	5	48.8	83.18	445.8	21.11	25.38
	15	26	20	5.088	11	108.0	95.84	427.1	20.67	21.57
	28	32	27	12.250	19	209.5	152.33	879.5	29.66	19.47
	30	34	28	12.756	14	107.0	140.50	854.3	29.23	20.80
	32	36	37	13.796	14	108.4	135.53	930.9	30.51	22.51
第Ⅱ	12	50	18	25.550	10	176.0	130.13	952.1	30.86	23.71
	15	54	23	34.116	12	180.7	148.96	1297.2	36.02	24.18
	18	38	23	18.126	14	160.6	159.83	1066.8	32.66	20.43
	43	44	24	28.893	16.5	194.8	190.02	1472.8	38.38	20.20
	46	48	27	34.270	12.5	179.3	189.38	1646.5	40.58	21.43
	49	50	42	26.671	12	93.3	135.84	1217.1	34.89	25.68
	72	44	30	32.490	15	188.6	213.68	1775.0	42.13	19.72
	75	46	27	30.355	15	172.0	182.65	1674.1	40.92	22.40
	78	42	21	20.030	10	154.8	144.58	1262.0	35.52	24.57

$$M_{Lj} \pm 1.96\sigma_{Lj}$$

を求めてみると、各プロットとも  $L_j$  はこの区間に入つてはいるが、第Ⅰ林分の No.13 および No.28 の如きは、それぞれの限界値に極めて近い。それゆえ、理論値は種々の仮定のもとに導かれたものではあるが、一応適切な値であるとみなされよう。

この点についてさらに検討するため、第Ⅱ林分の No.12 のプロットを例として、プロット内における3種の林木配置から得られる統計量と理論値との比較を試みた。実験は 1/200 の図上で行ない、各林木配置について10回ずつとした。配列の仕方は次の通りである。

1. 1mm×1mmの格子線の交点に林木を任意配列。ここではこれを完全に偶然的な配列とみなす。——任意配列

2. 1cm×1cm (現地では2m×2m) の格子線の交点に林木を任意配列。——格子点 (2m×2m) 任意配列

3. 2cm×2cm (現地では4m×4m) の格子線の交点に林木を任意配列。——格子点 (4m×4m) 任意配列

なおどの配列の仕方においても、2本以上の林木が同一の点を占めないようにした。また第2および第3の配列については、格子線の網とプロット中心(測定点)との相対的な位置関係を任意に定めた。

実験結果は表(2-6)に示した通りである。表(2-6)の右端に示した検定は、3種の配列における不均質誤差の分散が、ともに理論値  $V(L)$  に等しいという仮説に対して行なつたものである。そしてこの場合の棄却域は  $\chi^2$  分布の両側にある。理論値  $V(L)$  は第1の配列を前提として導かれたものではあるが、有意水準5%で何れの場合も仮説は棄却されない。

林木配置が完全に偶然的であるという仮定は、現実の林分にとつて恐らくふさわしくない。

表(2-6) 不均質誤差分散に関する実験結果  
第Ⅱ林分 プロット No.12 各配列について10回の実験

幹形	配列の仕方	一致高和		不均質誤差の分散		標準誤差		標準誤差率		$\chi^{2*}$
		平均値	期待値	推定値	理論値	推定値	理論値	推定値	理論値	
		$\bar{L}(m)$	$M_L(m)$	$s_L^2$	$V(L)$	$s_L(m)$	$\sigma_L(m)$	$C_L(\%)$	$C_L(\%)$	
O-I	任意配列	123.48		1218.7	728.8	34.91	27.00	28.27	24.60	15.05
	格子点(2m×2m)任意配列	106.12	109.73	727.0	—	26.96	—	25.41	—	8.98
	格子点(4m×4m)任意配列	117.07		804.6	—	28.37	—	24.23	—	9.94
Y-IV	任意配列	141.32		1474.1	952.1	38.39	30.86	27.17	23.71	13.93
	格子点(2m×2m)任意配列	123.94	130.13	922.7	—	30.38	—	24.51	—	8.72
	格子点(4m×4m)任意配列	136.93		1126.4	—	33.56	—	24.51	—	10.65

\*  $d.f. = 9$      $\chi^2_{.975} = 2.70$      $\chi^2_{.025} = 19.02$

いであろう。むしろ人工植栽林では、表 (2-6) の第 2 の配列に近いものが想定される。しかしながら、表 (2-5) および表 (2-6) の結果からみれば、理論値は種々の仮定のもとに導かれたものであるにもかかわらず、実用上満足すべき数値であると判断できる。それに伴ない、 $\xi=1/3$  として導かれた式 (1-23) も、近似式として有効なものと判断できるのである。

### § 5. 林分材積の区間推定——定面積プロットを想定する場合

定面積プロットを想定する場合には、標本抽出誤差部分と不均質誤差部分をともに考慮に入れなければならない。単位面を林分内最大直径の拡大円の大きさ  $R_L$  としたときの、林分材積の区間推定について考えてみよう。はじめに次のように記号を整理しておく。

$T$ : 林分面積

$N=T/R_L$ : プロット総数 (母集団の大きさ)

$n$ : 標本の大きさ

$L_j$ : 第  $j$  プロットにおける現実一致高和

$\bar{L}=\sum L_j/n$ : 現実一致高和の標本平均

$\sigma_L^2$ : 現実一致高和の母分散

$s_L^2$ :  $\sigma_L^2$  の標本推定値

$V(L_j)$ : 第  $j$  プロットにおける不均質誤差の分散

$M_L$ : 期待一致高和の母平均

$\delta_j$ :  $M_L$  を基準にとつたときの  $L_j$  の誤差

$V(\delta_j)$ :  $\delta_j$  の誤差分散

WZP に対して大隅 (1961b) が述べている方法を一致高和に対してそのまま適用すれば、 $V(\delta_j)$  について次式が成立する。

$$V(\delta_j)=\sigma_L^2+\frac{1}{N^2}\sum V(L_j)$$

したがって、大きさ  $n$  の標本の、平均値の誤差分散  $V(\delta)$  は

$$V(\delta)=\frac{1}{n}\sigma_L^2+\frac{1}{N^2}\sum V(L_j)$$

ここで  $\sigma_L^2$  の推定値として

$$s_L^2=\frac{1}{n-1}\sum (L_j-\bar{L})^2$$

を用い

$$\frac{1}{N^2}\sum V(L_j)=\frac{\sigma_L^2}{N} \quad \text{ただし} \quad \sigma_L^2=\frac{\sum V(L_j)}{N}$$

とにおいて有限補正を施せば、 $V(\delta)$  の推定値  $s_{\delta}^2$  は

$$s_{\delta}^2=\frac{T-nR_L}{T}\cdot\frac{1}{n}s_L^2+\frac{\sigma_L^2}{N}\cdots\cdots(2-1)$$

$\sigma_L^2$  の大きさを現実には経験による以外にない。ただし本節の推定には表 (2-5) の数値を用いることにする。すなわち、第Ⅰ林分については  $\sigma_L^2 \doteq (25)^2$ 、第Ⅱ林分については  $\sigma_L^2 \doteq (35)^2$  とみておく。式 (2-1) によつて林分材積の区間推定を行つた結果は表 (2-7) の通りである。なお抽出プロットは表 (2-4) のプロットと同じである。

表 (2-7) から、それぞれその真値が95%信頼区間の中に入っていることがわかる。ただ信

表 (2-7) 林分材積の区間推定  
定面積プロットを想定する場合

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-Ⅳ	O-I	Y-Ⅳ
標本抽出誤差分散の推定値 $s_L^2$	1564.0	2415.8	605.9	913.1
不均質誤差分散 $\sigma_L^2$	(25) <sup>2</sup>		(35) <sup>2</sup>	
平均値誤差分散の推定値 $s_0^2$	159.28	223.35	98.82	117.87
95%信頼下限 (m <sup>3</sup> )	130.75	156.03	489.48	580.40
95%信頼上限 (m <sup>3</sup> )	224.97	267.57	647.48	753.04
誤差率 $e$ (%)	26.49	26.33	13.90	12.95

頼区間はかなり広い。これは小面積林分でプロットが少いことにもよるが、他の大きな理由は不均質誤差の大きさにある。不均質誤差の大きさは母集団が大きくなるにつれて減少するが、決して0にはならず、また一方、全プロットを抽出し得たとしても必ず残るものである。さらに困難な問題は不均質誤差の大きさの見積りの方法である。資料として充分ではないが、表 (2-5)、(2-6) の数値は、不均質誤差の大きさを見積るのに多少は参考になるであろう。

#### § 6. 林分材積の区間推定——Point sampling の場合

Point sampling の立場をとるときは、一致高和の分散は標本抽出誤差とみなされる。かつ母集団の大きさは無限であるから、有限補正を要することなく既知の公式

$$\frac{T}{p^2}(\bar{L} - ts\bar{L}) \leq V \leq \frac{T}{p^2}(\bar{L} + ts\bar{L}) \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

から林分材積の区間推定値が得られる。式 (2-2) によつて求めた林分材積の区間推定値を示せば表 (2-8) の通りである。

表 (2-8) 林分材積の区間推定  
Point sampling の場合

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-Ⅳ	O-I	Y-Ⅳ
標本抽出誤差分散の推定値 $s_L^2$	1643.4	2161.8	1333.8	1857.0
95%信頼下限 (m <sup>3</sup> )	168.18	199.84	510.37	605.75
95%信頼上限 (m <sup>3</sup> )	212.32	250.48	568.43	674.25
誤差率 $e$ (%)	11.60	11.25	5.38	5.35

表 (2-8) によれば、それぞれの真値は何れも95%信頼区間の中に入っている。

Point sampling の立場をとるときは、定面積プロットを想定する場合の不均質誤差の分散と異なり、誤差分散を標本から推定することが可能である。しかし標本調査の実施に当つては、あらかじめ変動係数を推定しておくことが要求される。したがつて次に変動係数を推定する近似式 (1-30) の検討を試みよう。予備調査によつて  $C_B^2$  の概数をおさえることは容易である。ここでは一致高和標本で得られたカウント数  $B$  から  $C_B$  を計算し、そ

の数値から  $C_L^2$  を求めた。なお  $B$  の測定値は附表 (2-3), (2-4) に示した通りである。計算の結果を表 (2-9) に示した。

表 (2-9) によれば、式 (1-30) が多くの仮定のもとにかなり大胆な近似式として導かれたにもかかわらず、実用的には充分役立ちそうに思われる。このことは、定面積プロットを想定する場合にくらべて標本調査の設計を容易にするであろう。

表 (2-9) 近似式による一致高和変動係数の推定

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-IV	O-I	Y-IV
カウント数変動係数の標本推定値 $C_B(\%)$	33.09		26.66	
一致高和 変動係数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{近似式} \\ C_L^2 \left( \doteq \frac{4}{3} C_B^2 \right) \\ C_L(\%) \end{array} \right.$	1,460		948	
	38.21		30.79	
	39.56	38.34	27.08	26.93
標本推定値 $C_L(\%)$				

なおここで式 (1-32) によつて林分形状高  $F\bar{h}$  の推定値を求めれば、表 (2-10) の結果が得られる。

表 (2-10) 一致高和による林分形状高の推定

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-IV	O-I	Y-IV
推定林分形状高 $F\bar{h} (\bar{L} / \bar{B})(m)$	7.585	8.978	10.511	12.471
林分形状高 (真値) $F\bar{h} (m)$	7.696	9.126	10.460	12.397

既述の如く、林分材積推定のためには林分形状高推定の必要はないが、表 (2-10) によれば極めて真値に近い値の得られたことがわかる。このことはまた一致高和による林分材積推定理論の正しさを裏付けるものと言えよう。

### 第3章 応用上の配慮

#### § 1. Spiegel-Relaskop による一致高の測定

Spiegel-Relaskop を用いて一致高を測定する場合、一致点が直接見出せるなら一致高を求めることは容易である。ただしその構造上、仰角  $70^\circ$  をこえる位置に一致点があるときは直接測定できない。このときは、観測点の位置を変えることによつて直接あるいは間接に一致高を求め得る。

今後はすべて断面積常数 4 を用いるものとして検討をすすめる。断面積常数 1 および 2 にくらべて精度の点で劣るが、功程の面から考えると格段にすぐれているからである。

いま観測者との距離  $u$  の  $q$  倍の距離の位置に観測点を移す場合を考えてみよう。断面積常数 4 のスリットの  $1/q$  の巾をもつスリットで一致点を見出せれば、それが求める一致点

である。その際一致点が見出せなければ、一致高の間接推定が必要となる。

距離の倍率  $q$  を適当に定めれば、移された観測点で、断面積常数 4 の一致点は必ず見出せる。このときの一一致高を  $l_q$ 、一致点の直径を  $d_q$  とし、幹曲線を一般に

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = F(h-l)$$

と表わせば、 $d_q$  と真の一一致点直径  $d$  との比は

$$\frac{d_q}{d} = q$$

となるから

$$q = \left\{ \frac{F(h-l_q)}{F(h-l)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

間接推定の必要なのは、根張りの影響の全くない梢端近くの部分についてであるから、幹曲線式としては KUNZE 式で充分であろう。すると

$$q = \left\{ \frac{h-l_q}{h-l} \right\}^{\frac{r}{2}}$$

したがって

$$l = h - \frac{h-l_q}{q^{\frac{2}{r}}} \dots\dots\dots (3-1)$$

Spiegel-Relaskop における樹高目盛のうち、水平距離  $u'$ (m) に対応する目盛を用い、その目盛で読取れるみかけの樹高と一致高をそれぞれ  $h'$ 、 $l_q'$  とすれば

$$l = \frac{u}{u'} \left\{ h' - \frac{qu(h'-l_q')}{q^{\frac{r}{2}}} \right\} \dots\dots\dots (3-2)$$

形状指数  $r$  の大きさを検討するための基準の幹形として、大隅の相対幹曲線式10種のうち、最も梢殺の O-I と、最も完満の Y-IV をとりあげてみる。  $r$  の大きさを定めるには、距離  $qu$  における一致点以上の相対材積が、KUNZE 式でも大隅式でも等しくなるようにすればよいと考える。ここに相対材積というのは、相対幹曲線を  $x$  軸のまわりに回転させた回転体の体積である。さて上の条件を満足させるには、 $x=1-l/h$ 、 $x_q=1-l_q/h$ 、相対幹曲線式を  $y=h(x)$  として

$$\int_0^{x_q} \{h(x)\}^2 dx = \frac{\{h(x_q)\}^2}{x_q^r} \int_0^{x_q} x^r dx$$

が成立すればよく、したがって

$$r = \frac{\{h(x_q)\}^2 x_q}{\int_0^{x_q} \{h(x)\}^2 dx} - 1 \dots\dots\dots (3-3)$$

より  $r$  が求められる。得られた  $r$  の値を表(3-1)に示した。

表(3-1)によれば、 $r$  のおよその値として1.5をとればよさそうである。 $r=1.5$  における式(3-2)は

表(3-1) 大隅式の2種類の幹形と一致点以上の相対材積を等しくする KUNZE 式の形状指数

$x_q(=1-l_q/h)$	相対幹曲線式	
	O-I	Y-IV
0.1	1.84	1.73
0.2	1.67	1.55
0.3	1.53	1.35
0.4	1.47	1.20
0.5	1.41	1.06

$$l = \frac{u}{u'} \left\{ h' - \frac{qu(h' - l_q')}{q^{\frac{4}{3}}} \right\} \dots\dots\dots (3-4)$$

となる。測定の際にはあらかじめ  $q^{\frac{4}{3}}$  の表を作っておくと便利である。

実用上必要と思われる範囲で、2種類の幹形に対して式(3-4)から推定される一致高の偏りの、真の一致高に対する百分率を求めれば、表(3-2)の通りである。表の空欄は、現実に必要でないと思われる  $x$  と  $q$  の組合せである。

表(3-2) 一致高の間接推定値の、真の一致高に対する偏りの大きさ(%)

相對幹 曲線式	$x$ ( $=1-l/h$ )	$q$						
		1.5	2	3	4	5	6	7
O-I	0.05				1.4	1.4	1.3	1.2
	0.10		1.2	1.3	0.8			
	0.15	0.8	0.8					
	0.20	0.4	-0.6					
	0.25	-0.5						
	0.30	-2.1						
Y-IV	0.05				0.8	0.2	1.3	
	0.10		0.3	-3.0				
	0.15	-0.4	-3.6					
	0.20	-3.3						
	0.25	-11.2						

相対幹曲線として2例をとりあげたにすぎないが、表(3-2)によれば、式(3-4)を用いる一致高の間接推定は実用上かなり有効であると言えよう。なお距離  $qu$  における一致点の位置があまりに低くなりすぎるようであれば、断面積常数4のスリットより狭いスリットを用いて推定することが可能である。その場合はただ  $q$  の値を変えればよい。

大隅(1963)が、最近 BITTERLICH の公表した Spiegel-Relaskop の新目盛を紹介しているが、この新目盛を用いる一致高和測定の方法は今後検討される必要があろう。

## § 2. 二重抽出の応用

標本調査実施の際に、 $B$  と  $L$  について二重抽出を適用すれば、精度と工期の両面からみて有効であろう。 $L$  の測定には必ず  $B$  の測定が伴なうし、また  $B$  のみの測定は極めて容易である。ここでは Point sampling の立場をとるときに二重抽出の応用について述べる。

推定の方法としては比推定でも回帰推定でもよいが、ここでは特に林分形状高を考える必要はないから、精度のよい回帰推定の方をとりあげよう。まず次のように記号を定める。

$m$  : 大標本の大きさ

$n$  : 小標本の大きさ

$\bar{B}_m$  : 大標本における  $B$  の平均値

$\bar{B}$  : 小標本における  $B$  の平均値

$\sigma_L^2$  : 一致高和の母分散

$\rho_{B,L}$  :  $B$  と  $L$  の相関係数

$\hat{L}$  : 一致高和の母平均  $M_L$  の推定値



$V(\hat{L}) : \hat{L}$ の分散

$V(\hat{L})$ の大きさは、既知の公式より近似的に

$$V(\hat{L}) \doteq \sigma_L^2(1 - \rho^2_{B,L}) \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(\bar{B}_m - \bar{B})^2}{\sum_{j=1}^n (B_j - \bar{B})^2} \right\} + \frac{\rho^2_{B,L} \sigma_L^2}{m} \dots\dots\dots (3-5)$$

となり、 $\hat{L}$ は小標本における $L$ の $B$ に対する線型回帰から求められる。

第2章で検証林分として用いた第Ⅰ林分と第Ⅱ林分に二重抽出を適用してみた。既設の格子線の丁度中間を通る格子線を設定し、全体としては1/200図上で2.5cm×2.5cmの格子線の網の交点を大標本とした。大標本における $B$ はすべて図上で求め、GROSENBAUGHの補正法を適用した。二重抽出適用の結果は表(3-3)の通りである。

表(3-3) 二重抽出の適用による林分材積の推定  
Point sampling の場合

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-Ⅳ	O-I	Y-Ⅳ
大標本の大きさ $m$	188		400	
小標本の大きさ $n$	47		100	
$B$ と $L$ の標本相関係数 $r_{B,L}$	0.8243	0.8349	0.8272	0.8353
$M_L$ の推定値 $\hat{L}$ (m)	100.24	118.69	136.61	162.10
$\hat{L}$ の分散 $V(\hat{L})$	17.159	21.963	6.492	8.853
推定林分材積 $\hat{V}$ (m <sup>3</sup> )	186.09	220.34	546.44	648.40
95%信頼下限 (m <sup>3</sup> )	170.60	202.83	526.20	624.76
95%信頼上限 (m <sup>3</sup> )	201.57	237.84	566.68	672.04
誤差率 $e$ (%)	8.32	7.95	3.70	3.65

表(3-3)によれば、林分材積の真値は何れも95%信頼区間内に入っている。

もし林分面積があまり小さくなく、毎木調査が実施できるときは、 $B$ の母平均 $M_B$ を求め、それから $\hat{L}$ が得られる。そのとき $V(\hat{L})$ の推定式は、既知の公式より近似的に

$$V(\hat{L}) \doteq \sigma_L^2(1 - \rho^2_{B,L}) \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(M_B - \bar{B})^2}{\sum_{j=1}^n (B_j - \bar{B})^2} \right\} \dots\dots\dots (3-6)$$

検証林分に対する適用結果を示せば表(3-4)の通りである。

表(3-4) 毎木調査と回帰推定の組合せによる林分材積の推定  
Point sampling の場合

	第Ⅰ林分		第Ⅱ林分	
	O-I	Y-Ⅳ	O-I	Y-Ⅳ
$M_L$ の推定値 $\hat{L}$ (m)	100.24	118.69	137.06	162.63
$\hat{L}$ の分散 $V(\hat{L})$	11.219	13.947	4.211	5.614
推定林分材積 $\hat{V}$ (m <sup>3</sup> )	186.09	220.34	548.24	650.52
95%信頼下限 (m <sup>3</sup> )	173.58	206.38	531.88	631.64
95%信頼上限 (m <sup>3</sup> )	198.60	234.30	564.60	669.40
誤差率 $e$ (%)	6.72	6.34	2.98	2.90

表 (3-4) によれば、当然のことながら表 (3-3) にくらべて誤差率の減少が見られる、また林分材積の真値はいずれも95%信頼区間内に入っている。

### § 3. 二重抽出による標本調査の設計

式 (3-5) において

$$\bar{B}_m - \bar{B} \doteq 0$$

とみなせば

$$V(\hat{L}) \doteq \sigma_L^2 (1 - \rho_{B,L}^2) \frac{1}{n} + \frac{\rho_{B,L}^2 \sigma_L^2}{m}$$

ここで

$$m = \eta n \quad \eta : \text{正の整数}$$

とおけば

$$V(\hat{L}) \doteq \frac{\sigma_L^2}{n} \left\{ (1 - \rho_{B,L}^2) + \frac{\rho_{B,L}^2}{\eta} \right\}$$

いま目標精度を  $\alpha(\%)$ ,  $L$  の変動係数を  $C_L(\%)$  とすれば

$$n \geq \frac{l^2 C_L^2}{\alpha^2} \left\{ (1 - \rho_{B,L}^2) + \frac{\rho_{B,L}^2}{\eta} \right\} \dots\dots\dots (3-7)$$

式中の  $\eta$  の大きさについて検討してみる。標本点設定のための測定をも含めて、一致高和  $L$  の測定のために1標本点当り必要な費用が、 $B$  のみの測定に要する費用の  $\nu$  倍であるとすれば、総費用に比例する量  $\kappa$  は

$$\kappa = \nu n + (m - n) = n(\nu + \eta - 1) \dots\dots\dots (3-8)$$

ここで

$$\frac{l^2 C_L^2}{\alpha^2} = k$$

とおいて式 (3-7) を式 (3-8) に代入すれば

$$\kappa \geq k \left\{ (\nu + \eta - 1) \left( 1 - \rho_{B,L}^2 + \frac{\rho_{B,L}^2}{\eta} \right) \right\}$$

この [ ] 内は

$$\eta = \left\{ \frac{\rho_{B,L}^2 (\nu - 1)}{1 - \rho_{B,L}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3-9)$$

のとき最小となり、したがって費用も最小となる。

式中の  $\rho_{B,L}$ ,  $\nu$  の大きさについてはなお検討を要する。

毎木調査と回帰推定を組合せる場合には、やはり

$$M_B - \bar{B} \doteq 0$$

とみて

$$n \geq \frac{l^2 C_L^2}{\alpha^2} (1 - \rho_{B,L}^2) \dots\dots\dots (3-10)$$

から  $n$  が定められる。

### § 4. 定面積プロットを想定する場合の標本調査の設計

大隅 (1961) が WZP に対して明らかにした理論が、一致高和による林分材積推定の場合にも適用できる。すなわち

$C_s$  : 抽出誤差の標準誤差率 (%)

$C_I$ : 不均質誤差の標準誤差率 (%)

と表わせば

$$n \geq \frac{4NC_s}{N\alpha^2 + 4(C_s^2 - C_I^2)} \dots\dots\dots (3-11)$$

式 (3-11) から明らかなように,  $C_I$  の大きさは  $n$  の決定に大きな意味をもつ. 不均質誤差の存在のために, 場合によつては目標精度に達し得ないこともあり得る. いま仮に全プロットを抽出し得たとしても, そのときの誤差率  $e(\%)$  は式 (2-1) より

$$e = \frac{2C_I}{\sqrt{N}}$$

となつて, これより小さくはなり得ない. したがつてプロット総数  $N$  の小さい場合, すなわち一般に小面積林分においては, 不均質誤差がよほど小さくない限り高精度の測定結果は期待できないようである. なお想定されるプロットの形状が円形であるため, 全プロットを抽出することは不可能であつて, 抽出誤差もまた必ず残るのである. 結局定面積プロットを想定する立場には, 適用の限界があるものと言えよう.

### § 5. 適 用 例

一致高和による林分材積推定法を, Point sampling の立場から適用した例を示す.

#### (1) 京都市 醍醐寺有林内ヒノキ人工植栽林分 (1961年測定, 28林班 3 小班内)

(樹種・直径階別本数分布) 附表 (3-1)

(林令) 約40年

(測定方法)

1. 直径は毎木, 樹高は樹高曲線により, 材積表を用いて林分材積を推定, これを真値とみなした. 林分の概況は表 (3-5) の通り.

2. 一致高和標本は系統的抽出. Spiegel-Relaskop を使用, 断面積常数 4. 毎木調査と回帰推定の組合せを適用.

表 (3-5) 適用林分の概況 (醍醐寺有林)  
面積 0.6627ha

	ヒ ノ キ		全 林 木	
	全林	ha当	全林	ha当
林木本数 (本)	838	1,265	1,021	1,541
胸高断面積合計 (m <sup>2</sup> )	16.88	25.48	23.27	35.11
林分材積 (材積表) (m <sup>3</sup> )	123.62	186.54	167.32	252.48

(標本点数の決定)

$C_B(\%) \doteq 25$  とみなして, 式 (1-30) より

$$C_L^2 \doteq \frac{4}{3} C_B^2 = 833$$

$(1 - \rho^2_{B,L}) \doteq 0.3$ ,  $t \doteq 2$ ,  $\alpha(\%) = 10$  とし式 (3-10) より

$$n \geq \frac{(4)(833)}{100} \cdot (0.3) \doteq 10.00$$

よつて  $n=11$  と定めた.

(測定結果) 附表 (3-2)

(一致高和による林分材積の推定) 表 (3-6)

真値は何れも95%信頼区間内に入っているが、誤差率は大きく、目標精度に達していない。測定結果からその原因を検討すると、ヒノキ以外の樹種によって林相が均斉でなくなっていたことによるものである。このような場合には、林分を層化することも必要となるであろう。

表 (3-6) 毎木調査と回帰推定の組合せによる林分材積の推定 (醍醐寺有林)

	ヒノキ	全林木
推定林分材積 $\hat{V}(\text{m}^3)$	120.50	160.33
95%信頼下限 ( $\text{m}^3$ )	101.26	134.84
95%信頼上限 ( $\text{m}^3$ )	139.74	185.82
誤差率 $e(\%)$	15.96	15.90

(2) 秋田営林局 男鹿山国有林内スギ人工植栽林分 (1962年測定, 116林班ほ小班)

(面積) 3.76ha

(林令) 38年

(測定方法)

1. Plot sampling——一致高和測定のために選ばれた標本点を中心として、面積100 $\text{m}^2$ の円形プロットを測竿により設定。プロット内林木の毎木直径測定、樹高曲線により材積表からプロット材積を推定。

2. 一致高和による林分材積推定 (Point sampling)——標本点は系統的抽出。Spiegel-Relaskop を使用、断面積常数 4. 二重抽出を適用。

(標本点数の決定)

式 (3-9) における  $\nu$  の値を仮に10とみなし、 $\rho_{B-L} \div 0.8$ として

$$\eta = \left\{ \frac{(0.8)^2(10-1)}{1-(0.8)^2} \right\} = 4$$

林相はかなり均斉であると思われるので  $C_h(\%) \div 20$ とみなし、 $t \div 2$ ,  $\alpha(\%) = 10$ として、式 (1-30), 式 (3-7) より

$$n \geq \frac{(4)(533)}{100} \left\{ 0.36 + \frac{0.64}{4} \right\} = 11.09$$

これより幾分大きくみて  $n=13$ ,  $m=\eta n=52$ と定めた。

(測定結果) 附表 (3-3)

(林分材積の推定) 表 (3-7)

表 (3-7) によれば、双方の95%信頼区間は重なっており、また目標精度にも達している。ただし両者の誤差率から優劣を比較することはできない。すなわち、樹高曲線の誤差、材積表の誤差、一致高和の測定誤差、プロット面積等についての検討とともに、功程面からの検討がな

表 (3-7) Plot sampling と Point sampling (一致高和測定, 二重抽出) のおのおのによる林分材積の推定 (男鹿山国有林)

	Plot sampling	Point sampling
推定林分材積 $\hat{V}(\text{m}^3)$	1118.4	1192.9
95%信頼下限 ( $\text{m}^3$ )	1039.9	1088.9
95%信頼上限 ( $\text{m}^3$ )	1196.9	1296.8
誤差率 $e(\%)$	7.02	8.72

お必要である。

なおここでは二重抽出の応用という観点から標本調査の設計を行なつたが、標本抽出の方法ならびに推定の方法としては、より適切なものが見出されるかも知れない。一層の検討を要する問題である。

## 結

## 論

WZP を拡張して、定角測定で一貫した林分材積推定法を確立しようとする本研究の目的は、実施面からみてなお検討すべき点を残してはいるが、理論的には充分達成されたものと考えられる。すなわち、一致高和の標本平均から推定される林分材積は、半模型的な検証林分に対する数値が示すように、まさしく不偏推定値であるとみなされる。

一致高和による林分材積推定の理論は、点の上に立つ一致高の和の集合としての無限母集団を想定する Point sampling の立場をとつても、定面積プロット内の材積の和の集合としての有限母集団を想定する立場をとつても、ともに成立する。ただし誤差の評価は立場によつて異なり、前者においては抽出誤差のみが、後者においては抽出誤差のほか不均質誤差が対象とされる。

林木の完全に偶然的な配置を前提とする限り、Point sampling における抽出誤差の大きさ、ならびに定面積プロットを想定する場合の不均質誤差の大きさを、理論的に導くことができる。ただし現実林分におけるこれらの誤差の真の大きさは、現実の林木配置と幹形によつて異なる。抽出誤差については標本から不偏推定値が得られるが、不均質誤差については概数を知り得るのみである。理論式は概数を知るのに役立つ。なお Point sampling の立場をとるときは、林分境界による推定値の偏りを考慮しなければならない。偏りの補正法としては GROSENBAUGH の方法が適切と思われる。

一致高和による林分材積推定法は、林分材積の不偏推定値を求めたいという当面の目的に対してはもちろんのこと、林分材積式の推定や林分材積表の作製という目的に対しても、充分有効でかつ実施の容易な方法と考えられる。すなわち、WZP におけるカウント数に対する一致高和の回帰方程式は、一種の林分材積式と考えることができる。そして林木を伐採することなく推定が行なわれるという点に、林分材積式推定に应用する場合の本法の価値が見出されるのである。

したがつて、一致高測定の功程と精度の検討、測定の簡易化、標本調査法の検討等、実施面からみた研究課題は極めて重要である。これらを包括した本法に関する研究の完成によつて測樹学の分野に新しい一時期が画されるであらうと信ずる。

## 要

## 約

1. 本研究は BITTERLICH の Winkelzählprobe (WZP) を 3 次元空間に拡張し、定角測定で一貫した林分材積推定法を確立することを目的として行なわれたものである。
2. WZP の解釈には、(1) Point sampling の立場 (2) 定面積プロットを想定する立場の 2 つがある。したがつて本研究もこれら 2 つの立場からそれぞれすすめることとした。
3. 梢端から根元に至るすべての位置の直径が、現実樹幹の直径の  $k$  倍となつている“拡大樹幹”を想定した。拡大樹幹の底面内に含まれる点に立てた垂線のうち、拡大樹幹内に

含まれる部分の長さは、BITTERLICH のいう“一致高”である。林面上の1点に立つ一致高の和を“一致高和”と名付ける。

4. 一致高和の標本平均から、次の林分材積推定式が導かれる。

$$\hat{V} = \frac{T\bar{L}}{\bar{p}^2}$$

$\hat{V}$  : 林分材積の不偏推定値

$T$  : 林分面積

$\bar{L}$  : 一致高和の標本平均

この林分材積推定式は、Point sampling の立場から、定面積プロットを想定する立場からともに成立つ。

5. ただし Point sampling の立場をとるときは、林分境界による偏りの補正が必要である。補正法としては GROSENBAUGH の方法が適切と思われる。

6. 定面積プロットを想定する立場をとるとき、プロット内林木の完全な偶然的配置を仮定すると、“一致高和の不均質誤差”の近似式が導かれる。

$$V(L_j) \doteq \frac{2}{3} M_{Lj} \bar{h}_j (1 + \rho_{hj, vj} C_{hj} C_{vj}) - \frac{M_{Lj}^2}{z_j} (1 + C_{vj}^2)$$

$V(L_j)$  : 不均質誤差の母分散 (第  $j$  プロットにおける値, 以下すべて同じ)

$M_{Lj}$  : 一致高和の期待値

$\bar{h}_j$  : 平均樹高

$z_j$  : 林木本数

$\rho_{hj, vj}$  : 樹高( $h$ )と材積( $v$ )との相関係数

$C_{hj}$  :  $h$  の変動係数

$C_{vj}$  :  $v$  の変動係数

7. 単位面の大きさを林分面積  $T$  とし、林分内での林木の完全な偶然的配置を仮定すると、全林を対象とした不均質誤差の近似式、すなわち上式の添字  $j$  をすべて省いた式が導かれる。そのとき  $V(L)$  は Point sampling の立場における抽出誤差の母分散でもある。

8. Point sampling の立場をとるときは、抽出誤差分散の式から一致高和の変動係数の近似式が導かれる。

$$C_L^2 \doteq \frac{4}{3} C_B^2$$

$C_L$  : 一致高和の変動係数

$C_B$  : WZP におけるカウント数( $B$ )の変動係数

9. 林分形状高の推定値は次式から得られる。

$$F\bar{h} = \frac{\bar{L}}{\bar{B}}$$

$\bar{B}$  : WZP におけるカウント数( $B$ )の標本平均

$F\bar{h}$  : 林分形状高 ( $F$  : 林分形数)

10. 胸高に達しない一致高を無視した場合にも、上掲の式はすべて近似的に成立する。

11. 現実の胸高直径、樹高、立木位置をもち、幹形のみ特定の幹曲線式と完全に一致させた半模型林分を用いて、一致高和による林分材積推定理論を検証した。その結果、林分材積

推定式の正しさが明らかにされ、他の近似式が実用的に有効であることもまた認められた。12. 一致高和による林分材積推定理論の応用の可能性を明らかにしておくため、2, 3の問題点を検討してみた。

(1) Spiegel-Relaskop を用いて、かなり正確に一致高を測定することができる。

(2) WZP におけるカウント数と、一致高和との二重抽出を行なつて回帰推定を適用するか、毎木調査と回帰推定を組合せることによって、推定の精度を上げることができる。

(3) 不均質誤差の存在のために、定面積プロットを想定する立場からの推定理論には適用の限界が存在する。

13. Point sampling の立場からの推定理論を、2 林分に対して現地で適用した結果、おおむね満足すべき数値が得られた。

### 参 考 文 献

- 芳賀敏郎, 前沢完次郎 (1959) : Bias due to edge effect in using BITTERLICH method. Forest Science, 5(4).
- 平田種男 (1955) : BITTERLICH 法による樹高の推定. 日林誌, 37(11).
- 平田種男 (1958a) : BITTERLICH の林分区分求積——B-H-Messung. 日林誌, 40(1).
- 平田種男 (1958b) : STRAND の可変矩形プロット法. 日林誌, 40(4).
- 平田種男 (1958c) : 楕円柱体積から材積へ——コノメーターの応用. 日林誌, 40(11).
- 平田種男 (1958d) : 可変プロット法の精度. 東大演報, 54.
- 平田種男 (1962) : 定角測定法の研究. 東大演報, 56
- 甲斐原一朗 (1957) : 樹高測定法. タイカン社.
- 木梨謙吉 (1952) : 新しい林分材積測定法. 林業経済, 5(5),
- 北村昌美 (1961) : 林分境界による BITTERLICH 法の偏りの補正について. 第71回日林講.
- 北村昌美 (1962) : 一致高和による林分材積の推定について. 第73回日林講.
- 前沢完次郎 (1957) : BITTERLICH 法における林縁の問題とその実験例. 演習林, 12.
- 増山元三郎 (1953) : A rapid method of estimating basal area in timber survey—an application of integral geometry to areal sampling. Sankhyā, 12
- 増山元三郎 (1956) : 幾何学的調査法の話. オペレーションズ・リサーチ, 1.
- 大隅真一 (1958) : 立木材積測定に関する一考察. 西京大学農学部演習林集報, 2.
- 大隅真一 (1959) : 幹形に関する研究(1)相対幹形について. 日林誌, 41(12).
- 大隅真一 (1960a) : 形状高の測定とその林分材積推定への応用について. 京都府立大学演習林集報, 4.
- 大隅真一 (1960b) : Winkelzählprobe についての考察. 日林誌, 42(6).
- 大隅真一 (1961a) : Winkelzählprobe の確率論的解釈と不均質誤差について. 日林誌, 43(4).
- 大隅真一 (1961b) : Bitterlich 法による林分材積の推定に関する研究.
- 大隅真一 (1963) : シュビーゲルレラスコープの新しい尺度目盛. 日林誌, 45(2).
- 大友栄松 (1960) : ビツテルリツヒ法について(1). 林試研報, 122.
- 高田和彦 (1962) : 定角測定法による材積推定の研究. 新潟大学演報, 1.
- 吉田正男 (1930) : 測樹学要論.
- AFANASIEV, M. (1958) : Some results of the use of the BITTERLICH method of cruising in an evenaged stand of longleaf pine. Jour. Forestry, 56.
- BITTERLICH, W. (1947) : Die Winkelzählmessung. Allg. Forst-u. Holzwirtschaft. Ztg, 58(11/12).
- BITTERLICH, W. (1948) : Die Winkelzählprobe. Allg. Forst-u. Holzwirtschaft. Ztg, 59(1/2).

- BITTERLICH, W. (1955) : Die Weiterentwicklung der optischen Zählmessung in der Bestandesaufnahme. Allg. Forstztg, 66(15/16).
- BITTERLICH, W. (1956) : Fortschritte der Relaskopmessung. Holz-Kurier, 11(1).
- GROSENBAUGH, L. R. (1952) : Plotless timber estimates—new, fast, easy. Jour. Forestry, 50.
- GROSENBAUGH, L. R. (1955) : Comments on "Results of an investigation of the variable plot method of cruising." Jour. Forestry, 53.
- HUSCH, B. (1955) : Results of an investigation of the variable plot method of cruising. Jour. Forestry, 53.
- HUSCH, B. (1956) : Comments of the variable plot method of cruising. Jour. Forestry, 54.
- PRODAN, M. (1953) : Genauigkeit der Winkelzählprobe nach BITTERLICH. Allg. Forstztg, 64(7/8).

### Summary

The purpose of this investigation is to establish a new method which is consistent with angle count sampling for the estimation of stand volume.

There are two viewpoints in the explanation of the horizontal angle count sampling (WZP). These are:

- (1) the viewpoint of point sampling
- (2) the viewpoint of plot sampling.

Accordingly this investigation is based upon both.

1. Let us suppose the imaginary stem whose diameters at every height are  $p$  times larger than the original ones. Let us call it "enlarged stem".

2. Next, let us consider a vertical line standing at one point selected at random in the base of the enlarged stem. Then a part of the line is contained in the enlarged stem. The length of this part is nothing but the BITTERLICH's *Deckpunkthöhe*.

3. When a sample point is selected at random in the stand area  $T$ , some *Deckpunkthöhen* stand together at this point, because various enlarged stems usually overlap one another. Let the sum of *Deckpunkthöhen* be  $L$ .

The estimate of stand volume  $V$ ,  $\hat{V}$ , is given as follows:

$$\hat{V} = \frac{T\bar{L}}{p^2}$$

where  $\bar{L}$  is the sample mean of  $L$ .

If we take  $T=10,000\text{m}^2$ ,

$$K = \frac{T}{p^2} = \frac{10,000}{p^2}$$

is the well-known basal area factor, and therefore

$$\hat{V}/\text{ha} = K\bar{L}.$$

4. If a part of the base of the enlarged stem extends outside of  $T$ ,  $\hat{V}$  would have a bias. In such a case it would be necessary to consider an extended area  $T'$  which contained all bases of the enlarged stems. However, it seems that the GROSENBAUGH's correction for the horizontal angle count sampling is appropriate to eliminate this bias for practical purposes. When the correction is applied,  $\hat{V}$  becomes the unbiased estimate approximately.



5. On the other hand, when we assume that the stand surface is covered with circular plots having  $p$  times diameter of the largest diameter breast high in the stand and that these plots do not overlap one another, the above formulas give also the unbiased estimates respectively.

6. When all the trees are scattered completely at random in each plot, the *Inhomogenitätsfehler* of the sum of *Deckpunkthöhen* for the  $j$ -th plot is shown by

$$V(L_j) \doteq \frac{2}{3} M_{Lj} \bar{h}_j (1 + \rho_{hj, vj} C_{hj} C_{vj}) - \frac{M_{Lj}^2}{z_j} (1 + C_{vj}^2)$$

where  $V(L_j)$  : variance of *Inhomogenitätsfehler*

$M_{Lj}$  : expectation of the sum of *Deckpunkthöhen*

$\bar{h}_j$  : mean height

$z_j$  : number of trees

$\rho_{hj, vj}$  : correlation coefficient between tree height  $h$  and volume  $v$

$C_{hj}$  : coefficient of variation of  $h$

$C_{vj}$  : coefficient of variation of  $v$ .

7. Let us suppose that all the trees are scattered completely at random over the stand area  $T$ , and let the plot size be  $T$ . Then the *Inhomogenitätsfehler* for the whole stand is approximately shown by the formula in which all of subscript  $j$  of the above formula are omitted.

From the viewpoint of point sampling, this formula gives the variance of sampling error simultaneously.

8. The coefficient of variation of the sum of *Deckpunkthöhen* in the viewpoint of point sampling is approximately given by

$$C_L^2 \doteq \frac{4}{3} C_B^2$$

where  $C_L$  : coefficient of variation of the sum of *Deckpunkthöhen*

$C_B$  : coefficient of variation of the BITTERLICH's count  $B$ .

9. The estimate of stand form-height is calculated as follows:

$$F\bar{h} = \frac{\bar{L}}{\bar{B}}$$

where  $\bar{B}$  : sample mean of the BITTERLICH's count  $B$

$F\bar{h}$  : stand form-height ( $F$  : stand form-factor).

The validity of the above formulas was tested by using the maps of two stands, in which only the stem form of each tree was imaginary.

The estimated values of  $V$  were very close to the calculated ones, and the other approximate formulas were also useful.

## 附 表

附表 (1-1) スギの相対幹曲線式 (大隅 1959)

群-番号	相 対 幹 曲 線 式
O-I	$y=1.0295x-0.9434x^2+0.4631x^3$
O-II	$y=1.1854x-1.2315x^2+0.5908x^3$
O-III	$y=1.3074x-1.5578x^2+0.8027x^3$
O-IV	$y=1.2744x-1.3988x^2+0.6667x^3$
O-V	$y=1.4180x-1.7177x^2+0.8438x^3$
O-VI	$y=1.5098x-2.0130x^2+1.0586x^3$
Y-I	$y=1.3807x-1.8316x^2+1.0164x^3$
Y-II	$y=1.3470x-1.6076x^2+0.8091x^3$
Y-III	$y=1.4564x-1.8252x^2+0.9158x^3$
Y-IV	$y=1.5487x-2.0488x^2+1.0503x^3$

附表 (2-1) 第 I 林分 直径階別・樹高階別本数

$h(m)$	$d_b(cm)$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	計
4.5				1	1														2
5.0		3	1																4
5.5		1		3	1														5
6.0		2	3	2															7
6.5			2	1	2	1													6
7.0			2	2	2	2													8
7.5				3	2		1	1											7
8.0			1	1	3		1												6
8.5				4	3	1													8
9.0				3	2														5
9.5				2	3														5
10.0					3	2													5
10.5				2	4	3	4	2											15
11.0				2	5	6	6	2											21
11.5				4	7	5	3												19
12.0				1	7	9	11	2	1	1									32
12.5				1	5	2	4	1	3		1								17
13.0					3	9	9	2		2									25
13.5					2	6	5	6	2	2	1								24
14.0					1	4	9	11	7	3	1								36
14.5					1	8	7	6	8	5	2	1							38
15.0						2	6	6		1	2	1							18
15.5					1	4	5	6	10	2			2						30
16.0						3	5	8	12	6	4			1					39
16.5						1	5	5	7	1	3	2							29
17.0					1		3	8	15	11	4		1						43
17.5						2	2	6	3	2	3								18
18.0						1	1	4	10	7	6	1		1					31
18.5							2	5	4	8	5	1	3		1				29
19.0							2	5	9	5	9	5		3					38
19.5							2	2	1	9	7	4	1	1					27
20.0								3	1	5	10	3	2	1					25
20.5								1		2	5	1	1	1	2				13
21.0								1			3	2	1	1					8
21.5									1		3	1	1	2		1			9
22.0											1		2				1		4
22.5																			0
23.0															2				2
23.5												1							1
計		6	9	32	59	68	87	75	90	69	54	57	24	12	12	3	1	1	659

附表 (2-2) 第Ⅱ林分 直径階別・樹高階別本数

$h(m) \backslash d_b (cm)$	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	計
8.0	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
9.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
10.0	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
10.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
11.0	1	1	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
11.5	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
12.0	—	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
12.5	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
13.0	1	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
13.5	—	1	2	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
14.0	—	1	1	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
14.5	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
15.0	—	—	2	1	1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7
15.5	—	—	—	1	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
16.0	—	—	2	3	1	3	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11
16.5	—	—	1	—	—	2	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
17.0	—	—	—	2	6	6	3	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20
17.5	—	—	—	2	2	3	3	2	1	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15
18.0	—	—	1	—	4	7	6	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22
18.5	—	—	—	—	2	4	5	4	6	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22
19.0	—	—	—	—	2	3	5	3	2	2	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	19
19.5	—	—	—	—	4	4	8	5	6	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	29
20.0	—	—	—	—	4	5	3	5	5	4	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	27
20.5	—	—	—	—	1	2	4	3	4	5	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20
21.0	—	—	—	—	1	1	1	7	8	4	2	3	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	29
21.5	—	—	—	—	—	2	3	4	—	5	4	1	3	3	1	1	—	—	—	—	—	—	—	27
22.0	—	—	—	—	—	4	1	2	5	7	10	2	5	3	2	1	—	—	—	—	—	—	—	42
22.5	—	—	—	—	—	2	4	6	9	3	4	5	6	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	42
23.0	—	—	—	—	—	1	6	6	7	7	10	3	4	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—	49
23.5	—	—	—	—	—	—	—	—	3	8	10	5	5	2	1	2	1	—	—	—	—	—	—	37
24.0	—	—	—	—	—	—	—	2	—	2	5	10	2	5	4	2	3	2	1	—	—	—	—	38
24.5	—	—	—	—	—	—	1	1	1	5	9	4	8	1	5	—	1	1	1	1	—	—	—	39
25.0	—	—	—	—	—	—	1	2	3	2	6	6	2	4	3	1	3	1	—	1	—	—	—	35
25.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	8	6	2	5	1	—	—	1	—	—	—	—	25
26.0	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	1	2	9	2	2	1	—	2	—	—	—	—	—	23
26.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	5	3	4	1	2	—	—	—	—	—	18
27.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	4	1	3	5	3	3	3	2	1	—	—	—	—	26
27.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	2	3	2	2	1	—	2	—	—	—	—	14
28.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	2	—	1	1	—	—	—	—	7
28.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	1	—	—	—	1	—	—	5
29.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	1	3	—	1	—	2	—	9
29.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	2
30.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
30.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
31.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
計	4	5	15	13	26	50	49	52	55	55	66	65	50	56	37	34	27	14	12	4	8	0	1	698

附表(2-3) 第Ⅰ林分 カウント数(B)と一致高和(L)の計算値 (GROSENBAUGHの補正法適用, 断面積常数4)

標本 番号	乗数 $\lambda$	B	L	
			O-I	Y-IV
1	3	24	159.3	183.3
2	2	18	116.6	134.2
3	2	18	122.0	147.8
4	2	18	111.2	129.4
5	2	14	89.2	108.2
6	2	6	18.0	21.6
7	2	6	47.6	54.8
8	2	24	141.4	175.8
(9)		15	106.1	130.2
10		11	75.1	90.6
(11)		11	74.8	86.7
12		13	76.6	91.9
(13)		5	43.0	48.8
14		10	79.3	93.6
(15)		11	94.0	108.0
16	2	16	80.4	92.4
17	4	4	10.4	29.6
18	2	18	121.4	145.8
19		16	117.6	137.1
20		13	103.4	125.1
21		12	94.4	106.8
22		8	53.9	67.8
23		15	71.4	82.9
24		14	114.7	141.8
25	2	14	127.8	147.8
26	2	20	178.6	208.8
27		12	99.8	121.1
(28)		19	173.1	209.5
29		11	88.0	102.9
(30)		14	89.8	107.0
31		18	185.5	215.2
(32)		14	89.9	108.4
33	2	8	56.6	69.2
34	3	12	117.9	130.8
35		14	121.8	137.0
36		14	94.9	111.9
37		14	105.2	131.3
38		12	110.4	134.1
39		10	69.4	78.5
40		12	94.3	114.1
41		11	62.7	72.0
42	2	16	124.4	153.0
43	2	12	98.6	119.8
44	2	18	158.4	187.2
45	2	8	101.0	113.4
46	2	12	139.4	160.4
47	2	20	207.4	233.0
計		635	4,816.7	5,700.6
平均		13.51	102.48	121.29

\* ( ) 内の番号は定面積プロットを想定した場合の測定点

\*\* 乗数の記載されていないのは補正を要しない標本点

附表(2-4) 第Ⅱ林分 カウント数(B)と一致高和(L)の計算値 (GROSENBAUGHの補正法適用, 断面積常数4)

標本 番号	乗数 $\lambda$	B	L	
			O-I	Y-IV
1	4	18	175.6	195.6
2	2	15	116.6	145.8
3	2	4	41.0	42.2
4	2	8	68.4	81.6
5	2	16	156.2	187.8
6	2	16	134.8	171.0
7	2	16	105.6	128.2
8	2	18	172.2	202.8
9	2	17	147.0	177.6
10	4	14	86.4	105.6
11	2	13	127.6	160.4
(12)		10	149.4	176.0
13		10.5	135.0	154.4
14		8.5	101.7	124.6
(15)		12	154.6	180.7
16		14	144.5	182.4
17		11.5	109.5	132.5
(18)		14	135.5	160.6
19		17	173.6	206.4
20	2	16	175.0	218.2
21	2	9	59.8	69.2
22		10.5	107.0	129.0
23		14.5	141.3	175.5
24		14	159.6	197.4
25		12.5	167.9	202.6
26		15	174.0	202.3
27		12	104.2	121.6
28		8.5	96.6	113.6
29		11	107.8	139.3
30	2	12	143.0	164.6
31	2	13	167.6	206.2
32		12	136.6	165.8
33		13	164.0	191.0
34		10	132.2	156.9
35		11	130.5	152.2
36		16	159.9	181.1
37		14	153.9	181.0
38		13.5	118.7	142.8
39		15	130.7	152.1
40	2	10	99.8	114.4
41	2	19	199.4	232.2
42		17	175.1	207.3
(43)		16.5	158.2	194.8
44		14	147.7	171.8
45		13	157.2	183.8
(46)		12.5	150.7	179.3
47		17.5	176.5	203.0
48		14	120.1	139.4
(49)		12	82.8	93.3
50	2	6	99.2	109.2
51	2	22	199.8	229.6
52		17.5	224.4	264.8
53		18	179.7	216.8
54		13.5	116.9	135.6
55		13	153.6	183.5

標本点 番 号	乗数 $\lambda$	$B$	$L$		標本点 番 号	乗数 $\lambda$	$B$	$L$	
			O-I	Y-IV				O-I	Y-IV
56		13.5	172.8	206.4	81	2	18	175.6	206.2
57		13	140.6	175.5	82		16	176.0	203.5
58		13	146.3	168.8	83		12	153.6	176.8
59		12	142.9	163.4	84		11	107.7	122.7
60	2	10	111.4	130.4	85		12	121.1	147.6
61	2	14	139.6	172.4	86		9	103.2	123.6
62		17	164.6	193.2	87		8	71.0	88.7
63		13	153.9	176.0	88		12	128.7	160.2
64		10	117.4	137.1	89		11	136.1	156.7
65		12	145.0	168.0	90	2	4	52.0	62.2
66		17	186.5	224.6	91	4	12	90.0	116.0
67		10.5	111.3	130.7	92	2	17	148.6	178.4
68		14	146.6	175.1	93	2	12	126.8	148.4
69		12	128.3	158.3	94	2	10	135.8	151.6
70	2	16	171.4	201.0	95	2	16	170.8	199.2
71	2	14	147.6	179.4	96	2	6	25.4	32.0
(72)		15	166.1	188.6	97	2	6	69.2	76.6
73		16	166.7	199.6	98	2	8	90.8	108.2
74		14	164.6	198.1	99	2	6	58.0	75.6
(75)		15	150.0	172.0	100	4	12	114.4	138.0
76		16.5	180.4	218.4	計 平均				
77		10	105.0	128.1					
(78)		10	131.8	154.8					
79		9	128.7	148.3					
80	2	8	104.2	122.0					
					* ** 附表 (2-3) 参照				

附表 (3-2) 醍醐寺有林 一致高和測定値

標本点番号	ヒ ノ キ		全 林 木	
	B	L	B	L
1	5	34.7	10	61.0
2	4	26.8	6	41.4
3	7	42.8	11	60.0
4	6	44.1	6	44.1
5	7	47.5	9	55.6
6	7	48.6	10	66.4
7	7	78.9	7	78.9
8	10	60.8	11	65.7
9	8	51.8	8	51.8
10	8	63.6	11	100.1
11	4	21.1	7	37.3
計	73	520.7	96	662.3
平 均	6.64	47.34	8.73	60.21

附表 (3-3) 男鹿山国有林 プロット材積・一致高和測定値

標本点 (プロット) 番号	Plot sampling		Point sampling		標本点 (プロット) 番号	Plot sampling		Point sampling	
	本数	材積 (m³)	B	L		本数	材積 (m³)	B	L
1	11	3.761	12	81.07	31	20	3.548	17	
2	10	1.758	9		32	28	3.862	16.5	
3	10	4.403	10		33	16	2.302	9	67.94
4	14	2.781	14		34	19	1.717	10	
5	18	2.752	12.5	59.11	35	9	1.628	5.5	
6	17	4.196	14		36	21	3.075	15	
7	19	3.545	15		37	12	2.178	9	62.72
8	19	3.690	15		38	10	1.589	9	
9	14	3.836	14	98.58	39	10	1.072	8.5	
10	24	4.238	16		40	18	2.777	12.5	
11	17	3.844	16		41	16	3.339	16	100.56
12	16	3.020	14		42	12	2.885	15	
13	26	4.188	17	91.96	43	22	3.096	13	
14	26	3.024	13		44	17	2.718	15	
15	21	1.644	10		45	22	2.503	11	76.49
16	14	2.305	11		46	15	3.188	13	
17	18	3.367	10	75.10	47	20	2.513	12.5	
18	17	2.693	12		48	25	1.730	7.5	
19	13	3.861	10.5		49	15	2.247	8	47.03
20	17	3.055	15		50	15	2.930	15	
21	19	2.896	12	79.11	51	23	3.046	13	
22	28	2.416	12		52	27	3.258	19.5	
23	15	1.854	11						
24	23	2.879	12.5		計	949	154.669	668.0	989.34
25	30	3.347	14	73.61	平均	18.25	2.974	12.85	76.10
26	18	3.657	14						
27	24	4.156	17.5						
28	21	3.174	17.5						
29	21	4.087	13	76.06					
30	17	3.041	14						