Bull. of Yamagata Univ., Nat. Sci., Vol.15, No.4, Feb. 2004

特殊な完全8方陣の分類に関する考察

内田伏一*

(平成 15 年 5 月 16 日 受理)

Abstract

There is a special class of magic squares that are called pan-diagonal magic squares among general magic squares. In this paper, we shall consider a classification of a subclass of pan-diagonal 8×8 magic squares. Key clues for the present investigation are the 4-adic expansion of the entries of magic squares and the transformations of magic squares that are represented by the permutations of rows and columns of the magic squares.

0 はじめに

次の図は魔方陣の例である。

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

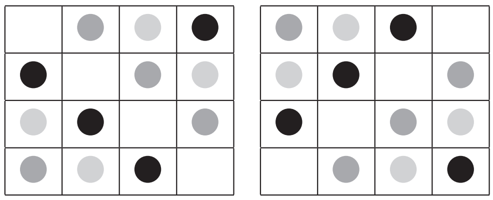
1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

即ち、4 本の縦の列、4 本の横の行、および 2 本の対角線に並んだ 4 個の数の和がいずれも一定の値 34 になっている。

一般に、1 から n^2 までの数が縦横に n 個ずつ並んだ正方形の表について、n 本の縦の列、n 本の横の行、および 2 本の対角線に並んだ n 個の数の和が一定の値 $n(n^2+1)/2$ になっている場合、この表を $n \times n$ の**魔方陣**といい、先の定数をこの魔方陣の**定和**と呼ぶ。

*Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Yamagata University, Yamagata 990–8560, Japan (e-mail address: fuchida@sci.kj.yamagata-u.ac.jp)

上の例では、次の図のように対角線を平行移動した位置にある4個の数の和もすべて34になっている。



このような魔方陣は**完全方陣**または**汎魔方陣**と呼ばれている。これらの表の上辺と下辺を張り合わせ、左辺と右辺を張り合わせてトーラスを作ったとき、もとの対角線に平行なものはすべて区別無く扱っても魔方陣の性質を保っているので、**トーラス上の魔方陣**とも呼ばれる。もとの対角線およびそれに平行なものを総称して**汎対角線**と呼ぶ。本稿では、完全8方陣 (8×8 の完全方陣) の中の特別な性質をもったもの、即ち「完全4方陣集合型かつ相結な完全8方陣」および「相結かつ対称な完全8方陣」について考察しよう。

まず4進数展開により、8×8 魔方陣を直交3対と呼ぶ $0, 1, 2, 3$ の4数が配置された3つの表に分解する。次に2種類の変換、即ち直交3対の置換と4文字 $\{0, 1, 2, 3\}$ の置換、による変換を導入する。この結果1つの完全8方陣から沢山の完全8方陣を生成する手段を得るが、特殊な完全8方陣に関する同一視に関する考察が必要になる。

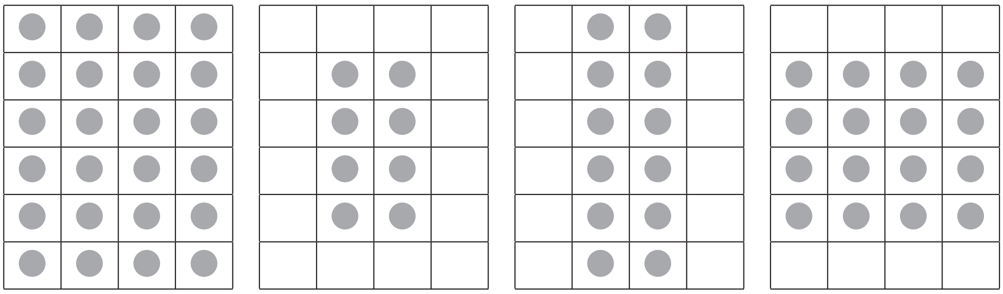
1　特殊な完全8方陣について

相結　$2k \times 2k$ 魔方陣について、2×2 小正方形の4桝の数の和がすべて一定の値であるとき、この魔方陣は**相結**であるといい、この値を**相結定和**と呼ぶ。冒頭に示した3個の完全4方陣は、いずれも相結である。

補題1　相結な $2k \times 2k$ 魔方陣について、次の事柄が成り立つ。

1. $2p \times 2q$ の矩形の4隅の数の和は、すべて相結定和に等しい。
2. $(2p+1) \times (2q+1)$ の矩形の4隅の数について、隣り合わない2隅の数の和は互いに等しい。
3. $2p \times (2q+1)$ の矩形の4隅の数について、偶数辺の2数の和は互いに等しい。

[証明]　$2p \times 2q$ の矩形の場合：

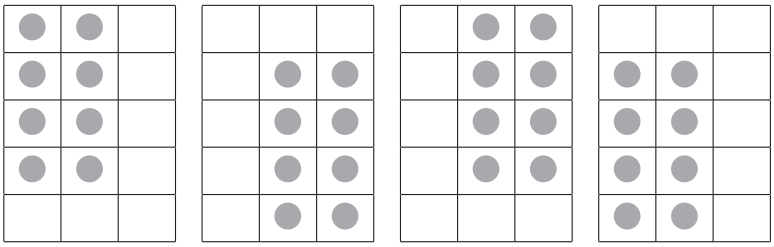


上の 4 個の表において●印をつけた成分のみを考えよう。2×2 の小正方形の個数は、それぞれ $pq, (p-1)(q-1), p(q-1), (p-1)q$ である。

$$pq + (p-1)(q-1) - p(q-1) - (p-1)q = 1$$

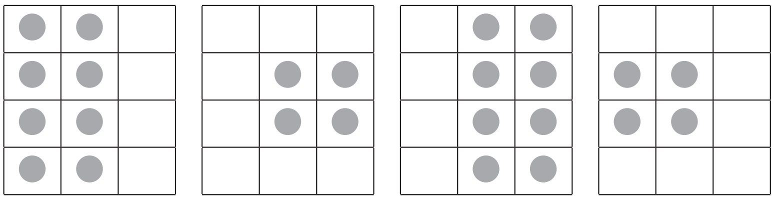
だから、前 2 個の行列の和から後 2 個の行列の和を引けば、4 隅の数だけが残り、その和が相結定和に等しくなる。

$(2p+1) \times (2q+1)$ の矩形の場合：



上の 4 個の表において●印をつけた成分のみを考えよう。2×2 の小正方形の個数は、それぞれ pq 個である。前 2 個の行列の和から後 2 個の行列の和を引けば、左上隅と右下隅の数の和が左下隅と右上隅の数の和に等しいことが分かる。

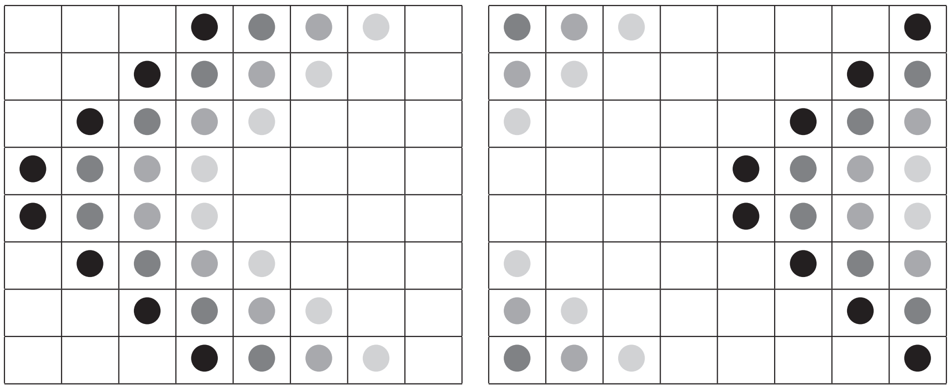
$2p \times (2q+1)$ の矩形の場合：



上の 4 個の表において●印をつけた成分のみを考えよう。2×2 の小正方形の個数は、それぞれ $pq, (p-1)q, pq, (p-1)q$ である。前 2 個の行列の和から後 2 個の行列の和を引けば、左上下隅の数の和が右上下隅の数の和に等しいことが分かる。　◇

完全 4 方陣集合型　8×8 の魔方陣は、縦と横に 2 等分してできる 4 個の 4×4 小正方形がいずれも完全方陣である場合、この魔方陣を**完全 4 方陣集合型**という。

完全フランクリン型　8×8 魔方陣について、次の図のような「くの字形」および左右対称変換したものと 90 度回転したものの 合計 32 本の「くの字形」の 8 桝の数の和 がすべて定和であるとき、この魔方陣を**完全フランクリン型**という。



定理 1　完全 4 方陣集合型で相結な 8×8 の方陣は、完全 8 方陣であり、完全フランクリン型である。

[**証明**]　相結であることから、4 個の完全 4 方陣の定和は等しくなる。この定和を S とする。この結果、8 方陣について各行、各列および 2 本の対角線上の 8 桝の数の和は、いずれも $2S$ になる。よって、この 8 方陣は魔方陣になる。

次に、この 8 方陣が完全 8 方陣になることを示そう。与えられた条件の対称性を利用すれば、対角線に平行な下記の 2 種類の 8 桝の数の和 $\sum_{i=1}^{8} x_i, \sum_{i=1}^{8} y_i$ が $2S$ になることを示せば十分である。

			a				x_8
x_1							
	x_2						
		x_3					
			x_4				b
				x_5			
					x_6		
						x_7	

		p				y_7	
			q				y_8
y_1							
	y_2						
		y_3				r	
			y_4				s
				y_5			
					y_6		

補題1の2番目の性質を使うと、次式の成り立つことが分かる。

$$x_4 + x_8 = a + b, \quad y_3 + y_7 = p + r, \quad y_4 + y_8 = q + s.$$

よって、等式

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = (a + x_1 + x_2 + x_3) + (b + x_5 + x_6 + x_7),$$
$$\sum_{i=1}^{8} y_i = (p + q + y_1 + y_2) + (r + s + y_5 + y_6)$$

が成り立つ。ここで、完全4方陣集合型であることを使うと、この2つの和はいずれも $2S$ に等しくなる。よって、この8方陣は完全8方陣である。

最後に、この8方陣が完全フランクリン型になることを示そう。与えられた条件の対称性を利用すれば、下記の3種類の8桁の数の和 $\sum_{i=1}^{8} x_i, \sum_{i=1}^{8} y_i, \sum_{i=1}^{8} z_i$ が $2S$ になることを示せば十分である。

a	p			x_1	y_1	z_1	
q			x_2	y_2	z_2		
		x_3	y_3	z_3			
	x_4	y_4	z_4				c
	x_5	y_5	z_5				d
		x_6	y_6	z_6			
r			x_7	y_7	z_7		
b	s			x_8	y_8	z_8	

補題1の3番目の性質を使うと、次式の成り立つことが分かる。

$$x_1 + x_8 = a + b, \; y_1 + y_8 = p + s, \; y_2 + y_7 = q + r, \; z_4 + z_5 = c + d.$$

よって、等式

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = (a + x_2 + x_3 + x_4) + (b + x_5 + x_6 + x_7),$$
$$\sum_{i=1}^{8} y_i = (p + q + y_3 + y_4) + (r + s + y_5 + y_6),$$
$$\sum_{i=1}^{8} z_i = (c + z_1 + z_2 + z_3) + (d + z_6 + z_7 + z_8)$$

が成り立つ。ここで、完全4方陣集合型であることを使うと、この3つの和はいずれも $2S$ に等しくなる。よって、この8方陣は完全フランクリン型である。　◇

例1　完全4方陣集合型で相結な8方陣の例を挙げておこう。

1-a

1	47	22	60	2	48	21	59
30	52	9	39	29	51	10	40
43	5	64	18	44	6	63	17
56	26	35	13	55	25	36	14
3	45	24	58	4	46	23	57
32	50	11	37	31	49	12	38
41	7	62	20	42	8	61	19
54	28	33	15	53	27	34	16

1-b

1	44	22	63	5	48	18	59
24	61	3	42	20	57	7	46
43	2	64	21	47	6	60	17
62	23	41	4	58	19	45	8
9	36	30	55	13	40	26	51
32	53	11	34	28	49	15	38
35	10	56	29	39	14	52	25
54	31	33	12	50	27	37	16

定理2　相結な 8×8 魔方陣は完全8方陣である。

[証明]　証明すべきことは対角線を平行移動したすべての8桝の数の和が定和になっていることである。与えられた条件がもつ対称性によって、下記の4種類の8桝の数の和

$$\sum_{i=1}^{8} x_i,\ \sum_{i=1}^{8} y_i,\ \sum_{i=1}^{8} u_i,\ \sum_{i=1}^{8} v_i$$

が定和に等しいことを示せば十分である。

					y_6		x_8
x_1						y_7	
	x_2				a_6		y_8
y_1		x_3		a_5			
	y_2		x_4				
		y_3		x_5			
	a_2		y_4		x_6		
a_1				y_5		x_7	

b_1				v_5		u_7	
	b_2				v_6		u_8
u_1		b_3				v_7	
	u_2		b_4				v_8
v_1		u_3		b_5		p	
	v_2		u_4		b_6		q
		v_3		u_5		b_7	
			v_4		u_6		b_8

補題1の2番目の性質を使うと、次式の成り立つことが分かる。

$x_1 + x_7 = a_1 + y_7,\ x_2 + x_6 = a_2 + a_6,\ x_3 + x_5 = y_3 + a_5,$
$y_1 + y_5 = a_1 + a_5,\ y_2 + y_4 = a_2 + x_4,\ y_6 + y_8 = a_6 + x_8,$
$u_1 + u_7 = b_1 + v_7,\ u_2 + u_8 = b_2 + v_8,\ u_3 + v_7 = b_3 + p,\ u_4 + v_8 = b_4 + q,$
$u_5 + p = b_5 + b_7,\ u_6 + q = b_6 + b_8,$
$v_1 + v_5 = b_1 + b_5,\ v_2 + v_6 = b_2 + b_6,\ v_3 + v_7 = b_3 + b_7,\ v_4 + v_8 = b_4 + b_8.$

この結果、$\sum_{i=1}^{8} x_i$ と $\sum_{i=1}^{8} y_i$ はいずれも左下がりの対角線上の数の和に等しく、$\sum_{i=1}^{8} u_i$ と $\sum_{i=1}^{8} v_i$ はいずれも右下がりの対角線上の数の和に等しいことが分かる。よって、この 8×8 魔方陣は完全 8 方陣である。◇

対称魔方陣　$2k \times 2k$ 魔方陣について、中心に関して点対称な位置にある 2 数の和がすべて一定の値になる魔方陣を**点対称魔方陣**といい、或る直線に関して対称な位置にある 2 数の和がすべて一定の値になる魔方陣を**線対称魔方陣**という。両者を合せて**対称魔方陣**という。

例 2　相結かつ点対称な 8×8 魔方陣の例を挙げておこう。

2-a

1	62	19	48	35	32	49	14
63	4	45	18	29	34	15	52
6	57	24	43	40	27	54	9
60	7	42	21	26	37	12	55
10	53	28	39	44	23	58	5
56	11	38	25	22	41	8	59
13	50	31	36	47	20	61	2
51	16	33	30	17	46	3	64

2-b

1	62	35	32	7	60	37	26
63	4	29	34	57	6	27	40
10	53	44	23	16	51	46	17
56	11	22	41	50	13	20	47
18	45	52	15	24	43	54	9
48	19	14	49	42	21	12	55
25	38	59	8	31	36	61	2
39	28	5	58	33	30	3	64

例 3　相結かつ線対称 な 8×8 魔方陣の例を挙げておこう。

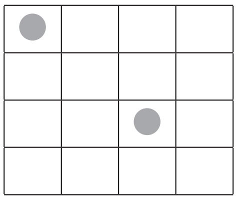
3-a

0	37	10	47	19	54	25	60
27	62	17	52	8	45	2	39
4	33	14	43	23	50	29	56
31	58	21	48	12	41	6	35
32	5	42	15	51	22	57	28
59	30	49	20	40	13	34	7
36	1	46	11	55	18	61	24
63	26	53	16	44	9	38	3

3-b

0	39	8	47	16	55	24	63
27	60	19	52	11	44	3	36
7	32	15	40	23	48	31	56
28	59	20	51	12	43	4	35
34	5	42	13	50	21	58	29
57	30	49	22	41	14	33	6
37	2	45	10	53	18	61	26
62	25	54	17	46	9	38	1

注意 1　完全 4 方陣集合型で相結な完全 8 方陣は点対称および線対称にはならないことが、次の事実「完全 4 方陣について、次の図のように斜めに 1 桝飛ばした 2 桝の数の和は定和の 1/2 になる」(後で示す補題 2 を参照のこと) から分かる。



この結果、完全 4 方陣集合型で相結 な完全 8 方陣のグループは 相結かつ点対称 な完全 8 方陣のグループおよび 相結かつ線対称 な完全 8 方陣のグループとは全く交わらないことが分かる。

例 4　相結でない 完全 8 方陣の例を挙げておこう。

4-a

1	32	45	52	49	48	29	4
54	43	26	7	6	27	42	55
60	37	24	9	12	21	40	57
15	18	35	62	63	34	19	14
13	20	33	64	61	36	17	16
58	39	22	11	10	23	38	59
56	41	28	5	8	25	44	53
3	30	47	50	51	46	31	2

4-b

1	32	36	61	49	48	20	13
54	43	23	10	6	27	39	58
63	34	30	3	15	18	46	51
12	21	41	56	60	37	25	8
4	29	33	64	52	45	17	16
55	42	22	11	7	26	38	59
62	35	31	2	14	19	47	50
9	24	44	53	57	40	28	5

注意 2　ここに示した 2 つの完全 8 方陣は、単に相結でないだけでなく、完全 4 方陣集合型でもなく点対称および線対称でもない。

2　8×8 魔方陣の 4 進分解表示と変換について

4 進展開表示　8×8 の魔方陣には 1 から 64 までの数が配置されている。ここでは、各成分から 1 を引いて、0 から 63 までを 4 進展開してみよう。すなわち、元の魔方陣の成分 x に対して

$$x-1=a\times 4^2+b\times 4+c\ ;\ (a,b,c=0,1,2,3)$$

と展開し、3 桁の数 abc を対応させるのである。先に例示した完全 8 方陣について 4 進展開表示を実行してみよう。

1-a の 4 進展開表示

000	232	111	323	001	233	110	322
131	303	020	212	130	302	021	213
222	010	333	101	223	011	332	100
313	121	202	030	312	120	203	031
002	230	113	321	003	231	112	320
133	301	022	210	132	300	023	211
220	012	331	103	221	013	330	102
311	123	200	032	310	122	201	033

1-b の 4 進展開表示

000	223	111	332	010	233	101	322
113	330	002	221	103	320	012	231
222	001	333	110	232	011	323	100
331	112	220	003	321	102	230	013
020	203	131	312	030	213	121	302
133	310	022	201	123	300	032	211
202	021	313	130	212	031	303	120
311	132	200	023	301	122	210	033

2-a の 4 進展開表示

000	331	102	233	202	133	300	031
332	003	230	101	130	201	032	303
011	320	113	222	213	122	311	020
323	012	221	110	121	210	023	312
021	310	123	212	223	112	321	010
313	022	211	120	111	220	013	322
030	301	132	203	232	103	330	001
302	033	200	131	100	231	002	333

2-b の 4 進展開表示

000	331	202	133	012	323	210	121
332	003	130	201	320	011	122	213
021	310	223	112	033	302	231	100
313	022	111	220	301	030	103	232
101	230	303	032	113	222	311	020
233	102	031	300	221	110	023	312
120	211	322	013	132	203	330	001
212	123	010	321	200	131	002	333

3-a の 4 進展開表示

000	211	022	233	103	312	121	330
123	332	101	310	020	231	002	213
010	201	032	223	113	302	131	320
133	322	111	300	030	221	012	203
200	011	222	033	303	112	321	130
323	132	301	110	220	031	202	013
210	001	232	023	313	102	331	120
333	122	311	100	230	021	212	003

3-b の 4 進展開表示

000	213	020	233	100	313	120	333
123	330	103	310	023	230	003	210
013	200	033	220	113	300	133	320
130	323	110	303	030	223	010	203
202	011	222	031	302	111	322	131
321	132	301	112	221	032	201	012
211	002	231	022	311	102	331	122
332	121	312	101	232	021	212	001

4-a の 4 進展開表示

000	133	230	303	300	233	130	003
311	222	121	012	011	122	221	312
323	210	113	020	023	110	213	320
032	101	202	331	332	201	102	031
030	103	200	333	330	203	100	033
321	212	111	022	021	112	211	322
313	220	123	010	013	120	223	310
002	131	232	301	302	231	132	001

4-b の 4 進展開表示

000	133	203	330	300	233	103	030
311	222	112	021	011	122	212	321
332	201	131	002	032	101	231	302
023	110	220	313	323	210	120	013
003	130	200	333	303	230	100	033
312	221	111	022	012	121	211	322
331	202	132	001	031	102	232	301
020	113	223	310	320	213	123	010

分解表示　先に 8×8 魔方陣についての4進展開表示に関して考察した。各成分 x に対して、$x-1=a\times4^2+b\times4+c$ と展開し、3桁の数 abc を対応させたが、ここでは a のみ、b のみ、c のみを集めた表について考察しよう。元の魔方陣を M とし、a,b,c のみを集めた表を順に A,B,C とする。さらに、各成分が1である表を $\mathbf{1}$ と表示すれば、行列の演算によって次のように記述できる。

$$M=16A+4B+C+\mathbf{1}.$$

この表示を 8×8 魔方陣の**4進分解表示**と呼ぶ。

先に例示した完全8方陣についての4進分解表示における表 A,B,C を求めてみよう。

A(**1-a**)

0	2	1	**3**	**0**	2	1	**3**
1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**	2
2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**	1
3	1	2	**0**	**3**	1	2	**0**
0	2	1	**3**	**0**	2	1	**3**
1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**	2
2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**	1
3	1	2	**0**	**3**	1	2	**0**

B(**1-a**)

0	**3**	1	2	**0**	**3**	1	2
3	**0**	2	1	**3**	**0**	2	1
2	1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**
1	2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**
0	**3**	1	2	**0**	**3**	1	2
3	**0**	2	1	**3**	**0**	2	1
2	1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**
1	2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**

C(**1-a**)

0	2	1	**3**	1	**3**	**0**	2
1	**3**	**0**	2	**0**	2	1	**3**
2	**0**	**3**	1	**3**	1	2	**0**
3	1	2	**0**	2	**0**	**3**	1
2	**0**	**3**	1	**3**	1	2	**0**
3	1	2	**0**	2	**0**	**3**	1
0	2	1	**3**	1	**3**	**0**	2
1	**3**	**0**	2	**0**	2	1	**3**

A(**1-b**)

0	2	1	**3**	**0**	2	1	**3**
1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**	2
2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**	1
3	1	2	**0**	**3**	1	2	**0**
0	2	1	**3**	**0**	2	1	**3**
1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**	2
2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**	1
3	1	2	**0**	**3**	1	2	**0**

B(**1-b**)

0	2	1	**3**	1	**3**	**0**	2
1	**3**	**0**	2	**0**	2	1	**3**
2	**0**	**3**	1	**3**	1	2	**0**
3	1	2	**0**	2	**0**	**3**	1
2	**0**	**3**	1	**3**	1	2	**0**
3	1	2	**0**	2	**0**	**3**	1
0	2	1	**3**	1	**3**	**0**	2
1	**3**	**0**	2	**0**	2	1	**3**

C(**1-b**)

0	**3**	1	2	**0**	**3**	1	2
3	**0**	2	1	**3**	**0**	2	1
2	1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**
1	2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**
0	**3**	1	2	**0**	**3**	1	2
3	**0**	2	1	**3**	**0**	2	1
2	1	**3**	**0**	2	1	**3**	**0**
1	2	**0**	**3**	1	2	**0**	**3**

A(**2-a**)

0	**3**	1	2	2	1	**3**	**0**
3	**0**	2	1	1	2	**0**	**3**
0	**3**	1	2	2	1	**3**	**0**
3	**0**	2	1	1	2	**0**	**3**
0	**3**	1	2	2	1	**3**	**0**
3	**0**	2	1	1	2	**0**	**3**
0	**3**	1	2	2	1	**3**	**0**
3	**0**	2	1	1	2	**0**	**3**

B(**2-a**)

0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1
2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**

C(**2-a**)

0	1	2	**3**	2	**3**	**0**	1
2	**3**	**0**	1	**0**	1	2	**3**
1	**0**	**3**	2	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	1	**0**	**3**	2
1	**0**	**3**	2	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	1	**0**	**3**	2
0	1	2	**3**	2	**3**	**0**	1
2	**3**	**0**	1	**0**	1	2	**3**

A(**2-b**)

0	**3**	2	1	**0**	**3**	2	1
3	**0**	1	2	**3**	**0**	1	2
0	**3**	2	1	**0**	**3**	2	1
3	**0**	1	2	**3**	**0**	1	2
1	2	**3**	**0**	1	2	**3**	**0**
2	1	**0**	**3**	2	1	**0**	**3**
1	2	**3**	**0**	1	2	**3**	**0**
2	1	**0**	**3**	2	1	**0**	**3**

B(**2-b**)

0	**3**	**0**	**3**	1	2	1	2
3	**0**	**3**	**0**	2	1	2	1
2	1	2	1	**3**	**0**	**3**	**0**
1	2	1	2	**0**	**3**	**0**	**3**
0	**3**	**0**	**3**	1	2	1	2
3	**0**	**3**	**0**	2	1	2	1
2	1	2	1	**3**	**0**	**3**	**0**
1	2	1	2	**0**	**3**	**0**	**3**

C(**2-b**)

0	1	2	**3**	2	**3**	**0**	1
2	**3**	**0**	1	**0**	1	2	**3**
1	**0**	**3**	2	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	1	**0**	**3**	2
1	**0**	**3**	2	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	1	**0**	**3**	2
0	1	2	**3**	2	**3**	**0**	1
2	**3**	**0**	1	**0**	1	2	**3**

A(**3-a**)

0	2	**0**	2	1	**3**	1	**3**
1	**3**	1	**3**	**0**	2	**0**	2
0	2	**0**	2	1	**3**	1	**3**
1	**3**	1	**3**	**0**	2	**0**	2
2	**0**	2	**0**	**3**	1	**3**	1
3	1	**3**	1	2	**0**	2	**0**
2	**0**	2	**0**	**3**	1	**3**	1
3	1	**3**	1	2	**0**	2	**0**

B(**3-a**)

0	1	2	**3**	**0**	1	2	**3**
2	**3**	**0**	1	2	**3**	**0**	1
1	**0**	**3**	2	1	**0**	**3**	2
3	2	1	**0**	**3**	2	1	**0**
0	1	2	**3**	**0**	1	2	**3**
2	**3**	**0**	1	2	**3**	**0**	1
1	**0**	**3**	2	1	**0**	**3**	2
3	2	1	**0**	**3**	2	1	**0**

C(**3-a**)

0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**

A(**3-b**)

0	2	**0**	2	1	**3**	1	**3**
1	**3**	1	**3**	**0**	2	**0**	2
0	2	**0**	2	1	**3**	1	**3**
1	**3**	1	**3**	**0**	2	**0**	2
2	**0**	2	**0**	**3**	1	**3**	1
3	1	**3**	1	2	**0**	2	**0**
2	**0**	2	**0**	**3**	1	**3**	1
3	1	**3**	1	2	**0**	2	**0**

B(**3-b**)

0	1	2	**3**	**0**	1	2	**3**
2	**3**	**0**	1	2	**3**	**0**	1
1	**0**	**3**	2	1	**0**	**3**	2
3	2	1	**0**	**3**	2	1	**0**
0	1	2	**3**	**0**	1	2	**3**
2	**3**	**0**	1	2	**3**	**0**	1
1	**0**	**3**	2	1	**0**	**3**	2
3	2	1	**0**	**3**	2	1	**0**

C(**3-b**)

0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1

A(**4-a**)

0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**

B(**4-a**)

0	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**
1	2	2	1	1	2	2	1
2	1	1	2	2	1	1	2
3	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**
3	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**
2	1	1	2	2	1	1	2
1	2	2	1	1	2	2	1
0	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**

C(**4-a**)

0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
1	2	1	2	1	2	1	2
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
2	1	2	1	2	1	2	1
0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
1	2	1	2	1	2	1	2
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
2	1	2	1	2	1	2	1

A(**4-b**)

0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
3	2	1	**0**	**0**	1	2	**3**
0	1	2	**3**	**3**	2	1	**0**

B(**4-b**)

0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
1	2	1	2	1	2	1	2
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
2	1	2	1	2	1	2	1
0	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
1	2	1	2	1	2	1	2
3	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**
2	1	2	1	2	1	2	1

C(**4-b**)

0	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**
1	2	2	1	1	2	2	1
2	1	1	2	2	1	1	2
3	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**
3	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**
2	1	1	2	2	1	1	2
1	2	2	1	1	2	2	1
0	**3**	**3**	**0**	**0**	**3**	**3**	**0**

観察　このように分解した 24 個の表について観察しよう。各行、各列および各汎対角線に並ぶ 8 個の数の組合せについては、次のいずれかになっている。

(a)　0,1,2,3 が各々2 個含まれている。

(b)　0,3 が各々4 個含まれている。

(c)　1,2 が各々4 個含まれている。

(d)　0,3 が各々3 個、1,2 が各々1 個含まれている。

(e)　1,2 が各々3 個、0,3 が各々1 個含まれている。

即ち、どの表も完全 8 方陣が持つ定和性の性質を保っている。

さらに、**0** と **3** を太文字で印字してあるが、0 と 3 が配置された場所と、1 と 2 が配置された場所とは整然とした模様を形成していることが分かる。

また、各魔方陣の分解要素である 3 つの表 A, B, C において、1 つの表のどの数 x についても x の配置された 16 の桝について、他の 2 つの表の組では 0,1,2,3 から 2 個選んだすべての順列が実現されていることが分かる。このような意味で、表 A, B, C は**直交 3 対**であると呼ぼう。この性質は表 A, B, C から $M = 16A + 4B + C + \mathbf{1}$ によって表 M を作ると、M には 1 から 64 までの数がすべて揃うことを意味している。

また、**1-a**,**1-b**,**2-a**,**2-b**,**3-a**, **3-b** の分解要素である 18 個の表においては、すべての 2×2 小正方形の 4 桝の数の和が 6 になっている。即ち、これらのどの表も相結になっている。さらに、**1-a**,**1-b** の分解要素である 6 個の表においては、完全 4 方陣集合型の性質を保ち、**2-a**, **2-b** の分解要素である 6 個の表においては、いずれも点対称な位置にある 2 数の和が 3 になっている。**3-a** の分解要素である 3 個の表においては、いずれも上下線対称な位置にある 2 数の和が 3 になっており、**3-b** の分解要素である 3 個の表においては、いずれも左右線対称な位置にある 2 数の和が 3 になっている。

第 1 の変換(直交 3 対の置換)　直交 3 対である表 A, B, C から $M = 16A + 4B + C + \mathbf{1}$ によって表 M を作ると、M には 1 から 64 までの数がすべて揃うこと

が分かっていたが、A, B, C の順序を入れ替えて、例えば $M' = 16A+4C+B+\mathbf{1}$ によって表 M' を作っても、M' には 1 から 64 までの数がすべて揃うことが分かる。実は、**1-b** の完全方陣は **1-a** の完全方陣から、**4-b** の完全方陣は**4-a** の完全方陣から、いずれもこのようにして得られている。

このような変換によって、**1-a** の完全方陣から 6 個の完全 4 方陣集合型で相結な完全 8 方陣が得られ、**2-a** と**2-b** の完全方陣から夫々6 個の相結かつ点対称な完全 8 方陣が得られ、**3-a** と**3-b** の完全方陣から夫々6 個の相結かつ線対称な完全 8 方陣が得られ、**4-a** の完全方陣から 6 個の相結でなく、完全 4 方陣集合型でもなく、点対称および線対称でもない完全 8 方陣が得られる。

例 5　ここで、**1-a** の完全方陣から第 1 の変換によって得られる 6 個の完全 8 方陣について示そう。**1-a** の完全方陣を $16A+4B+C+\mathbf{1}$ とすれば、先に述べたように、**1-b** の完全方陣は $16A+4C+B+\mathbf{1}$ と表示されることが分かっているので、残りの 4 個を与えよう。

$16B+4A+C+\mathbf{1}$

1	59	22	48	2	60	21	47
54	16	33	27	53	15	34	28
43	17	64	6	44	18	63	5
32	38	11	49	31	37	12	50
3	57	24	46	4	58	23	45
56	14	35	25	55	13	36	26
41	19	62	8	42	20	61	7
30	40	9	51	29	39	10	52

$16B+4C+A+\mathbf{1}$

1	59	22	48	5	63	18	44
54	16	33	27	50	12	37	31
43	17	64	6	47	21	60	2
32	38	11	49	28	34	15	53
9	51	30	40	13	55	26	36
62	8	41	19	58	4	45	23
35	25	56	14	39	29	52	10
24	46	3	57	20	42	7	61

$16C+4A+B+\mathbf{1}$

1	44	22	63	17	60	6	47
24	61	3	42	8	45	19	58
43	2	64	21	59	18	48	5
62	23	41	4	46	7	57	20
33	12	54	31	49	28	38	15
56	29	35	10	40	13	51	26
11	34	32	53	27	50	16	37
30	55	9	36	14	39	25	52

$16C+4B+A+\mathbf{1}$

1	47	22	60	17	63	6	44
30	52	9	39	14	36	25	55
43	5	64	18	59	21	48	2
56	26	35	13	40	10	51	29
33	15	54	28	49	31	38	12
62	20	41	7	46	4	57	23
11	37	32	50	27	53	16	34
24	58	3	45	8	42	19	61

第 2 の変換(4 文字の置換)　先の 24 個の表に 0,1,2,3 の 4 文字の置換を施してみよう。勝手に 4 文字の置換を施せば、先に観察した諸々の性質が失わ

れる危険性があるが、位数が 24 の 4 文字の対称群の中で単位置換 (無変換) 以外に次の 7 つの置換

$$(03),\ (12),\ (03)(12),\ (01)(23),\ (02)(13),\ (0132),\ (0231)$$

から成る位数 8 の部分群 G を選ぶと、G に属する置換を施した表はいずれも元の表と同じような先に観察した諸性質を保つことが確かめられる。この結果、1 組の直交 3 対 A, B, C から、A, B, C 夫々を G に属する別々の (もちろん同じでも良い) 置換によって新しい表 A', B', C' に変換すると、この 3 対も必然的に直交 3 対になり、相結、完全 4 方陣集合型、点対称などの性質を保存することが分かる。

この第 2 の変換によって、**1-a** の完全方陣から 8^3 個の完全 4 方陣集合型で相結な完全 8 方陣が得られ、**2-a** と **2-b** の完全方陣から夫々 8^3 個の相結で点対称な完全 8 方陣が得られ、**3-a** と **3-b** の完全方陣から夫々 8^3 個の相結で線対称な完全 8 方陣が得られ、**4-a** の完全方陣から 8^3 個の相結でなく、完全 4 方陣集合型でもなく、点対称および線対称でもない完全 8 方陣が得られる。

例 6　ここでは、**1-a** の完全方陣の 4 進分解表示の表 $A = A(\mathbf{1\text{-}a}), B = B(\mathbf{1\text{-}a}), C = C(\mathbf{1\text{-}a})$ に対して置換 (12) を施した表、即ち 1 と 2 を入れ替えた表を順に A', B', C' とし、これらを使って得られる新しい完全 8 方陣を示そう。

A'

0	1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0	1
1	0	3	2	1	0	3	2
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0	1
1	0	3	2	1	0	3	2
3	2	1	0	3	2	1	0

B'

0	3	2	1	0	3	2	1
3	0	1	2	3	0	1	2
1	2	3	0	1	2	3	0
2	1	0	3	2	1	0	3
0	3	2	1	0	3	2	1
3	0	1	2	3	0	1	2
1	2	3	0	1	2	3	0
2	1	0	3	2	1	0	3

C'

0	1	2	3	2	3	0	1
2	3	0	1	0	1	2	3
1	0	3	2	3	2	1	0
3	2	1	0	1	0	3	2
1	0	3	2	3	2	1	0
3	2	1	0	1	0	3	2
0	1	2	3	2	3	0	1
2	3	0	1	0	1	2	3

$16A' + 4B + C + \mathbf{1}$

1	31	38	60	2	32	37	59
46	52	9	23	45	51	10	24
27	5	64	34	28	6	63	33
56	42	19	13	55	41	20	14
3	29	40	58	4	30	39	57
48	50	11	21	47	49	12	22
25	7	62	36	26	8	61	35
54	44	17	15	53	43	18	16

$16A + 4B' + C + \mathbf{1}$

1	47	26	56	2	48	25	55
30	52	5	43	29	51	6	44
39	9	64	18	40	10	63	17
60	22	35	13	59	21	36	14
3	45	28	54	4	46	27	53
32	50	7	41	31	49	8	42
37	11	62	20	38	12	61	19
58	24	33	15	57	23	34	16

$16A + 4B + C' + \mathbf{1}$

1	46	23	60	3	48	21	58
31	52	9	38	29	50	11	40
42	5	64	19	44	7	62	17
56	27	34	13	54	25	36	15
2	45	24	59	4	47	22	57
32	51	10	37	30	49	12	39
41	6	63	20	43	8	61	18
55	28	33	14	53	26	35	16

$16A' + 4B' + C + \mathbf{1}$

1	31	42	56	2	32	41	55
46	52	5	27	45	51	6	28
23	9	64	34	24	10	63	33
60	38	19	13	59	37	20	14
3	29	44	54	4	30	43	53
48	50	7	25	47	49	8	26
21	11	62	36	22	12	61	35
58	40	17	15	57	39	18	16

$16A' + 4B + C' + \mathbf{1}$

1	30	39	60	3	32	37	58
47	52	9	22	45	50	11	24
26	5	64	35	28	7	62	33
56	43	18	13	54	41	20	15
2	29	40	59	4	31	38	57
48	51	10	21	46	49	12	23
25	6	63	36	27	8	61	34
55	44	17	14	53	42	19	16

$16A + 4B' + C' + \mathbf{1}$

1	46	27	56	3	48	25	54
31	52	5	42	29	50	7	44
38	9	64	19	40	11	62	17
60	23	34	13	58	21	36	15
2	45	28	55	4	47	26	53
32	51	6	41	30	49	8	43
37	10	63	20	39	12	61	18
59	24	33	14	57	22	35	16

$16A' + 4B' + C' + \mathbf{1}$

1	30	43	56	3	32	41	54
47	52	5	26	45	50	7	28
22	9	64	35	24	11	62	33
60	39	18	13	58	37	20	15
2	29	44	55	4	31	42	53
48	51	6	25	46	49	8	27
21	10	63	36	23	12	61	34
59	40	17	14	57	38	19	16

注意 3　第 1 の変換 (直交 3 対の置換) と第 2 の変換 (4 文字の置換) を組み合わせると、**1-a** の完全方陣から 3,072($= 6 \times 8^3$) 個の完全 4 方陣集合型で相結な完全 8 方陣が得られ、**2-a** と **2-b** の完全方陣から合計 6,144 個の相結で点対称な完全 8 方陣が得られ、**3-a** と **3-b** の完全方陣から合計 6,144 個の相結で点対称な完全 8 方陣が得られ、**4-a** の完全方陣から 3,072 個の相結でなく、完全 4 方陣集合型でもなく、点対称および線対称でもない完全 8 方陣が得られる。しかし、この中には魔方陣として同一視すべきものが含まれている。例えば第 2 の変換 (4 文字の置換) によって **1-a** から得られた $16A' + 4B' + C' + \mathbf{1}$ は行列として **1-a** の転置行列になっている。

3　魔方陣の分類について

魔方陣の同一視　どのような魔方陣を**同一視**するかを明確にしておこう。一般に、2 つの魔方陣は正方形の合同変換 (即ち、中心に関する回転及び対称軸に関する折り返し) によって一方が他方に移るとき同一視される。完全方陣の場合には、トーラス上の魔方陣としてトーラスの合同変換で一方が他方に移るとき同一視される。これを別の言葉で説明しよう。

完全方陣の第 1 行を切り取って最後の行に移す操作および第 1 列を切り取って最後の列に移す操作を有限回組み合わせて新しい完全方陣を作る変換を**シフト変換**と呼ぼう。

一般に完全 n 方陣に関して、シフト変換は無変換を入れて n^2 個ある。そのうち、任意の成分 x について x を隅の桝に移すシフト変換は 4 個である。このようにしてできる 4 個の魔方陣は一般の魔方陣としては同一視できないことが数の配列から分かるので、1 つの完全 n 方陣を与えると、一般の魔方陣としては n^2 個の魔方陣が与えられることになる。

2 つの完全方陣は、一方にシフト変換を施したものがもう一方と魔方陣として同一視できるとき、完全方陣として同一視されるのである。このような同一視 (同値関係である) の下で完全 4 方陣は 3 種類 (同値類が 3 個) のみであることが知られており、本稿の冒頭に掲げた 3 個の完全 4 方陣はこの 3 種類の代表系である。

補題 2　4×4 魔方陣が完全 4 方陣になる必要十分条件は、相結であり、すべての 3×3 小正方形の 4 隅の数の和が相結定和に等しいことである。

[**証明**]　この結果は知られているものであるが、本節の議論において基本的な役割を果たすものなので、ここに証明を与えよう。4×4 魔方陣を次のように表示し、その定和を T とする。

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}&=T\\
a_{14}+a_{23}+a_{32}+a_{41}&=T\\
a_{12}+a_{22}+a_{32}+a_{42}&=T\\
a_{13}+a_{23}+a_{33}+a_{43}&=T\\
a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}&=T\\
a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}&=T
\end{aligned}$$

前 4 式の和から後 2 式の和を引くと、等式

$$a_{22}+a_{23}+a_{32}+a_{33}=T\cdots①$$

を得る。また、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=T,\quad a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=T\\
a_{12}+a_{22}+a_{32}+a_{42}=T,\quad a_{14}+a_{24}+a_{34}+a_{44}=T
\end{aligned}$$

前 2 式の和から後 2 式の和を引くと、等式

$$a_{11}+a_{13}+a_{31}+a_{33}=a_{22}+a_{24}+a_{42}+a_{44}\cdots②$$

を得る。

ここで、この魔方陣が完全方陣であると仮定しよう。等式 ① により相結になり、等式 ② の両辺の和が $2T$ になることから、② の両辺の値が T になり、完全方陣だから、すべての 3×3 小正方形の 4 隅の数の和が相結定和に等しくなる。

逆に、この魔方陣が相結ですべての 3×3 小正方形の 4 隅の数の和が相結定和 T に等しいと仮定しよう。等式 ② と補題 1 の 2 番目の性質を使うと、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
a_{11}+a_{33}=a_{13}+a_{31}=T/2,\quad a_{21}+a_{43}=a_{23}+a_{44}=T/2\\
a_{12}+a_{34}=a_{14}+a_{32}=T/2,\quad a_{22}+a_{44}=a_{24}+a_{42}=T/2
\end{aligned}$$

これらの等式より、すべての汎対角線上の 4 数の和が T になる。よって、この魔方陣は完全方陣である。　◇

完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣の同一視　完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣の同一視 (同値関係) に関して、どのように定義すべきかについて考察しよう。

魔方陣の 行の置換および列の置換の合成による変換 で、この変換を施しても完全 4 方陣集合型かつ相結であるという性質を保つものの全体 H は、完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣全体の上の変換群になる。2 つの完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣について、一方に上のような変換を施せば他方と魔方陣として同一視できる場合、この 2 つの完全 8 方陣は 完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣として同一視される と定義しよう。

行の置換で H に属するものの全体を H_1、列の置換で H に属するものの全体を H_2 とする。H は H_1 と H_2 の直積 $H = H_1 \times H_2$ であり、H_1 と H_2 を 8 文字の集合 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ の上の置換群と見れば、$H_1 = H_2$ である。

補題 3　置換群 H_1, H_2 は次の置換

$$(13),\ (24),\ (1537),\ (2648),\ (1234)(5678)$$

によって生成される位数 128 の群である。

[**証明**]　列の置換のみについて考察し、置換群 H_2 を決定しよう。例えば、置換 (13) は第 1 列と第 3 列を入れかえる変換で、完全 4 方陣集合型であることと相結性に関する補題 1 の 3 番目の性質を使うと、この変換は完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣であるという性質を保つものであり、H_2 に属する置換である。同様に、完全 4 方陣集合型であることと相結性に関する補題 1 の 3 番目の性質を使うと、次の置換

$$(13),\ (24),\ (57),\ (68),\ (1234)(5678)$$

はいずれも H_2 に属することが分かる。さらに、完全 4 方陣の特徴づけである補題 2 と相結性に関する補題 1 の 3 番目の性質を使うと、次の置換

$$(15)(37),\ (17)(35),\ (26)(48),\ (28)(46)$$

はいずれも H_2 に属することが分かる。等式

$$(1537) = (15)(37)(57),\ (2648) = (26)(48)(68)$$

が成り立ち、奇数のみの置換で求める条件を満たすものは $(13), (1537)$ で生成される位数 8 の部分群であり、偶数のみの置換で求める条件を満たすものは $(24), (2648)$ で生成される位数 8 の部分群である。さらに奇数と偶数を入れかえる置換として $(1234)(5678)$ が H_2 に属すことが分かっている。この結果、

$$(13),\ (24),\ (1537),\ (2648),\ (1234)(5678)$$

が群 H_2 を生成することが分かる。また、$128 = 8^2 \times 2$ によって、位数も分かる。　◇

定理 3　完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣としての 1 つの同値類には 1,024 種の完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣が含まれている。

[証明]　1 つの完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣に群 H の変換を施して得られる完全 8 方陣の中で、完全 8 方陣として同一視されるものを識別することが求められている。群 H の変換を施しても、各行各列の数の並びは順序を無視すれば変化していない。よって、群 H の変換でシフト変換または線対称変換を与えるものを求めよう。H_1 および H_2 に属する変換で、この性質を持つものは単位置換 (無変換) の他には次の 3 つの置換

$$(15)(26)(37)(48),\ (14)(23)(58)(67),\ (18)(27)(36)(45)$$

のみである。この位数 4 の部分群を H_1 および H_2 の部分群と見る場合、それぞれ N_1, N_2 と書く。$g = (1234)(5678)$ に対して、等式

$$g^{-1}(18)(27)(36)(45)g = (16)(25)(38)(47)$$

が成り立ち、右辺の置換は N_1, N_2 には属さないので、N_1, N_2 は H_1 および H_2 の正規部分群ではないことに注意しよう。

ここで、$N = N_1 \times N_2$ と置く。N は H の部分群であり、最初に与えた完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣に、N による H の 1 つの右剰余類 Nx $(x \in H)$ に属する変換を施したものはすべて完全 8 方陣として同一視できるものであるが、互いに異なる右剰余類 Nx, Ny に属する変換を施したものは完全 8 方陣として同一視できないことが分かる。従って、完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣としての 1 つの同値類に含まれる、完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣の同値類の個数は、右剰余集合 H/N の要素の個数に一致する。H は位数 2^{14} であり N は位数 2^4 だから、H/N の要素の個数は $2^{10} = 1,024$ である。　◇

例 7　完全 4 方陣集合型かつ相結な完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣を例示しておこう。群 H の変換を施しても、各行各列の数の並びは順序を無視すれば変化しないので、例示したものが互いに同値でないことが分かる。いずれも既出のものである。

1-a

1	47	22	60	2	48	21	59
30	52	9	39	29	51	10	40
43	5	64	18	44	6	63	17
56	26	35	13	55	25	36	14
3	45	24	58	4	46	23	57
32	50	11	37	31	49	12	38
41	7	62	20	42	8	61	19
54	28	33	15	53	27	34	16

1-b

1	44	22	63	5	48	18	59
24	61	3	42	20	57	7	46
43	2	64	21	47	6	60	17
62	23	41	4	58	19	45	8
9	36	30	55	13	40	26	51
32	53	11	34	28	49	15	38
35	10	56	29	39	14	52	25
54	31	33	12	50	27	37	16

1-c : $16C + 4A + B + \mathbf{1}$

1	44	22	63	17	60	6	47
24	61	3	42	8	45	19	58
43	2	64	21	59	18	48	5
62	23	41	4	46	7	57	20
33	12	54	31	49	28	38	15
56	29	35	10	40	13	51	26
11	34	32	53	27	50	16	37
30	55	9	36	14	39	25	52

1-d : $16A' + 4B + C + \mathbf{1}$

1	31	38	60	2	32	37	59
46	52	9	23	45	51	10	24
27	5	64	34	28	6	63	33
56	42	19	13	55	41	20	14
3	29	40	58	4	30	39	57
48	50	11	21	47	49	12	22
25	7	62	36	26	8	61	35
54	44	17	15	53	43	18	16

1-e : $16A + 4B' + C + \mathbf{1}$

1	47	26	56	2	48	25	55
30	52	5	43	29	51	6	44
39	9	64	18	40	10	63	17
60	22	35	13	59	21	36	14
3	45	28	54	4	46	27	53
32	50	7	41	31	49	8	42
37	11	62	20	38	12	61	19
58	24	33	15	57	23	34	16

1-f : $16A + 4B + C' + \mathbf{1}$

1	46	23	60	3	48	21	58
31	52	9	38	29	50	11	40
42	5	64	19	44	7	62	17
56	27	34	13	54	25	36	15
2	45	24	59	4	47	22	57
32	51	10	37	30	49	12	39
41	6	63	20	43	8	61	18
55	28	33	14	53	26	35	16

相結かつ点対称な完全 8 方陣の同一視　相結かつ点対称な完全 8 方陣の同一視 (同値関係) に関して、どのように定義すべきかについて考察しよう。

魔方陣の行の置換および列の置換の合成による変換で、この変換を施しても相結かつ点対称であるという性質を保つものの全体 K は、相結かつ点対称な完全 8 方陣全体の上の変換群になる。2 つの相結かつ点対称な完全 8 方陣について、一方に上のような変換を施せば他方と魔方陣として同一視できる場合、この 2 つの完全方陣は相結かつ点対称な完全 8 方陣として同一視されると定義しよう。

行の置換で K に属するものの全体を K_1、列の置換で K に属するものの全体を K_2 とする。K は K_1 と K_2 の直積 $K = K_1 \times K_2$ であり、K_1 と K_2 を 8 文字の集合 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ の上の置換群と見れば、$K_1 = K_2$ である。

補題 4　置換群 K_1, K_2 は次の置換

$$(13)(68),\ (24)(57),\ (35)(46),\ (15)(48),\ (26)(37),\ (17)(28),\ (18)(27)(36)(45)$$

によって生成される位数 48 の群である。

[証明]　列の置換のみについて考察し、置換群 K_2 を決定しよう。相結性に関する補題１の３番目の性質を使うと、奇数番目の列どうし又は偶数番目の列どうしの置換であれば、相結であるという性質を保つことが分かる。さらに奇数番目の列と偶数番目の列を一斉に入れ替える置換も相結であるという性質を保つことが分かる。このような置換の合成の中で点対称であるという性質を保つものを拾い出すことが当面の課題になる。例えば、次の置換

$$(13)(68),\quad (24)(57),\quad (35)(46),\quad (15)(48),\quad (26)(37),\quad (17)(28)$$

は、相結かつ点対称であるという性質を保つものである。実は、４文字の集合 $\{1, 3, 5, 7\}$ の上の任意の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ i_1 & i_3 & i_5 & i_7 \end{pmatrix}$$

に対して、次の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ i_1 & i_3 & i_5 & i_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9-i_1 & 9-i_3 & 9-i_5 & 9-i_7 \end{pmatrix}$$

は、相結かつ点対称であるという性質を保つものである。奇数番目の列どうし又は偶数番目の列どうしの置換で、点対称であるという性質を保つ置換はすべてこのようにして得られる。このような置換は、先の置換

$$(13)(68),\quad (24)(57),\quad (35)(46),\quad (15)(48),\quad (26)(37),\quad (17)(28)$$

で生成されることが分かる。最後に、奇数番目の列と偶数番目の列を一斉に入れ替える置換で点対称であるという性質を保つものの例として

$$(18)(27)(36)(45)$$

などがある。この結果、

$$(13)(68),\ (24)(57),\ (35)(46),\ (15)(48),\ (26)(37),\ (17)(28),\ (18)(27)(36)(45)$$

が K_2 の生成元になることが分かる。さらに、$48 = 4! \times 2$ によって位数も分かる。　◇

定理４　相結かつ点対称な完全８方陣としての１つの同値類には 144 種の完全８方陣として互いに同値でない完全８方陣が含まれている。

[証明]　１つの相結かつ点対称な完全８方陣に群 K の変換を施して得られる完全８方陣の中で、完全８方陣として同一視されるものを識別することが

求められている。群 K の変換を施しても、各行各列の数の並びは順序を無視すれば変化していない。よって、群 K の変換でシフト変換または線対称変換を与えるものを求めよう。K_1 および K_2 に属する変換で、この性質を持つものは単位置換 (無変換) の他には

$$(18)(27)(36)(45),\quad (15)(26)(37)(48),\quad (14)(23)(58)(67)$$

のみである。この位数 4 の部分群を K_1 および K_2 の部分群と見る場合、それぞれ N_1, N_2 と書く。

ここで、$N = N_1 \times N_2$ と置く。N は K の部分群であり、最初に与えた相結かつ点対称な完全 8 方陣に、N による K の 1 つの右剰余類 Nx $(x \in K)$ に属する変換を施したものはすべて完全 8 方陣として同一視できるものであるが、互いに異なる右剰余類 Nx, Ny に属する変換を施したものは完全 8 方陣として同一視できないことが分かる。従って、相結かつ点対称な完全 8 方陣としての 1 つの同値類に含まれる、完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣の同値類の個数は、右剰余集合 K/N の要素の個数に一致する。K は位数 48×48 であり N は位数 4×4 だから、K/N の要素の個数は 144 である。
◇

例 8　相結かつ点対称な完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣を例示しておこう。群 K の変換を施しても、各行各列の数の並びは順序を無視すれば変化しないので、例示したものは互いに同値でないことが分かる。例示したものは、いずれも **2-a** の完全 8 方陣を 4 進分解表示したものを $16A + 4B + C + \mathbf{1}$ として、第 1 の変換 (直交 3 対の置換) によって得られるものである。

2-a

1	62	19	48	35	32	49	14
63	4	45	18	29	34	15	52
6	57	24	43	40	27	54	9
60	7	42	21	26	37	12	55
10	53	28	39	44	23	58	5
56	11	38	25	22	41	8	59
13	50	31	36	47	20	61	2
51	16	33	30	17	46	3	64

2-c : $16A + 4C + B + \mathbf{1}$

1	56	25	48	41	32	49	8
60	13	36	21	20	37	12	61
6	51	30	43	46	27	54	3
63	10	39	18	23	34	15	58
7	50	31	42	47	26	55	2
62	11	38	19	22	35	14	59
4	53	28	45	44	29	52	5
57	16	33	24	17	40	9	64

2-d : $16B + 4A + C + \mathbf{1}$

1	62	7	60	11	56	13	50
63	4	57	6	53	10	51	16
18	45	24	43	28	39	30	33
48	19	42	21	38	25	36	31
34	29	40	27	44	23	46	17
32	35	26	37	22	41	20	47
49	14	55	12	59	8	61	2
15	52	9	54	5	58	3	64

2-e : $16B + 4C + A + \mathbf{1}$

1	56	10	63	11	62	4	53
60	13	51	6	50	7	57	16
21	36	30	43	31	42	24	33
48	25	39	18	38	19	45	28
37	20	46	27	47	26	40	17
32	41	23	34	22	35	29	44
49	8	58	15	53	14	52	5
12	61	3	54	2	55	9	64

2-f : $16C + 4A + B + \mathbf{1}$

1	32	37	60	41	56	13	20
48	49	12	21	8	25	36	61
18	15	54	43	58	39	30	3
63	34	27	6	23	10	51	46
19	14	55	42	59	38	31	2
62	35	26	7	22	11	50	47
4	29	40	57	44	53	16	17
45	52	9	24	5	28	33	64

2-g : $16C + 4B + A + \mathbf{1}$

1	32	34	63	35	62	4	29
48	49	15	18	14	19	45	52
21	12	54	43	55	42	24	9
60	37	27	6	26	7	57	40
25	8	58	39	59	38	28	5
56	41	23	10	22	11	53	44
13	20	46	51	47	50	16	17
36	61	3	30	2	31	33	64

相結かつ線対称な完全 8 方陣の同一視　相結かつ線対称な完全 8 方陣の同一視 (同値関係) に関して、どのように定義すべきかについて考察しよう。議論を簡単にするため、左右線対称である場合に限って考察する。

魔方陣の行の置換および列の置換の合成による変換で、この変換を施しても相結かつ左右線対称であるという性質を保つものの全体 L は、相結かつ左右線対称な完全 8 方陣全体の上の変換群になる。2 つの相結かつ左右線対称な完全 8 方陣について、一方に上のような変換を施せば他方と魔方陣として同一視できる場合、この 2 つの完全方陣は相結かつ左右線対称な完全 8 方陣として同一視されると定義しよう。

行の置換で L に属するものの全体を L_1、列の置換で L に属するものの全体を L_2 とする。L は L_1 と L_2 の直積 $L = L_1 \times L_2$ である。L_1 と L_2 を 8 文字の集合 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ の上の置換群と見る。

補題 5　置換群 L_1 は次の置換

$$(13),\ (15),\ (17),\ (24),\ (26),\ (28),\ (18)(27)(36)(45)$$

によって生成される位数 1,152 の群であり、置換群 L_2 は次の置換

$$(13)(68),\ (24)(57),\ (35)(46),\ (15)(48),\ (26)(37),\ (17)(28),\ (18)(27)(36)(45)$$

によって生成される位数 48 の群である。

[証明]　まず、列の置換について考察し、置換群 L_2 を決定しよう。相結性に関する補題 1 の 3 番目と 2 番目の性質を使うと、奇数番目の列どうし又は偶数番目の列どうしの置換であれば、相結であるという性質を保ち、完全方陣であるという性質も保たれることが分かる。さらに奇数番目の列と偶数番目の列を一斉に入れ替える置換も相結であるという性質を保つことが分かる。特に、完全 8 方陣であるという性質を保つものの例として

$$(18)(27)(36)(45)$$

などがある。このような置換の合成の中で左右線対称であるという性質を保つものを拾い出すことが当面の課題になる。実は、若干の考察により、$L_2 = K_2$ であることが分かる。

次に、行の置換について考察し、置換群 L_1 を決定しよう。行の置換は左右線対称であるという性質を保つので、相結な完全 8 方陣であるという性質を保つものの全体が、置換群 L_1 になる。若干の考察により、

$$(13),\ (15),\ (17),\ (24),\ (26),\ (28),\ (18)(27)(36)(45)$$

が L_1 の生成元になることが分かる。

さらに、$1,152 = 4! \times 4! \times 2$ によって位数も分かる。　◇

定理 5　相結かつ線対称な完全 8 方陣としての 1 つの同値類には 864 種の完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣が含まれている。

[証明]　1 つの相結かつ線対称な完全 8 方陣に群 L の変換を施して得られる完全 8 方陣の中で、完全 8 方陣として同一視されるものを識別することが求められている。群 L の変換を施しても、各行各列の数の並びは順序を無視すれば変化していない。よって、群 L の変換でシフト変換または線対称変換およびその合成を与えるものを求めよう。L_1 および L_2 に属する変換でこの性質を持つものの全体は、L_1 の中では

$$(12345678),\quad (18)(27)(36)(45)$$

で生成される位数 16 の部分群であり、これを N_1 と書き、L_2 の中では単位置換 (無変換) の他には

$$(18)(27)(36)(45),\ (15)(48)(26)(37),\ (14)(23)(58)(67)$$

のみであり、この部分群を N_2 と書く。

ここで、$N = N_1 \times N_2$ と置く。N は L の部分群であり、最初に与えた相結かつ線対称な完全 8 方陣に、N による L の 1 つの右剰余類 $Nx(x \in L)$ に属する変換を施したものはすべて完全 8 方陣として同一視できるものであるが、互いに異なる右剰余類 Nx, Ny に属する変換を施したものは完全 8 方陣として同一視できないことが分かる。従って、相結かつ線対称な完全 8 方陣としての 1 つの同値類に含まれる、完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣の同値類の個数は、右剰余類 L/N の要素の個数に一致する。L の位数は $1,152 \times 48$ であり、N の位数は 16×4 だから、L/N の要素の個数は 864 である。　◇

相結な完全 8 方陣の同一視　相結な完全 8 方陣の同一視 (同値関係) に関して、どのように定義すべきかについて考察しよう。

魔方陣の 行の置換および列の置換の合成による変換 で、この変換を施しても相結な完全 8 方陣であるという性質をたもつものの全体 J は、相結な完全 8 方陣全体の上の変換群になる。2 つの相結な完全 8 方陣について、一方に上のような変換を施せば他方と魔方陣として同一視できる場合、この 2 つの完全 8 方陣は 相結な完全 8 方陣として同一視される と定義しよう。

行の置換で J に属するものの全体を J_1、列の置換で J に属するものの全体を J_2 とする。J は J_1 と J_2 の直積 $J = J_1 \times J_2$ であり、J_1 と J_2 を 8 文字の集合 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ の上の置換群と見れば、$J_1 = J_2$ である。

補題 6　置換群 J_1, J_2 は次の置換

$$(13),\ (15),\ (17),\ (24),\ (26),\ (28),\ (18)(27)(36)(45)$$

によって生成される位数 1,152 の群である。

[**証明**]　列の置換のみについて考察し、置換群 J_2 を決定しよう。相結性に関する補題 1 の 3 番目の性質を使うと、奇数番目の列どうし又は偶数番目の列どうしの置換であれば、相結であるという性質を保つことが分かる。さらに奇数番目の列と偶数番目の列を一斉に入れ替える置換も相結であるという性質を保つことが分かる。さらに、相結性に関する補題 1 の 2 番目の性質によれば、奇数番目の列どうし又は偶数番目の列どうしの置換であれば、完全 8 方陣であるという性質が保たれることも分かる。また、奇数番目の列と偶数番目の列を一斉に入れ替える置換で、完全 8 方陣であるという性質を保つものの例として

$$(18)(27)(36)(45)$$

などがある。この結果、

$$(13),\ (15),\ (17),\ (24),\ (26),\ (28),\ (18)(27)(36)(45)$$

が J_2 の生成元になることが分かる。
さらに、$1,152 = 4! \times 4! \times 2$ によって位数も分かる。 ◇

定理 6 相結な完全 8 方陣としての 1 つの同値類には 5,184 種の完全 8 方陣として同値でない完全 8 方陣が含まれている。

[証明] 1 つの相結な完全 8 方陣に群 J の変換を施して得られる完全 8 方陣の中で、完全 8 方陣として同一視されるものを識別することが求められている。群 J の変換を施しても、各行各列の数の並びは順序を無視すれば変化していない。よって、群 J の変換でシフト変換、線対称変換およびその合成を与えるものを求めよう。J_1 および J_2 に属する変換でこの性質を持つものの全体は

$$(12345678), \quad (18)(27)(36)(45)$$

で生成される位数 16 の部分群になる。この位数 16 の部分群を J_1 および J_2 の部分群と見る場合、それぞれ N_1', N_2' と書く。
ここで、$N' = N_1' \times N_2'$ と置く。N' は J の部分群であり、最初に与えた相結な完全 8 方陣に、N' による J の 1 つの右剰余類 $N'x$ $(x \in J)$ に属する変換を施したものはすべて完全 8 方陣として同一視できるものであるが、互いに異なる右剰余類 $N'x, N'y$ に属する変換を施したものは完全 8 方陣として同一視できないことが分かる。従って、相結な完全 8 方陣としての 1 つの同値類に含まれる、完全 8 方陣として互いに同値でない完全 8 方陣の同値類の個数は、右剰余類 J/N' の要素の個数に一致する。J の位数は $1,152 \times 1,152$ であり、N' の位数は 16×16 だから、J/N' の要素の個数は 5,184 である。 ◇

おわりに

本稿において、群論的考察により特殊な完全 8 方陣の分類に関する若干の成果を得たのだが、このような特殊な完全 8 方陣の全体を分類することが、次の課題である。本稿において与えた同値関係の下で、完全 4 方陣集合型で相結な完全 8 方陣は 90 種類の同値類に分類され、相結かつ点対称な完全 8 方陣は 10 種類の同値類に分類されることが分かった。相結かつ線対称な完全 8 方陣については、同値類をすべて求める作業が未完成である。これらの詳細については整理の上、いずれ公表したい。

下記の参考文献 4 の第 3 部，第 6 章 において、本論文における用語とは異なる概念を用いて、完全 4 方陣集合型で相結な完全方陣と 1:1 に対応する魔方陣についての記述があった。両者の関係について記述することは省略するが、文献 4 を紹介して下さった本論文の査読者に感謝する。

References

[1] 大森清美：新編「魔方陣」冨山房,1992 年
ISBN 4-572-00696-2

[2] 山本行雄：数の不思議・数のたのしみ　ナカニシヤ出版,2000 年
ISBN 4-88848-506-2

[3] PAS：魔方陣の世界へようこそ，2002.9.9. 閲覧[1]
http://members.jcom.home.ne.jp/mahojin/

[4] 摂田寛二：魔方陣の研究，　2003.9.17. 閲覧
http://homepage2.nifty.com/KanjiSetsuda/

[1] internet 情報は日々更新されるので、閲覧日を記載した。