A note on a billiard system on the plain

Akio Inoue *　　Kiyotaka Ii †

あるビリヤード力学系の積分可能性について

井上　彰夫　　井伊　清隆

山形大学紀要（自然科学）第17巻第２号別刷
平成23年（2011）２月

Bull. of Yamagata Univ., Nat Sci., Vol.17, No. 2, Feb. 2011

A note on a billiard system on the plain

Akio Inoue * Kiyotaka Ii †

あるビリヤード力学系の積分可能性について

井上彰夫 井伊清隆

(Received Novenver 26, 2010)

Abstract

We answer the question whether a billiard system is a new integrable system or not. This question is posed by H. J. Korsch, H.-J. Jodl, and T. Hartmann in [1],[2]. The answer is "NO", that is, the billiard system is nothing but an elliptic billiard system, which is well-known to be integrable.

1 はじめに

H. J. Korsch, H.-J. Jodl, T. Hartmann は彼らの著書：

Chaos, a Program Collection for the PC, [1, pp.65–66], [2, p.64]

の中で，あるビリヤード力学系 ($a = 0.5$) が新しい（＝今まで知られていなかった）完全積分可能な力学系であるのではないかとの問を発している（下記英文参照）.

A new Integrable Billiard? Investigating the Poincaré map for a billiard with boundary curve

$$r(\varphi) = \frac{\cos\varphi + \sqrt{a(5\cos^2\varphi + 3)}}{1 + \cos^2\varphi} \qquad (*)$$

one finds phase space plots showing typical mixed regular and chaotic behavior. For the particular case of $a = 0.5$, however, the phase space seems to be filled by regular orbits only. Is the billiard integrable in this case? Is this a new case of integrability?

次の定理はこの問に対する解答である.

定理 $a = 0.5$ のとき，$(*)$ で与えられる曲線は楕円に他ならない．したがって，$a = 0.5$ に対応するビリヤード力学系は完全積分可能であるが，新しい完全積分可能な力学系ではない.

以下では，§ 2 においてこのような問が発生した状況を説明し，§ 3 において上記の定理を証明する.

2 あるビリヤード力学系

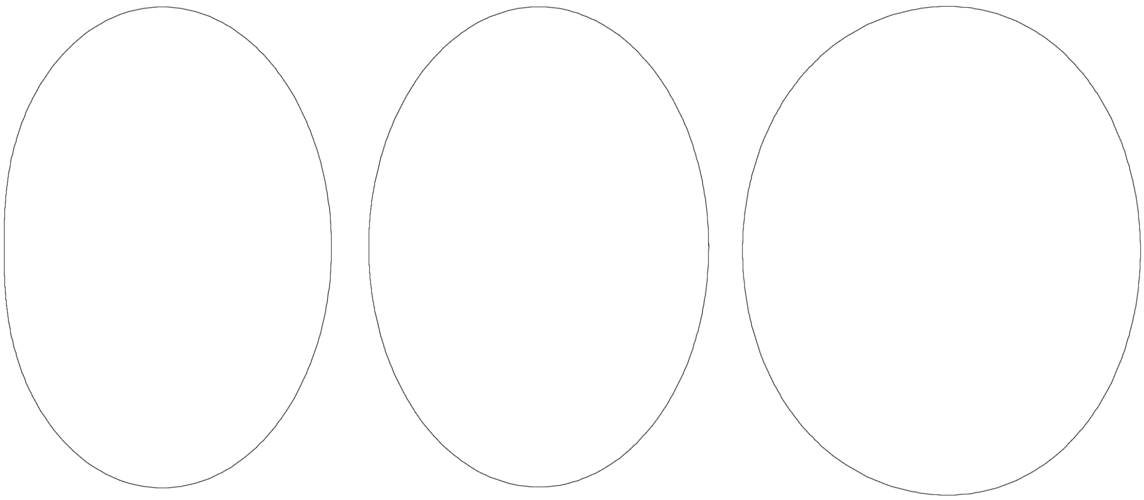
極座標表示で

$$r(\varphi) = \frac{\cos\varphi + \sqrt{a(5\cos^2\varphi + 3)}}{1 + \cos^2\varphi} \qquad (*)$$

で与えられる閉曲線を考える．ここに，a は $a > \frac{1}{8}$ を満たす定数とする．このとき，$r(\varphi) > 0$ である.

* Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Yamagata University
† Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Yamagata University

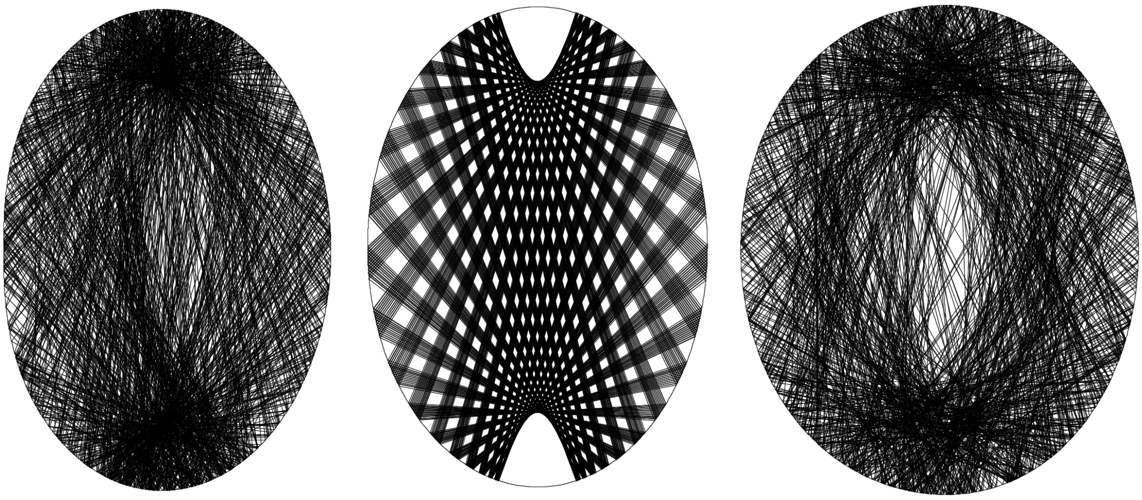
$a = 0.5$ に対応する曲線を境界線とするビリヤード力学系と $a \neq 0.5$ に対応する曲線を境界線とするビリヤード力学系を比較する．以下では $a = 0.35$ と $a = 30$ の場合を $a \neq 0.5$ の場合の代表例として考察する．$a = 0.35$，0.5，30 の各値に対応する曲線を図 1 に示す．



a=0.35 a=0.5 a=30

図 1

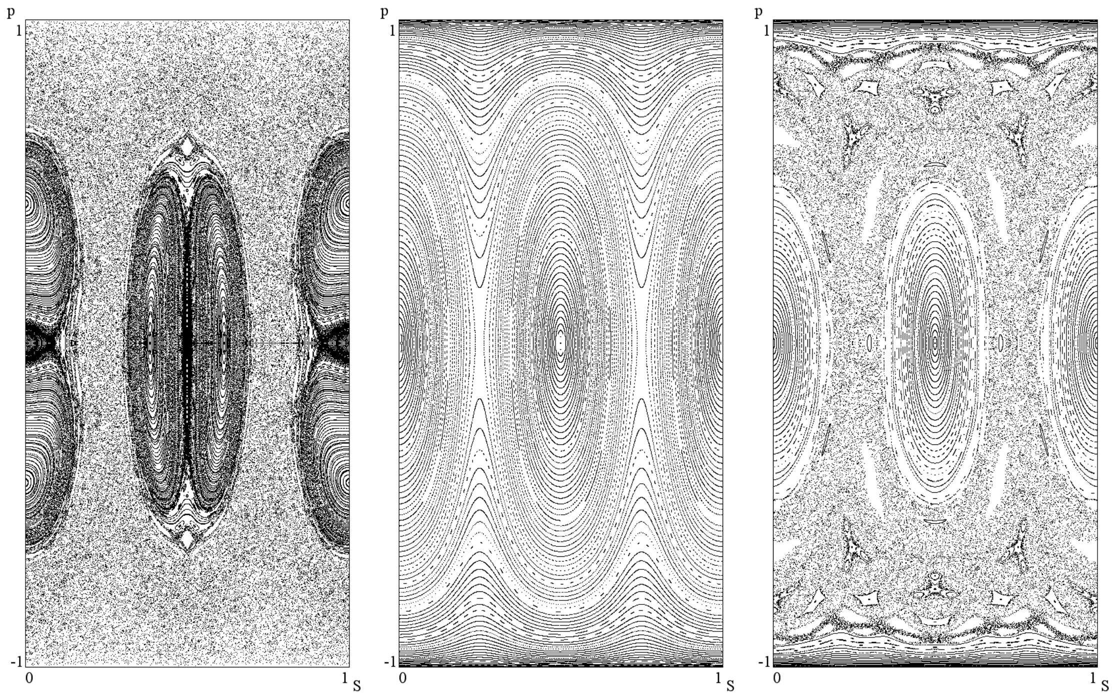
上記 3 個の曲線おのおのについてその曲線を境界とするビリヤード力学系を考える．図 2 は，それぞれの曲線上の，$\varphi = \pi$ に対応する点から $43.52°$ の方向に発射したビリヤードボールが境界の曲線に 1000 回衝突するまでの軌道を表す．



a=0.35 a=0.5 a=30

図 2

図 3 は上記 3 種のビリヤード力学系それぞれについて初期条件をいろいろ取り替えた多数の軌道のポアンカレ断面を描いたものである．



a=0.35　　a=0.5　　a=30

図 3

$a = 0.35,\ 30$ のときと $a = 0.5$ のときとでは様子が異なっている．一般に, $a \neq 0.5$ のときと $a = 0.5$ のときとでも様子が異なっている．$a \neq 0.5$ のときには正則な軌道とカオス的な軌道が混在した典型的な力学系の様相を呈する．しかし，$a = 0.5$ のときは軌道の様子やポアンカレ断面の様子からは完全積分可能な力学系であるように見える．

3　定理の証明

ここでは冒頭の定理の証明を与える．

証明　$(*)$ より

$$r(\varphi)(1+\cos^2\varphi) = \cos\varphi + \sqrt{a(5\cos^2\varphi+3)}$$

この式の両辺に $r(\varphi)$ をかける．

$$\{r(\varphi)\}^2(1+\cos^2\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi + \sqrt{a\{r(\varphi)\}^2(5\cos^2\varphi+3)}$$

ここで極座標表示を直交座標表示に直す．$r^2 = x^2+y^2$, $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$ であるから

$$x^2+y^2+x^2 = x + \sqrt{a\{5x^2+3(x^2+y^2)\}}$$

$$2x^2+y^2-x = \sqrt{a(8x^2+3y^2)}$$

$$(2x^2+y^2-x)^2 = a(8x^2+3y^2)$$

ここで $a = 0.5$ とおくと

$$(2x^2 + y^2 - x)^2 = 4x^2 + \frac{3}{2}y^2$$

これより

$$(2x^2 + y^2)(4x^2 + 2y^2 - 4x - 3) = 0$$

を得る． $2x^2 + y^2 \neq 0$ であるから

$$4x^2 + 2y^2 - 4x - 3 = 0$$

よって

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

となり，これは楕円の方程式である．すなわち $a = 0.5$ のとき $(*)$ の表す曲線は楕円に他ならない．したがって，$a = 0.5$ に対応するビリヤード力学系は完全積分可能であるが, 新しい完全積分可能な力学系ではない．

（証明終）

参考文献

[1] H. J. Korsch, H.-J. Jodl, *Chaos, A Program Collection for the PC*, Second revised and enlarged edition, Springer (1994)

[2] H. J. Korsch, H.-J. Jodl, and T. Hartmann, *Chaos, A Program Collection for the PC*, Third revised and enlarged edition, Springer (2008)