

# 制御理論を用いた在庫管理モデルの一解析

## ーリードタイムが変動する場合\*

西 平 直 史

### 1 はじめに

経営の分野において在庫管理は避けては通れない問題であり、これまで多数の研究がなされてきた。そのうち、制御理論を用いて在庫管理を解析または設計する方法が提案されている [1, 2, 3, 4]。これらの方法は、在庫管理モデルをむだ時間を持つ動的システムとして定式化し、むだ時間システムに対する制御理論の結果を援用することで解析や設計を行っている。

ところで、在庫管理には一般的にリードタイムが存在しこのリードタイムがモデルの取り扱いを困難にしている。リードタイムとは、簡単に言うと生産活動に要する時間や輸送に要する時間などの合計であり、供給が必要になった時点と実際に供給が行われる時点との差である。参考文献 [1] では古典制御理論を用いて解析しているため、リードタイムは定数なものでなければならないし、参考文献 [2, 3, 4] では、現代制御理論を用いて解析しているためリードタイムが変動するものに拡張することができるが、その変動が事前にわかる必要があるというような制約があった。実際の在庫管理モデルにおいては、リードタイムは変動するものであるしその変動の要因が機械の故障や交通渋滞などによる場合、事前にはわからない。

そこで、本稿ではリードタイムが変動する場合の在庫管理モデルを対象として、その内部安定性を解析する。リードタイムの変動については、その変動を関数として表現する必要はなく、変動の上界と下界のみがわかれば良いものとする。<sup>1</sup> まず、リードタイムが1から3まで変動する場合を考え、切り替えシステムとして定式化を行う。次に、システムを一般化し、切り替えシステムの内部安定性の解析を同時安定化の手法を用いて行う。最後に、シミュレーションにより提案手法の有効性と課題を確認する。

### 2 問題の定式化

本稿では、参考文献 [2] と同じ在庫管理モデルを考える。

$$x(k+1) = x(k) + w(k) - d(k) \quad (1)$$

\*2014年12月1日受理

<sup>1</sup>ここでは、上界と下界がわかる状況を考えることになる。変動の上界と下界が事前にわからなくても余裕をもって設定することによってこの手法を活用できる。ただし、上界と下界の設定に余裕がありすぎると条件は保守的なものになる。

ここで、 $x(k)$  は時刻  $k$  における在庫量、 $w(k)$  は入庫量、 $d(k)$  は出庫量である。発注してから実際に入庫するまでにかかる時間をリードタイムと呼び、これを  $L$  で表すと、時刻  $k$  での発注量  $u(k)$  と実際に入庫量の関係は

$$w(k) = u(k - L) \quad (2)$$

が成り立つ。(2) 式を (1) 式に適用した在庫管理モデル

$$x(k + 1) = x(k) + u(k - L) - d(k) \quad (3)$$

を本稿では対象として考察する。<sup>2</sup>

このモデルに対して、参考文献 [2] と同じようにメモリーレスフィードバック

$$u(k) = Kx(k) \quad (4)$$

を施すことを考えてみよう。この (4) 式は現在の在庫量の定数倍を発注することに相当する。これによりできた閉ループ系は

$$x(k + 1) = x(k) + Kx(k - L) - d(k) \quad (5)$$

となる。

本稿では、参考文献 [2] と違いリードタイム  $L$  が変動する場合を考える。 $L$  の下界を  $L_m > 0$  とし、上界を  $L_M$  とする。つまり、 $0 < L_m \leq L \leq L_M$  が成り立つものとする。ここで、 $L$  については下界と上界がわかっているものだけ仮定している。すなわち、 $L$  の挙動がすべてわかっていなくても良い状況を考えている。現実のシステムにおいてリードタイムの変動は事前にわからない要素が原因となることが多く、実際的な設定である。

さて、以下ではシステム (5) の内部安定性を考えるため、内部安定性に影響を与えない外生信号  $d(k) = 0$  としておく。問題の定式化を一般化する前に、 $L_m = 1, L_M = 3$  の場合を考えてみよう。 $L = 1$  のとき、

$$x(k + 1) = x(k) + Kx(k - 1) \quad (6)$$

となり、これを拡大系を使って表すと

$$\begin{bmatrix} x(k + 1) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k - 1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。同様に  $L = 2, 3$  のときは

$$\begin{bmatrix} x(k + 1) \\ x(k) \\ x(k - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & K \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k - 1) \\ x(k - 2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} x(k + 1) \\ x(k) \\ x(k - 1) \\ x(k - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & K \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k - 1) \\ x(k - 2) \\ x(k - 3) \end{bmatrix} \quad (9)$$

<sup>2</sup>ここでは平衡点を  $x(k) = 0$  としているため、在庫数が負の値をとるように見えるが、システム (3) は線形システムであるため平衡点が 0 ではなくても適当な変数変換を行うことで平衡点が 0 のシステムとして表すことができる。したがって、安全在庫を見込んでその在庫数を平衡点としておけば非負制約を置かなくても一般性を失うことがないことに注意しておく。

が得られる. (7) 式から (9) 式はシステムの次数が異なるため取扱いが困難に見えるが, 以下のように  $L_M = 3$  のときの次数にあわせることができる.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(x) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ x(k-3) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & K & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(x) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ x(k-3) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & K \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(x) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ x(k-3) \end{bmatrix} \quad (12)$$

すなわち, リードタイムが変動するときのシステムは (10) 式から (12) 式で表される切り替えシステムとして表現することができる.

この議論を一般化してみよう.  $L = i$  (ただし  $L_m \leq i \leq L_M$ ) の時,

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-i+1) \\ x(k-i) \\ x(k-i-1) \\ \vdots \\ x(k-L_M) \end{bmatrix}$$

とおくと, システム (5) は

$$\xi(k+1) = A_i \xi(k) \quad (i = L_m \cdots L_M) \quad (13)$$

と表すことができる. ただし,

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & K & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

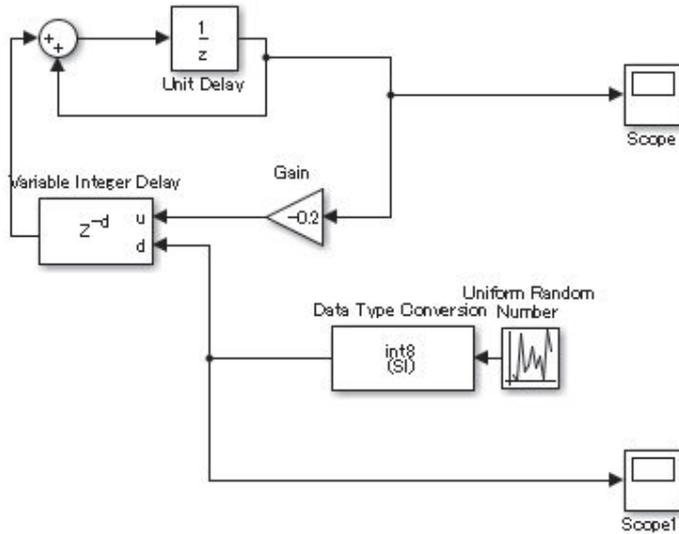


図 1: シミュレーションで用いたブロック図

### 3 解析とシミュレーションによる検討

本節では、システム (13) の内部安定性の解析を行う。システム (13) は切り替えシステムであるが、ここではリードタイムの変動は事前にわからないため切り替え則はわからない。それで、同時安定化 [5] の考え方で安定性を解析する。すなわち、(13) 式の全ての  $i$  において共通の Lyapunov 関数による安定解析を行う。

離散時間システムの安定性問題に関する定理 [6] を使うと次の結果が導かれる。

定理 与えられた  $K$  に対して、以下の線形行列不等式 (以下、LMI と呼ぶ) を満たす正定対称行列  $P$  が存在するならば切り替えシステム (13) は内部安定である。

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (14)$$

証明は参考文献 [5, 6] から自明であるので省略する。

さて、切り替えシステムの安定性については参考文献 [7, 8] で条件が導出されている。参考文献 [7] では  $A_i$  に交換則が仮定されているし、参考文献 [8] では同時上三角化可能なものに限られている。本稿で対象としているシステムはこれらの仮定を満たさないため同時安定化の手法によって安定解析を行った。

次に、この結果をシミュレーションで検討してみよう。シミュレーションは Matlab のシミュレーション環境である simulink を用いて実施した。図 1 にシミュレーションで用いたブロック図を示した。リードタイムを表現するために図 1 の "Variable Integer Delay" を用いたが、リードタイムがランダムに決まるように乱数を発生させ、それを 1 から 3 の整数になるようにしている。実際に発生させた乱数を図 2 に示した。以下に示すシミュレ-

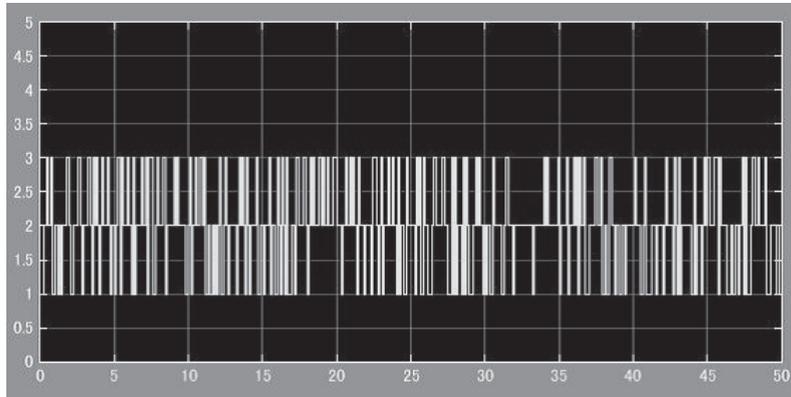


図 2: シミュレーションで用いた乱数 (Scpoel)

シミュレーションはいずれも図2の同じ乱数を用いている。<sup>3</sup> また、初期値は5としてシミュレーションを実施した。

まず、 $K = -1$  の場合のシミュレーション結果を図3に示す。 $K = -1$  は理想在庫からのずれを発注数にする状況で、サプライチェーンマネジメントにおけるいわゆるプッシュ方式に相当する。<sup>4</sup> この時、在庫は $-5$ から $5$ の範囲で変動している。実際、(14)式のLMIは同時に解くことはできず、3つのLMIを別々に解いても可解ではない。したがって、この場合リードタイムが1から3のどの長さになっても内部安定ではなく、切り替えシステム全体として内部安定性が失われていると言える。また、この状況で外生信号すなわち在庫 $w(k)$ が発生するとシステムの状態が平衡点 $(x(k) = 0)$ に収束していくことは難しいと言える。

次に、 $K = -0.2$  の場合のシミュレーション結果を図4に示す。 $K = -0.2$  のとき、(14)式のLMIは可解で、MatlabのRobust Control Toolboxのfeasp (LMIを解く関数)を用いると

$$P = \begin{bmatrix} 1.7034 & -0.8918 & -0.3141 & -0.0859 \\ -0.8918 & 1.3909 & -0.2840 & -0.0701 \\ -0.3141 & -0.2840 & 0.8966 & -0.1522 \\ -0.0859 & -0.0701 & -0.1522 & 0.4598 \end{bmatrix} > 0$$

と求まる。この場合はシステム全体の同時安定性を保証できるためリードタイムが変動してもシステムの状態が平衡点に収束している様子が伺える。

<sup>3</sup>実際のシステムにおいては、遅延が同一の原因による場合には同じリードタイムの長さが数期間にわたって連続して起こる場合が多い。ここでは、リードタイムの変動は每期独立に一様分布に従うとしてシミュレーションを行っているが、リードタイムが一様分布に従わない場合にも同じ結果を得ることができる。

<sup>4</sup>ここでは、 $K = -1$  を考えているので在庫量の発注量が正の時の発注量が負になることになる。しかし、脚注2に示した通り、平衡点を安全在庫として設定しておけば発注量は設定した安全在庫数から余剰分を減じた発注量となるため、実際には正となることに注意しておく。なお、安全在庫を厳しく設定した場合には安全在庫数に発注数を加えて負になる場合もあり得る。このような場合には非負制約を考慮する必要がある、今後の課題である。

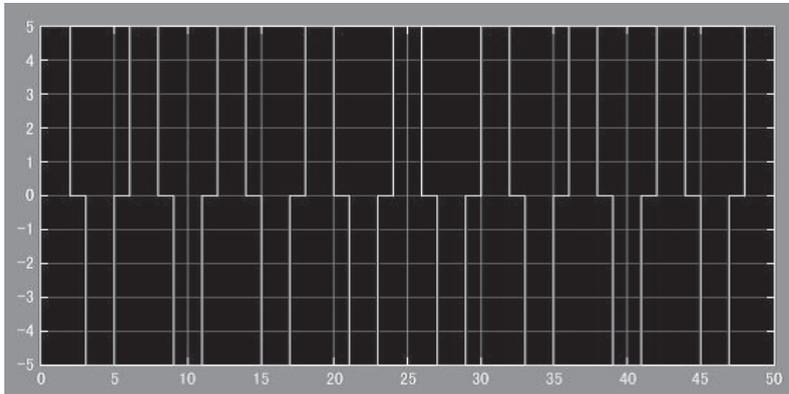


図 3:  $K = -1$  の場合のシミュレーション結果 (Scope)

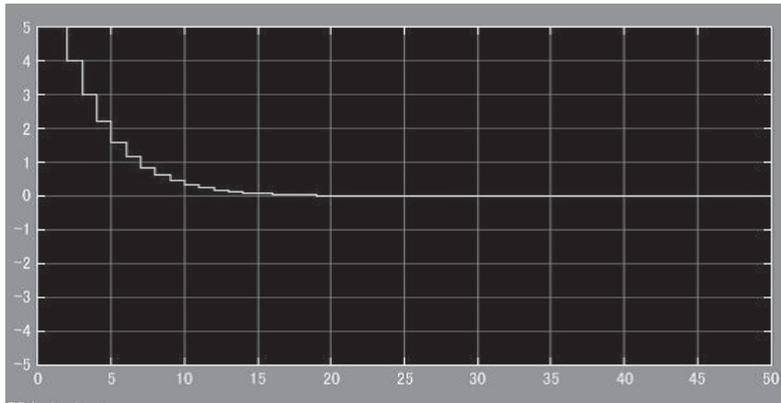


図 4:  $K = -0.2$  の場合のシミュレーション結果 (Scope)

最後に  $K = -0.5$  の場合のシミュレーション結果を図 5 に示す.  $K = -0.5$  の場合, (14) 式の LMI を満たす  $P$  は求まらない. そのため同時安定性は保証できない. しかし, 図 5 を見るとアンダーシュートは発生しているもののシステムの状態は平衡点に収束している. リードタイム別に安定性を確認すると,  $L = 1$  と  $L = 2$  は内部安定であり,  $L = 3$  の時のみ内部安定ではない. 参考文献 [8] に示されているように, 切り替えシステムは不安定なサブシステムが含まれていてもシステム全体としては安定になる場合があり, この場合はそのようなケースに含まれると考えられる. また, 同時安定化による安定条件は十分条件であり保守的なものであることも確認できた.

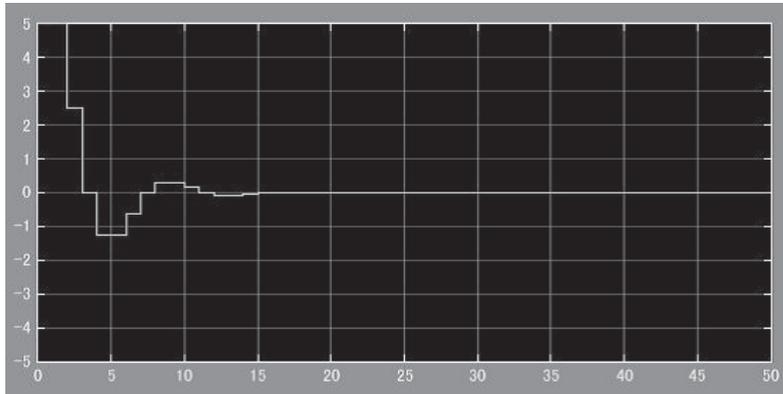


図 5:  $K = -0.5$  の場合のシミュレーション結果 (Scope)

#### 4 おわりに

本稿では、在庫管理モデルを対象としてリードタイムが変動する場合の内部安定性を同時安定化の観点から解析した。解析した結果は、リードタイムの変動の上界と下界の情報のみを必要としておりリードタイムの変動すべてがわからなくても良いもので、現実使いやすいものとなっている。また、シミュレーションによってこの手法の有効性を確認した。加えて、同時安定性が保証できない場合にも安定となる場合があり、この条件は保守的であることも示した。

今後の課題として、外生信号も含めたサーボ系を考えること、複数のシステムによるサプライチェーン全体を考えることがあげられる。また、非負制約を加えた場合の解析を行うこともあげられる。

#### 参考文献

- [1] 伊藤利昭・橋本芳宏・石原大司, 最適制御理論を用いたブルウィップ効果を防止する在庫補充方式の提案, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2006 年春季研究発表会, pp. 66-67 (2006)
- [2] 西平直史, サプライチェーンにおける Bullwhip 効果を抑制するための一手法—むだ時間システムとメモリーレスフィードバックを用いた解析—, 山形大学人文学部研究年報, 5, pp. 205-214 (2008)
- [3] 西平直史, むだ時間システムとしてとらえたサプライチェーンについての一考察—リードタイムが既知の場合—, 山形大学人文学部研究年報, 6, pp. 157-162 (2009)
- [4] 西平直史, サプライチェーンに対して構成したサーボ系の解釈とその応用, 山形大学大学院社会文化システム研究科紀要, 7, pp. 105-109 (2010)

- [5] 平田健太郎, ネットワーク化制御に関連した安定化問題の漸近的性質についての考察, システム制御情報学会論文誌, Vol. 23, No. 10, pp. 243-245 (2010)
- [6] 萩原朋道, デジタル制御入門, コロナ社, (1999)
- [7] G. Zhai, B. Hu, 安田一則, A. M. Michel, 離散時間切り替えシステムの安定性と  $L_2$  ゲイン解析, システム制御情報学会論文誌, Vol. 15, No. 3, pp. 117-125 (2002)
- [8] 藤澤大亮, 村松鋭一, 切り替えシステムの安定性—固有値よ動作時間による安定条件, システム制御情報学会論文誌, Vol. 15, No. 5, pp. 232-237 (2002)

**An Analysis of Inventory Management Models Using  
Control Theory**  
— a Case when the lead time is varied

Naofumi NISHIHIRA

This paper considers the problem of an analysis of inventory management models when the lead time is varied. We formulate the inventory management models as switching dynamical systems. We have shown that the stability of the entire switching systems can be reduced to simultaneously stability. Moreover, We confirmed the validity and limitations of the proposed method by some simulations.