

## 応力時効による軟鋼の強度制御

武 田 武 信

山形大学工学部機械システム工学科

### Strength Control of Mild Steel by Stress Aging

Takenobu TAKEDA

*Department of Mechanical Systems Engineering, Faculty of Engineering*

(平成18年9月4日受理)

#### Abstract

Tubular specimens of prestrained mild steel are aged under stress states along the Bauschinger curve, at various temperatures below 175°C. The reversed stress imposed on the specimen during aging is called here the aging stress. Reloading tests in the forward and reverse directions are carried out at room temperature, and the critical aging stress at which the yield stresses in the two reloading directions become equal is determined as a function of aging temperature and prestrain. The critical aging stress normalized by the prestress decreases with increasing aging temperature and then becomes constant at aging temperatures above 100°C. The aging index, i.e., the ratio of yield stress to prestress, rises with increasing aging temperature and approaches a saturation value at 150°C. When the specimens are aged at 150°C, the critical aging stress normalized by the prestress remains essentially constant independent of the amount of prestrain. Although the aging index is greater in the stress-aged steel than in the stress-relief annealed steel, the anisotropic yield surfaces of the two steels have similar forms. The results show that stress aging is an effective method for reducing the Bauschinger effect while preserving the hardening in the same direction as prestrain.

Key words: material testing, ferrous metal (Fe-C), deformation-load property, tension test, compression test, torsion test, stress aging, Bauschinger effect, multiaxial loading test, yield criterion

#### 1. 緒 言

一度塑性変形して加工硬化させた金属材料に、予変形と逆方向の負荷を加えると、予変形と同じ方向に負荷を加えた場合と比べて降伏応力や変形応力が低下する。いわゆるバウシニング効果が生じる。この効果は塑性異方性の原因<sup>1)</sup>のみならず、疲れ<sup>2)</sup>や塑性座屈<sup>3)</sup>に対して強度低下をもたらすので、材料を機械構造部材に適用する際には

除去しておく必要がある。

冷間加工材のバウシニング効果の除去法として、繰返し負荷を加える方法と熱処理を施す方法がある。前者の方法は手間がかかり、とくに工業的には困難であるので、通常後者の方法が用いられる。すなわち、鋼では約600°Cで応力除去焼なましが行われる。しかし、この方法では再結晶が起こるためバウシニング効果の除去と同時に加工硬化も低

下する。

従来，加工硬化の低下を防ぐには温間加工が有効であるといわれてきた<sup>4)</sup>．温間加工は250～300℃の温度域で変形することで，動的ひずみ時効による強度上昇とパウシング効果の軽減を図った加工熱処理であるが，加工温度が鋼の青熱ぜい性域にあたる．

以上の観点から，青熱ぜい性域より低い温度で加工熱処理を行うことで予変形による硬化を保持し，かつ予変形と逆方向の強度を上昇させることができれば強度設計が容易になり，効率的な材料の適用が可能となると考えられる．

本研究では，大気中で加熱しても有色の酸化皮が形成しない200℃以下の温度で応力時効を行い，冷間加工材のパウシング効果の除去を試みた．すなわち，時効温度と時効中の応力（以下，時効応力と呼ぶ）などの影響を調べ，予変形と同じ方向および逆方向の降伏応力が等しくなる応力時効条件を見出した．さらに，応力時効材と応力除去焼なまし材の多軸変形挙動を実験と異方性降伏関数の適用によって解析し，比較検討した．

## 2. 実験方法

### 2. 1 試験片および実験装置

素材は直径30mmの機械構造用鋼S20Cである．試験片は外径20mm，肉厚1mm，平行部長さ約40mmの円管で，製作後910℃1時間真空炉で完全焼なましを行ってから実験に供した．

実験装置は油圧駆動型の加熱炉付き多軸応力試験機で，円管試験片に軸荷重，内圧およびねじりを同時に加え得るものである．負荷の検出は軸荷重およびトルクをロードセルで，内圧を圧力変換器で行った．ひずみは引張り・圧縮やねじり試験のような単純な負荷試験では差動トランス型変位計を試験片に取り付けて測定し，多軸応力試験では3軸ロゼットゲージを用い，それぞれのひずみ

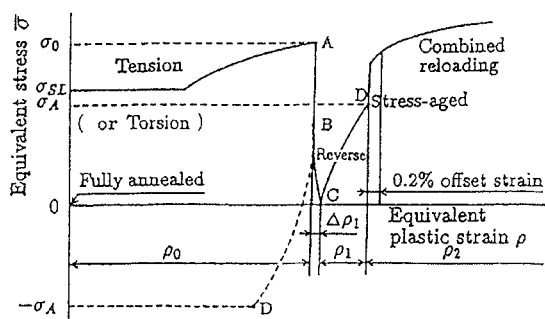


Fig. 1 Schematic illustration of equivalent stress-equivalent plastic strain curves.

ゲージを試験片軸に対して0°，45°および90°の角度に貼って測定した．

### 2. 2 応力時効

応力時効とは一定の機械的応力と熱を同時に加え，一定時間保持する加工熱処理のことである．Fig. 1にMises形の相当応力－相当塑性ひずみ曲線の模式図を示す．最初，試験片に予応力 $\sigma_0$ を加えてから除荷する．除荷途中のB点から塑性変形が始まるので，完全除荷状態における相当塑性ひずみ（累積塑性ひずみ）は $\rho_0 + \Delta\rho_1$ となる．ここで引張りひずみ材の場合， $\sigma_0 = 335\text{MPa}$ ， $\rho_0 + \Delta\rho_1 = 4.0 + 0.07 = 4.07\%$ であった．引き続きD点まで逆負荷を加え， $\sigma_A$ ＝一定の応力時効を行った．時効時間は1時間とした．曲線CDはいわゆるパウシング曲線で，D点は遷移軟化領域<sup>5)</sup>の範囲内にある．応力時効後室温まで自然冷却し，いったん除荷してから再負荷試験を行った．

予変形と同じ方向と逆方向の再負荷曲線および組合せ再負荷曲線において，鋭い降伏が現れる場合と現れない場合がある．鋭い降伏が現れた場合には下降伏点を，鋭い降伏点が現れない場合には0.2%耐力を降伏応力と定義する．そして，降伏応力を予応力で割った値を時効指数 $\lambda$ と呼ぶことにする．

## 3. 実験結果および考案

### 3. 1 引張り予ひずみ後応力時効した材料の引張り・圧縮挙動(時効温度と時効応力の影響)

引張りと圧縮の応力－ひずみ曲線から時効指数を求め，時効温度の関数としてFig. 2(a)，(b)に示す．引張りの時効指数は各 $\sigma_A/\sigma_0$ において，

† 第3章において，引張りひずみ後応力時効した材料は0.20%炭素鋼，ねじり予ひずみ後応力時効した材料は0.21%炭素鋼および応力除去焼なまし材は0.22%炭素鋼である．各材料とも同一ピレットから作られたものでないで化学成分が多少異なる．

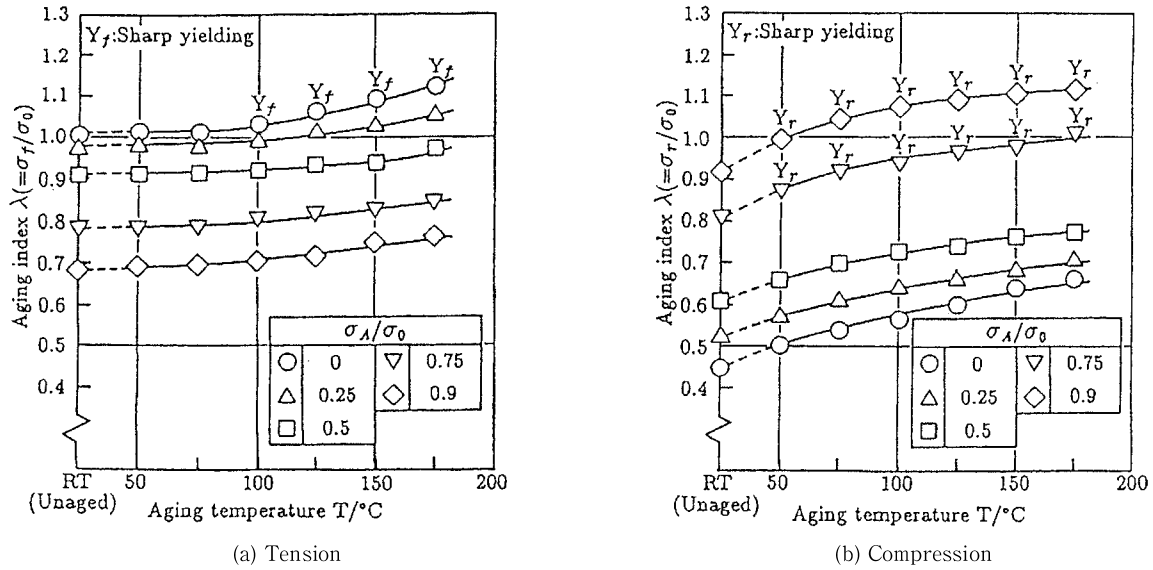


Fig. 2 Variation of aging index with aging temperature  
( $\sigma_A$ : Aging stress under compression,  $\sigma_0$ : Prestress in tension).

時効温度100℃以下では時効しないときの $\lambda$ 値とあまり変わらない．100℃以上になると時効指数が少し上昇する．しかしながら，静ひずみ時効( $\sigma_A / \sigma_0 = 0$ )によって鋭い降伏が再現したときに最も時効指数の上昇が顕著であり， $\sigma_A / \sigma_0 = 0.25 \sim 0.9$ の応力時効ではその上昇が小さい．

一方，Fig. 2(b)では圧縮の時効指数は時効温度が高くなるとかなり上昇する．そして $\sigma_A / \sigma_0 = 0.75$ 以上の応力時効では比較的低温度の50℃から鋭い降伏が再現する．Fig. 3に例として時効温度150℃の場合について時効応力に対する時効指

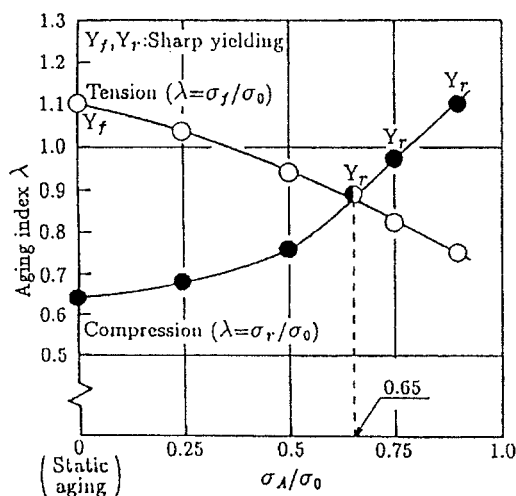


Fig. 3 Variation of aging index with aging stress  
(Aging temperature  $T = 150^\circ\text{C}$ ).

数の変化を示す． $\sigma_A / \sigma_0$ の増加とともに引張りの時効指数は下降し，圧縮の時効指数は上昇する．とくに $\sigma_A / \sigma_0 = 0.5$ から0.9の間では，引張りと圧縮の時効指数は $\sigma_A / \sigma_0$ に対してほぼ直線的に変化し，大きく時効応力に依存する．Fig. 3の横座標上に矢印で示した数値は引張りと圧縮の $\lambda - \sigma_A / \sigma_0$ 曲線が交わる点の $\sigma_A / \sigma_0$ 値である．Fig. 4に交点の $\sigma_A / \sigma_0$ 値と時効温度の関係を示す．交点の $\sigma_A / \sigma_0$ 値は時効温度が高くなると減少し，100℃以上では一定( $\sigma_A / \sigma_0 = 0.65$ )となる．この関係は引張りと圧縮の降伏応力が等しくなる応力時効条件を与えるもので，本研究で求めているパウシング効果の除去条件である．ただし，Fig.

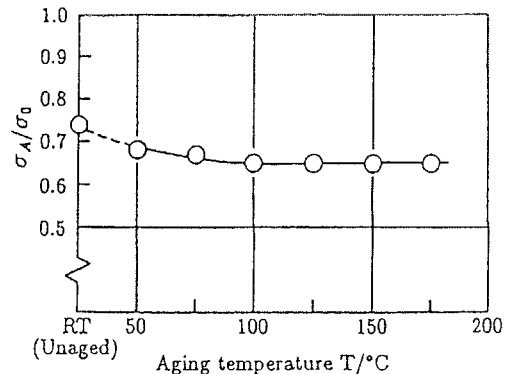


Fig. 4 Relation between aging stress and aging temperature giving the same yield stress in tension and compression.

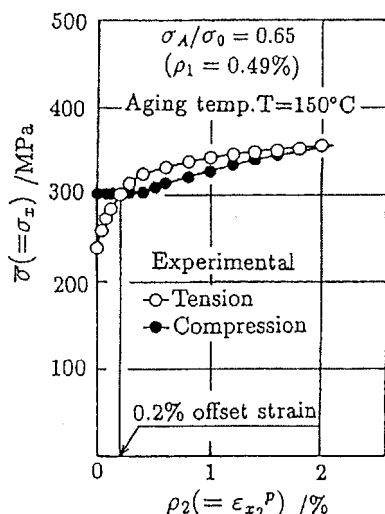


Fig. 5 True stress-true plastic strain curves in tension and compression.

5に示すように、鋭い降伏の再現に方向性があるので二つの応力-ひずみ曲線は完全に一致しない。

従って、本手法による応力時効は、正しく表現すればパウシング効果の部分的除去法と言うべきであろう。Fig. 6に引張および圧縮降伏応力が等しい条件下の時効指数と時効温度の関係を示す。このときの $\lambda$ 値は時効温度が高くなると上昇し、150°Cで $\lambda = 0.9$ となり飽和する。

結局、冷間加工材に予変形と逆方向の負荷下で応力時効を施すと、予応力に対して降伏応力の低下を10%に抑えながらパウシング効果を部分的に除去できることがわかった。

### 3. 2 応力時効材と応力除去焼なまし材の多軸変形挙動

本節において実験に供した応力時効材はFig. 5

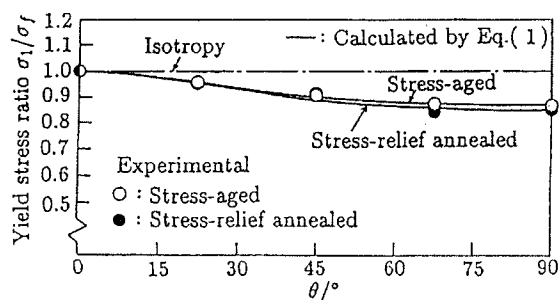


Fig. 7 Variation of yield stress with principal stress direction  $\theta$  (For stress-aged S20C Steel:  $\sigma_f = 301\text{MPa}$ ,  $\sigma_f/\sigma_0 = 0.90$ ; for stress-relief annealed S20C steel:  $\sigma_f = 314\text{MPa}$ ,  $\sigma_f/\sigma_0 = 0.82$ ).

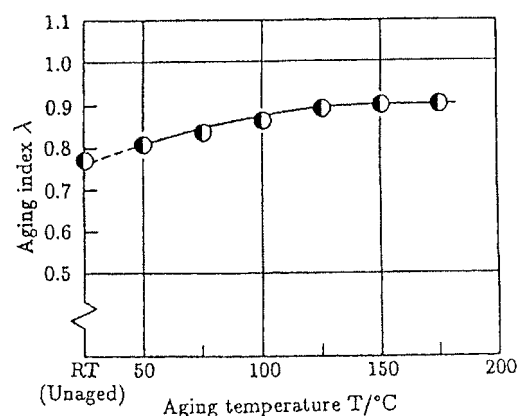


Fig. 6 Relation between aging index and aging temperature under stress aging condition for the same yield stress in tension and compression.

に示した引張り・圧縮挙動を呈する材料 ( $\lambda = 0.9$ ) である。一方、応力除去焼なまし材は引張予ひずみ後600°C30分加熱したものでパウシング効果は完全に除去されており、引張りと圧縮の時効指数は $\lambda = 0.82$ である。

応力比  $\sigma_x : \sigma_y : \tau_{xy} = 1 : \tan^2 \theta : \tan \theta$  (ここで  $\sigma_x$ : 軸応力,  $\sigma_y$ : 円周応力,  $\tau_{xy}$ : せん断応力) を保持して薄肉円管に負荷すると、主応力は  $\sigma_1 = \sigma_x (1 + \tan^2 \theta)$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  となる。すなわち、試験片軸と  $\theta$  だけ傾いた方向に  $\sigma_1$  で引張った場合と等価な応力状態を作り出すことができる。一般に、このような実験が円管に対しての最も精密な面内異方性の検証法であり、off-axis引張試験と呼ばれている<sup>6), 7)</sup>。Fig. 7に $\theta$ に対する降伏応力の変化を示す。ここで各主応力方向の降伏応力を単軸引張りの降伏応力で割り、無次元化して表している。応力時効材と応力除去焼なまし材の降伏応力は $\theta$ が大きくなると減少するような異方性を示すが、両材料の無次元化降伏応力の間にはほとんど相違がない。Fig. 8に主ひずみ増分方

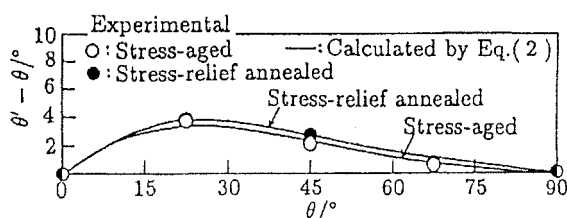


Fig. 8 Variation of principal strain increment direction  $\theta'$  with principal stress direction  $\theta$ .

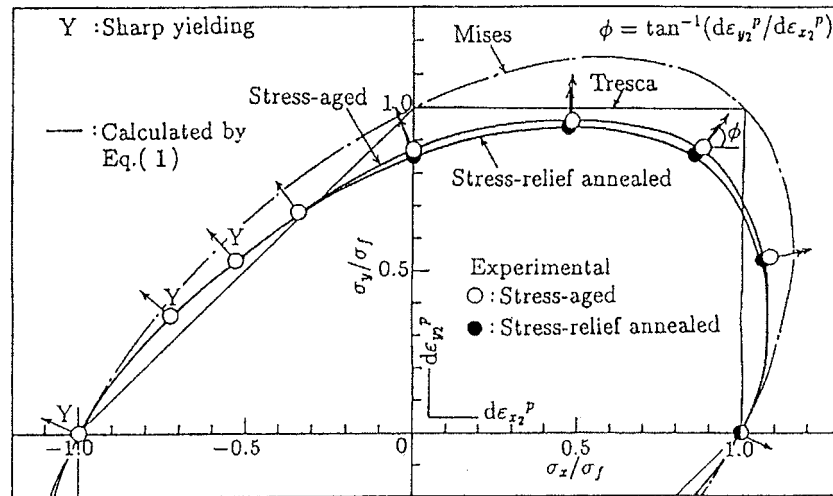


Fig. 9 Yield surfaces in  $\sigma_x$ - $\sigma_y$  plane (For stress-aged S20C Steel:  $\sigma_f=301\text{MPa}$  ; for stress-relief annealed S20C steel:  $\sigma_f=314\text{MPa}$ ).

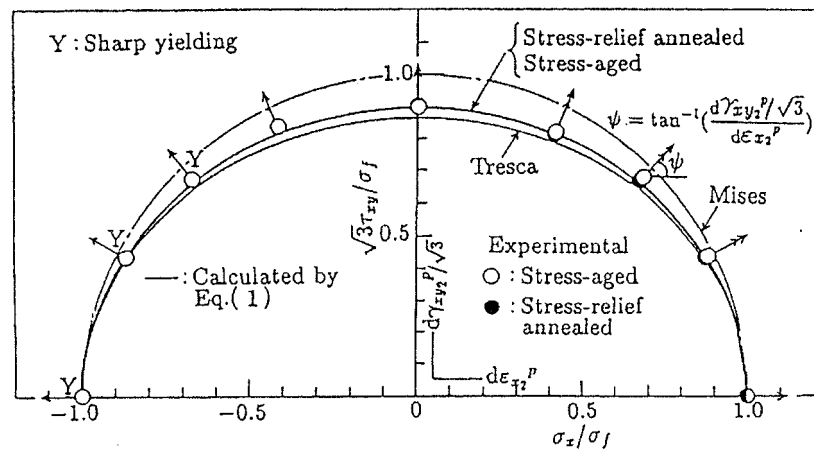


Fig. 10 Yield surfaces in  $\sigma_x$ - $\sqrt{3} \tau_{xy}$  plane (For stress-aged S20C Steel:  $\sigma_f=301\text{MPa}$  ; for stress-relief annealed S20C steel:  $\sigma_f=314\text{MPa}$ ).

Table 1 Parameter values in Eq. (1) used for numerical calculation.

Material	$C$	$A_{xxxy}(=A_{zzxx})$	$A_{yyzz}$	$A_{xyxy}$
Stress-aged	1.754	$-5.452 \times 10^{-2}$	$-5.080 \times 10^{-1}$	$2.726 \times 10^{-1}$
Stress-relief annealed	1.705	$-1.770 \times 10^{-1}$	-1.178	$6.298 \times 10^{-1}$

向  $\theta'$  と主応力方向  $\theta$  の関係を示す．主ひずみ増分方向は  $\theta' = (1/2) \tan^{-1} \{N/(1-M)\}$  で与えられる．ここで  $M$  および  $N$  は  $M = d\epsilon_{y2}^p/d\epsilon_{x2}^p$  ,  $N = d\gamma_{xy2}^p/d\epsilon_{x2}^p$  で定義される塑性ひずみ増分比で，塑性ひずみ経路上の  $\rho_2=0.2\%$  に対する点（応力時効材の場合）あるいは降伏点伸び終了点（応力除去焼なまし材の場合）における値である．縦軸を偏差  $\theta' - \theta$  で表すと，この偏差は最初  $\theta$  が大きくなるにつれて増加し， $\theta = 22.5^\circ$  で最大となり，その後減少する．Fig. 8 はひずみ挙動においても両材料の異方性が同程度であることを示している．

Fig. 9 に  $\sigma_y/\sigma_x$  = 一定の比例負荷試験から得られた降伏曲面を示す．この組合せ負荷によって応力主軸は回転しない．さらに  $\sigma_y/\sigma_x = 1$  の負荷は静水圧成分を無視すると半径方向の圧縮と等価な応力状態となる．両材料の降伏曲面を見ると，第1象限では引張応力成分が比較的大きい領域においてMisesとTrescaの曲面の中間に位置し，円周応力成分が大きくなるにつれてTrescaの曲面の内側に位置するようになる．そして応力時効材の無次元化降伏曲面の方が応力除去焼なまし材の曲面より若干外側にある．矢印は  $\phi = \tan^{-1} (d\epsilon_{y2}^p/d\epsilon_{x2}^p)$  に対応するひずみ増分ベクトルであり，降伏曲面に対してほとんど垂直となる．

Fig. 10 に  $\sigma_x - \sqrt{3}\tau_{xy}$  平面における降伏曲面を示す． $\sqrt{3}\tau_{xy}/\sigma_x$  = 一定の比例負荷試験を行った場合には応力比に依存して応力主軸が回転する．こ

の応力平面では応力時効材と応力除去焼なまし材の無次元化降伏曲面はほとんど一致する．すなわち，両材料の降伏曲面はMisesとTrescaの曲面の中間にあって，Trescaの曲面の近傍に位置する．矢印は  $\phi = \tan^{-1} \{ (d\gamma_{xy2}^p/\sqrt{3})/d\epsilon_{x2}^p \}$  に対応するひずみ増分ベクトルを示す．

著者<sup>8)</sup>はDrucker<sup>9)</sup>の六次降伏関数とHill<sup>10)</sup>の二次降伏関数を組合せた次の異方性降伏関数を提案した．

$$f = J_2^2 (J_2 + A_{ijkl} \sigma_{ij}' \sigma_{kl}') - C J_3^2 \quad (1)$$

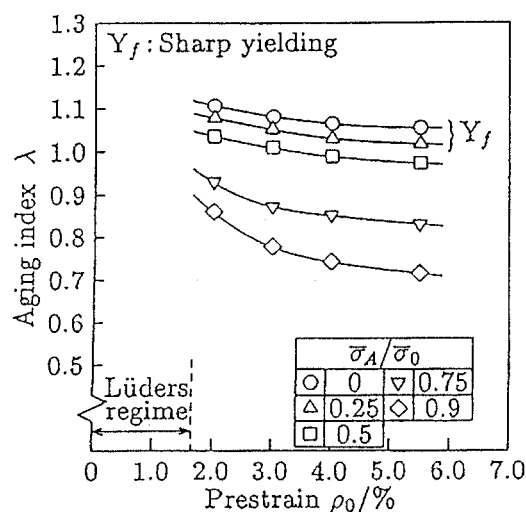
ここで， $J_2 = (1/2) \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'$  ,

$J_3 = (1/3) \sigma_{ij}' \sigma_{jk}' \sigma_{ki}'$  はそれぞれ偏差応力テンソル  $\sigma_{ij}'$  の第2，第3不変量である． $A_{ijkl}$  は異方性パラメータ， $C$  は  $J_3$  の影響を表すパラメータであり，両者の間に連成効果がないものと仮定する．応力時効材および応力除去焼なまし材とも軸対称異方性（横等方性）とみなして解析を行った．Table 1 に各パラメータの値を示す．塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  は式(1)の降伏関数を塑性ポテンシャルとして次の関連流動則から求めた．

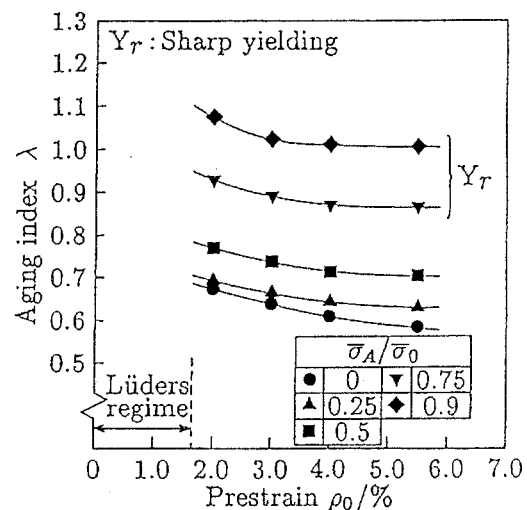
$$d\epsilon_{ij}^p = (\partial f / \partial \sigma_{ij}') d\lambda \quad (2)$$

ここで  $d\lambda$  はスカラー係数である．Fig. 7 からFig. 10に示した太い実線は式(1)，(2)の計算結果であり，全体的に両異方性材料の降伏・流動挙動をよく表しているものと思われる．

なお，パラメータの決定法と塑性ひずみ増分比  $M, N$  の計算式については付録で述べている．



(a) Forward torsion



(b) Reverse torsion

Fig. 11 Variation of aging index with prestrain.

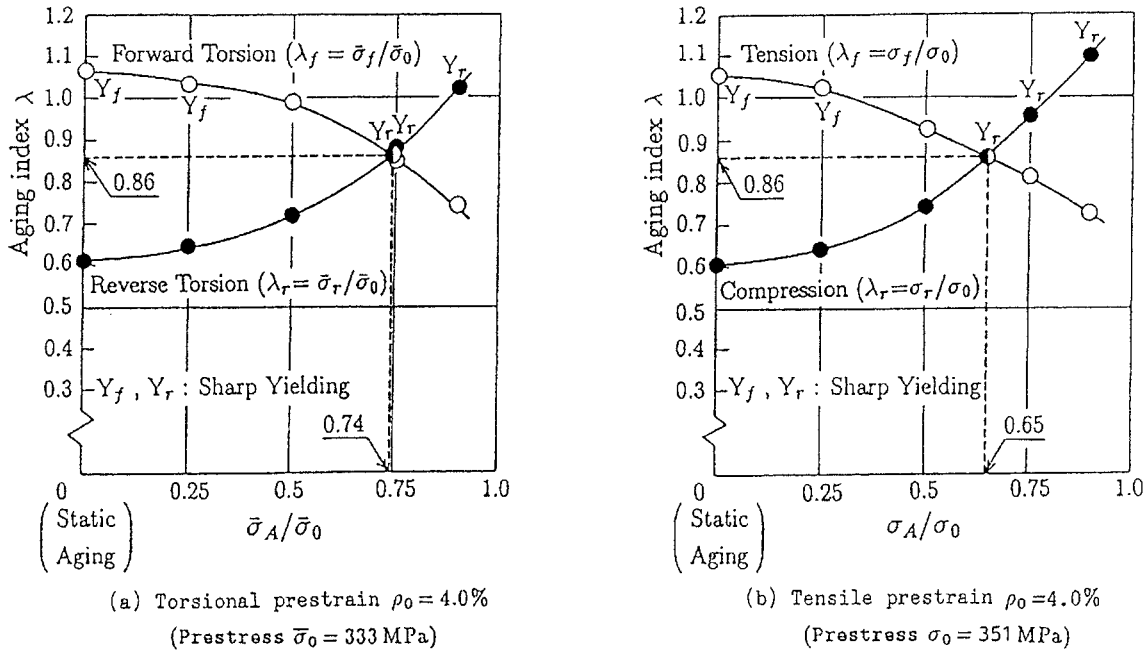


Fig. 12 Variation of aging index with aging stress for S20C steel stress-aged at 150°C.

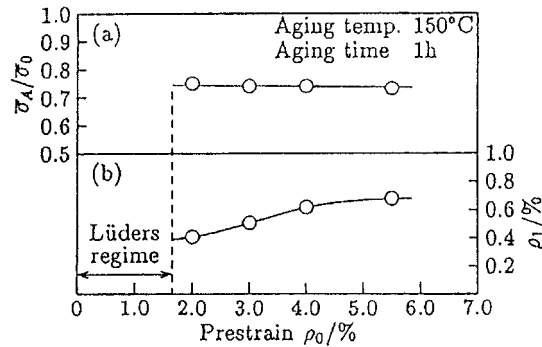


Fig. 13 Stress aging condition for the same yield stress in forward and reverse torsion

(a) Aging stress normalized by prestress vs. prestrain (b) Reverse strain corresponding to aging stress vs. prestrain.

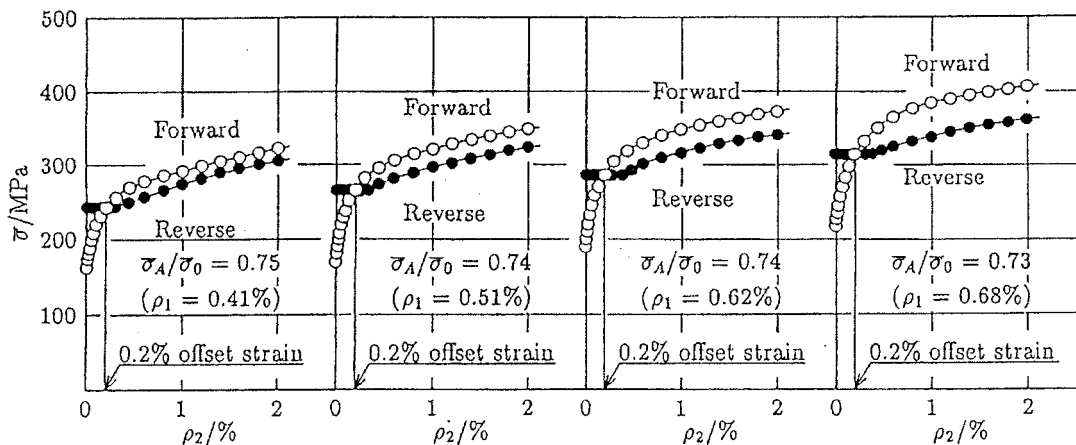


Fig. 14 Equivalent stress-equivalent plastic strain curves under stress aging condition for the same yield stress in forward and reverse torsion.

### 3. 3 ねじり予ひずみ後応力時効した材料の正ねじり・逆ねじり挙動(予ひずみの影響)

$\rho_0 (= \gamma_{xy0}^p / \sqrt{3}) = 2.0 \sim 5.5\%$  の間で4種類の大きさのねじり予ひずみを加えた材料を, それぞれ逆ねじりの負荷下で150℃ 1時間の応力時効を行った. 正ねじり・逆ねじりの応力 ひずみ曲線から時効指数を求め, 予ひずみの関数として Fig. 11(a), (b) に示す. 予ひずみが大きくなると正ねじりおよび逆ねじりの時効指数は下降する. この傾向は Fig. 11(a) では  $\bar{\sigma}_A / \bar{\sigma}_0 = 0.75$  と 0.9 のとき, Fig. 11(b) では  $\bar{\sigma}_A / \bar{\sigma}_0 = 0$  (静ひずみ時効) のとき顕著である.

Fig. 12(a) に例として  $\rho_0 (= \gamma_{xy0}^p / \sqrt{3}) = 4.0\%$  の場合について, 時効応力に対する時効指数の変化を示す. 正ねじりおよび逆ねじりの下降, 上昇傾向は他の予ひずみの場合も同じであった. Fig. 12(b) は比較のため引張予ひずみ  $\rho_0 (= \epsilon_{x0}^p) = 4.0\%$  の場合について示したものである. すなわち, P. 2 脚注で述べたように 3・1 節と 3・3 節で用いた材料の化学成分が異なるので, 同一材料(0.21%炭素鋼)を供試材料として改めて引張ひずみ後150℃の応力時効を行い, 引張り・圧縮挙動を調べた. Fig. 12(a) と (b) において交点の時効指数は同じ大きさであるが, 正逆両方向の降伏応力を等しくするためにはねじり予ひずみの場合の方が引張予ひずみの場合よりも大きな  $\bar{\sigma}_A / \bar{\sigma}_0$  値を必要とすることがわかる.

Fig. 13(a) は交点の  $\bar{\sigma}_A / \bar{\sigma}_0$  値とねじり予ひずみの関係を示したものである. 交点の  $\bar{\sigma}_A / \bar{\sigma}_0$  値は予ひずみに依存せずほぼ一定 ( $\bar{\sigma}_A / \bar{\sigma}_0 = 0.74$ ) となる. ただし, Fig. 13(b) に示すように,  $\bar{\sigma}_A$  に対応する逆ねじりのひずみ量  $\rho_1$  (Fig. 1 参照) は予ひずみとともに増加する. 確認のため, Fig. 13 に示した条件に基づいて応力時効を施し, 正ねじりおよび逆ねじりの再負荷試験を行った. その結果を Fig. 14(a)~(d) に示す. 各予ひずみにおいて, 正ねじりの0.2%耐力と逆ねじりの下降伏点是一致的している. しかしながら,  $\rho_2 = 0.2\%$  以上の領域では正ねじりの流動応力の方が逆ねじりの流動応力より高い. その差は予ひずみ量の増加とともに大きくなっている. これらの現象から応力時効材には長範囲の内部応力がまだ残留しており, バウシング効果の除去は主に転位の釘付け(とくに

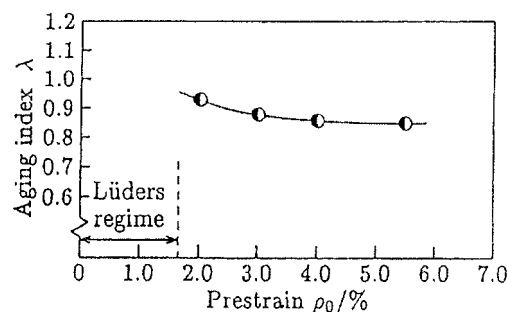


Fig. 15 Relation between aging index and prestrain under stress aging condition for the same yield stress in forward and reverse torsion.

逆ねじりに対して効果的に作用する固着応力の上昇) によってなされるように思われる. Fig. 15 に正ねじりおよび逆ねじりの降伏応力が等しい条件下の時効指数と予ひずみの関係を示す. このときの  $\lambda$  値は予ひずみが大きくなると減少し, その後一定 ( $\lambda = 0.85$ ) となる傾向を示す.

結局, 予ひずみが大きい場合でも予応力に対して降伏応力の低下を15%に抑えながら, 正逆両方向の降伏応力を等しくすることができることがわかった.

## 4. 結 言

予変形を加えた軟鋼を予変形と逆方向の負荷下で応力時効することによって, 正方向の降伏応力の低下を極力抑えながら逆方向の降伏応力を上昇させ, 両者の降伏応力を等しくすることを試みた. 本研究における応力時効はバウシング効果の部分的除去法であるが, 最適な時効温度は150℃であり, 青熱ぜい性温度より低いという利点を有する.

応力時効材には鋭い降伏の再現に方向性がある. すなわち, 予変形と逆方向の負荷および逆方向負荷成分が大きい組合せ負荷の応力-ひずみ曲線に鋭い降伏が現れる. これに対して, 600℃で応力除去焼なましを施した材料では全ての負荷下で鋭い降伏が現れる. しかしながら, 多軸負荷下での両材料の降伏・流動挙動を解析すると無次元化降伏曲面の形状は相似であり, 異方性の度合いはほとんど同じである. 従って, 予応力に対する降伏応力の低下が少ない(すなわち, 時効指数が高い)応力時効材の方が効率的な材料の適用が可能となる.

最適な応力時効条件に関して, 予変形の負荷の



種類を変えて比較したとき、ねじり予ひずみの場合の方が引張予ひずみの場合よりも予応力で無次元化した時効応力は大きい値を必要とする。ただし、無次元化時効応力は予変形量に依存せずほぼ一定となる。最適な応力時効条件下では予変形量が大きい場合でも降伏応力の低下を15%に抑えながら、正逆両方向の降伏応力を等しくすることができる。

### 参考文献

- 1) 例えば、武田武信ほか4名：塑性と加工，24-268 (1983)，p.442.
- 2) Takeda, T. et al.: Proc. 21st Japan Congr. Mater. Res., (1978)，p.45.
- 3) 岩田今朝男：機講論，No.780-12 (1978)，p.208.
- 4) 五弓勇雄編：金属塑性加工の進歩，(1978)，p.437，コロナ社.
- 5) 武田武信ほか2名：山形大学紀要(工学)，17-1 (1982)，p.59.
- 6) 武田武信ほか3名：塑性と加工，39-454 (1998)，p.1118.
- 7) Takeda, T.: Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech., 115-1 (1993)，p.77.
- 8) Takeda, T. & Nasu, Y.: J. Strain Analys., 26-1 (1991)，p.47.
- 9) Drucker, D. C.: J. Appl. Mech., 16 (1949)，p.349.
- 10) Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity, (1950)，p.317, Oxford Press.

### 付 録

式(1)は平面応力状態において次のようになる。

$$f = \{ (1/3)(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2 \} \{ (1/3)(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2 - (A_{xxyy} + A_{zzxx}) \sigma_x^2 + 2A_{xxyy} \sigma_x \sigma_y - (A_{xxyy} + A_{yyzz}) \sigma_y^2 + 4A_{xyxy} \tau_{xy}^2 \} - \{ (1/27)(2\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - 2\sigma_y)(\sigma_x + \sigma_y) + (1/3)(\sigma_x + \sigma_y) \tau_{xy}^2 \}^2 = (\sigma_f^6/27) \{ 1 - 4C/27 - 3(A_{xxyy} + A_{zzxx}) \} \quad (A-1)$$

ここで、 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  はそれぞれ軸応力、円周応力およびせん断応力である。式(A-1)は5個のパラメータを含んでいるが、独立なパラメータの数は4個である。よって、C値に材料固有の定数としての意味を持たせるため Drucker<sup>9)</sup>の

降伏関数  $f = J_2^3 - C J_3^2$  におけるC値と同じ値を用いることにした。すなわち、完全焼なまし軟鋼はおおむね等方性で、その多軸降伏挙動はDruckerの降伏関数で表されるので、引張りとなじりの降伏点( $\sigma_{SL}$ 、 $\sqrt{3}\tau_{SL}$ )を特性値として  $C = (27/4) \{ 1 - (\sqrt{3}\tau_{SL}/\sigma_{SL})^6 \}$  からC値を決定した。また応力時効材と応力除去焼なまし材は3・2節に述べたように、 $\sigma_x - \sigma_y$ 平面のy方向およびz方向( $\sigma_y/\sigma_x = 1$ の負荷経路)において強度が同じであったので軸対称異方性とみなして解析を行った。このとき、対称条件より  $A_{xxyy} = A_{zzxx}$  となる。

異方性パラメータ  $A_{xxyy}$ 、 $A_{yyzz}$  および  $A_{xyxy}$  を決定するための特性値は単軸引張降伏応力  $\sigma_f$  のほかに3個必要である。そこで最初に開端内圧( $\sigma_y/\sigma_x = \infty$ の負荷経路)および単純ねじりによって得られた降伏応力値( $\sigma_h$ 、 $\sqrt{3}\tau_f$ )を選んだ。残り1個の特性値(関係式)は係数決定に対する精度向上を考慮して、Fig. 7の $\theta = 22.5^\circ$ 、 $45^\circ$  および  $67.5^\circ$  の負荷経路から得られたoff-axis引張りの降伏応力  $\sigma_1$  を用いて最小2乗法により求めた。これらの特性値を式(A-1)に代入すると、異方性パラメータは以下の式(A-2)、式(A-3)および式(A-4)から決定できる。

$$A_{xxyy} = A_{zzxx} = \Sigma a_\theta b_\theta / \Sigma a_\theta^2 \quad (A-2)$$

ここで

$$a_\theta = 2 - (\zeta_1^6/4)(1 + 2\cos 2\theta + 5\cos^2 2\theta) - (1/4) \times (\zeta_1/\zeta_h)^6 (2 - \zeta_h^6)(1 - \cos 2\theta)^2 - (3/2)(\zeta_1/\zeta_l)^6 \times \sin^2 2\theta$$

$$b_\theta = (1 - 4C/27) \{ (1/3)(1 - \zeta_1^6) - (1/12)(\zeta_1/\zeta_h)^6 (1 - \zeta_h^6)(1 - \cos 2\theta)^2 - (1/4)(\zeta_1/\zeta_l)^6 \sin^2 2\theta \} + (1/4) \times \zeta_1^6 \sin^2 2\theta$$

$$A_{yyzz} = (1/\zeta_h^6) \{ (2 - \zeta_h^6)A_{xxyy} - (1/3)(1 - 4C/27) \times (1 - \zeta_h^6) \} \quad (A-3)$$

$$A_{xyxy} = (1/4 \zeta_l^6)(1 - 4C/27 - \zeta_l^6 - 6A_{xxyy}) \quad (A-4)$$

式(A-2)から式(A-4)において、 $\zeta_1 = \sigma_1/\sigma_f$ 、 $\zeta_h = \sigma_h/\sigma_f$  および  $\zeta_l = \sqrt{3}\tau_f/\sigma_f$  はそれぞれoff-axis引張り、開端内圧 および単純ねじりの降伏応力を単軸引張降伏応力で割った無次元

化降伏応力である．

次に塑性ひずみ増分比 $M$ ， $N$ は式(1)を偏微分することにより，次のようにして求めることができる．

$$M = d\epsilon_y^p / d\epsilon_x^p = (\partial f / \partial \sigma_y) / (\partial f / \partial \sigma_x) \quad (\text{A-5})$$

$$N = d\gamma_{xy}^p / d\epsilon_x^p = (2 \partial f / \partial \tau_{xy}) / (\partial f / \partial \sigma_x) \quad (\text{A-6})$$

式(A-6)の右辺で $\partial f / \partial \tau_{xy}$ を2倍してあるのはテンソル規約によるためである．

$$\begin{aligned} \partial f / \partial \sigma_x = & J_2^2 (2\sigma_x - \sigma_y) + (2/3)J_2 (2\sigma_x - \sigma_y) \{ \\ & (A_{xxyy} + A_{zzxx}) \sigma_x^2 + 2A_{xxyy} \sigma_x \sigma_y - (A_{xxyy} + \\ & A_{yyzz}) \sigma_y^2 + 4A_{xyxy} \tau_{xy}^2 \} + J_2^2 \{ -2(A_{xxyy} + \\ & A_{zzxx}) \sigma_x + 2A_{xxyy} \sigma_y \} - 2CJ_3 \{ (1/27) \{ 2(\sigma_x - \\ & 2\sigma_y)(\sigma_x + \sigma_y) + (2\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x + \sigma_y) + \\ & (2\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - 2\sigma_y) \} + (1/3) \tau_{xy}^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial f / \partial \sigma_x = & -J_2^2 (\sigma_x - 2\sigma_y) - (2/3)J_2 (\sigma_x - 2\sigma_y) \{ \\ & -(A_{xxyy} + A_{zzxx}) \sigma_x^2 + 2A_{xxyy} \sigma_x \sigma_y - (A_{xxyy} \\ & + A_{yyzz}) \sigma_y^2 + 4A_{xyxy} \tau_{xy}^2 \} + J_2^2 \{ 2A_{xxyy} \sigma_x \\ & - 2(A_{xxyy} + A_{yyzz}) \sigma_y \} - 2CJ_3 \{ (1/27) \{ -(\sigma_x \\ & - 2\sigma_y)(\sigma_x + \sigma_y) - 2(2\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x + \sigma_y) + \\ & (2\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - 2\sigma_y) \} + (1/3) \tau_{xy}^2 \} \\ 2 \partial f / \partial \tau_{xy} = & 6J_2^2 \tau_{xy} + 4J_2 \tau_{xy} \{ -(A_{xxyy} + A_{zzxx}) \sigma_x^2 \\ & + 2A_{xxyy} \sigma_x \sigma_y - (A_{xxyy} + A_{yyzz}) \sigma_y^2 + 4A_{xyxy} \\ & \times \tau_{xy}^2 \} + 8J_2^2 A_{xyxy} \tau_{xy} - (4/3)CJ_3 (\sigma_x + \sigma_y) \\ & \times \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

ここで平面応力の場合

$$\begin{aligned} J_2 = & (1/3)(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2 \\ J_3 = & (1/27)(2\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x - 2\sigma_y)(\sigma_x + \sigma_y) + (1/3) \\ & \times (\sigma_x + \sigma_y) \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$