

等差数列を含む魔方陣について

内田 伏一*

Abstract

In this paper, we consider magic squares which contain arithmetic progressions. Mainly, we consider the magic squares similar to Schaefer's 7-squares. We show how to construct magic squares of order $4k+3$ which are of strict Schaefer's type. In general, it is unknown how to construct magic squares of order $4k+1$ which are of the type. However, we succeeded in constructing magic squares of orders 9 and 13 which are of the type. At the end of this paper, we show an irregular pandiagonal magic 7-square of new class.

0.はじめに 図0.1aに見る正規形の3方陣の中央行, 中央列, 両斜は等差数列になっている. また, 市松模様から作られる図0.1bの4方陣の両斜は等差数列である.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

図0.1a

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

図0.1b

次に示す図0.2abcdeの5図は和算家の安藤有益の作品として文献[1],[3]に紹介されている魔方陣で偶方陣の両斜および奇方陣の中央行と中央列が等差数列になっている.

3	6	25	16	15
22	12	19	8	4
5	9	13	17	21
24	18	7	14	2
11	20	1	10	23

図0.2a

22	8	35	49	21	36	4
44	11	16	41	30	27	6
5	38	24	33	18	12	45
7	13	19	25	31	37	43
3	40	32	17	26	10	47
48	23	34	9	20	39	2
46	42	15	1	29	14	28

図0.2b

5	10	19	54	81	36	55	64	45
74	38	20	53	71	35	56	14	8
75	66	23	30	61	48	43	16	7
6	15	58	40	51	32	24	67	76
9	17	25	33	41	49	57	65	73
4	13	60	50	31	42	22	69	78
79	70	39	52	21	34	59	12	3
80	68	62	29	11	47	26	44	2
37	72	63	28	1	46	27	18	77

図0.2c

*山形大学名誉教授

6	7	19	18	25	36
32	11	14	20	29	5
3	27	16	22	10	33
34	28	15	21	9	4
35	8	23	17	26	2
1	30	24	13	12	31

図 0.2d

8	9	17	40	32	41	49	64
58	15	18	34	31	42	55	7
59	51	22	27	35	46	14	6
5	12	44	29	37	21	52	60
4	53	45	28	36	20	13	61
62	54	19	38	30	43	11	3
63	10	47	39	26	23	50	2
1	56	48	25	33	24	16	57

図 0.2e

次に示す図 0.3abc は和算家の建部賢弘の作品として文献 [1],[3] に紹介されている魔方陣で偶方陣の両斜は等差数列になっており、奇方陣の中央行、中央列、両斜は等差数列になっている。

3	16	25	6	15
22	8	19	14	2
5	9	13	17	21
24	12	7	18	4
11	20	1	10	23

図 0.3a

6	25	13	19	12	36
32	11	20	17	29	2
33	9	16	22	27	4
34	28	15	21	10	3
5	8	23	14	26	35
1	30	24	18	7	31

図 0.3b

4	42	15	49	29	8	28
2	11	30	41	20	27	44
47	38	18	33	26	10	3
7	13	19	25	31	37	43
45	12	24	17	32	40	5
48	23	34	9	16	39	6
22	36	35	1	21	14	46

図 0.3c

本稿では、次に示すシェフェル型奇方陣を中心に、等差数列を含む魔方陣について筆者が考察した事柄について解説したい。

1. シェフェル型奇方陣 次に示す図 1.1abc の 3 図は 1935 年に Schaefer が発表した作品として文献 [1],[3] に紹介されている 7 方陣で中央行、中央列、両斜は等差数列になっている。いずれも対称 7 方陣である。

46	8	21	1	35	36	28
2	39	34	9	20	27	44
47	38	32	17	26	10	5
7	13	19	25	31	37	43
45	40	24	33	18	12	3
6	23	30	41	16	11	48
22	14	15	49	29	42	4

図 1.1a

46	8	21	1	35	36	28
48	39	30	9	16	27	6
3	40	32	17	26	12	45
7	13	19	25	31	37	43
5	38	24	33	18	10	47
44	23	34	41	20	11	2
22	14	15	49	29	42	4

図 1.1b

46	44	5	1	3	48	28
42	39	10	9	12	27	36
29	20	32	17	26	16	35
7	13	19	25	31	37	43
15	34	24	33	18	30	21
14	23	38	41	40	11	8
22	2	47	49	45	6	4

図 1.1c

次に示す図 1.2a は寺村周太郎の作品として文献 [1],[3] に紹介されている対称 7 方陣で、中央行、中央列、両斜は等差数列になっている。図 1.2bc は図 1.2a を等差数列部分とそれ以外の 4 隅部分に分解した図である。

等差数列を含む魔方陣

46	2	45	1	47	6	28
8	39	40	9	38	27	14
21	34	32	17	26	30	15
7	13	19	25	31	37	43
35	20	24	33	18	16	29
36	23	12	41	10	11	42
22	44	3	49	5	48	4

図 1.2a

46			1			28
	39		9		27	
		32	17	26		
7	13	19	25	31	37	43
		24	33	18		
	23		41		11	
22			49			4

図 1.2b

	2	45		47	6	
8		40		38		14
21	34				30	15
35	20				16	29
36		12		10		42
	44	3		5	48	

図 1.2c

図 1.2a の等差数列部分と図 1.1abc の等差数列部分は一致している。図 1.2b の等差数列部分を見ると、中央の 3×3 部分は 3 方陣になっている。この結果、図 1.2b の中央を通らない各行各列と等差数列部分との交わりの 3 数の和は 75 (3 方陣の定和) で一定になっている。さらに、図 1.2c の中央を通らない各行各列の 4 数の和は 100 で一定になっている。

これらの方陣の基本的性質を抜き出しておこう。

1. 両斜と中央行および中央列の数列はいずれも等差数列である。
2. 中央の 3×3 の表は 3 方陣である。
3. 対称方陣である：中心に関して対称な位置にある 2 数の和は一定である。
4. 同層方陣である。この意味は後に述べる。

Scheafer の作品の図 1.1abc の 7 方陣および寺村周太郎の作品の図 1.2a の 7 方陣は基本的性質の 1~4 を満たしている。

次に示す図 1.2d は文献 [1],[3] に寺村周太郎の作品として紹介されている 9 方陣で基本的性質の 1~3 を満たしているが、性質 4 は満たさない。

77	2	63	15	1	36	66	64	45
72	68	55	13	11	28	70	44	8
3	75	59	58	21	22	43	62	26
35	53	48	50	31	42	30	4	76
9	17	25	33	41	49	57	65	73
6	78	52	40	51	32	34	29	47
56	20	39	60	61	24	23	7	79
74	38	12	54	71	69	27	14	10
37	18	16	46	81	67	19	80	5

図 1.2d

次の図 1.3abcd は 2006 年 1 月に筆者が作成した奇方陣である。この中の図 1.3abc は基本的性質の 1~3 を満たすが、性質 4 を満たさないものであり、図 1.3d は基本的性質の 1~4 を満たすものである。

46	45	6	1	34	15	28
21	39	30	9	2	27	47
40	8	32	17	26	38	14
7	13	19	25	31	37	43
36	12	24	33	18	42	10
3	23	48	41	20	11	29
22	35	16	49	44	5	4

図 1.3a

77	18	54	63	1	55	46	10	45
74	68	20	22	11	24	26	44	80
78	12	59	29	21	35	43	16	76
79	30	13	50	31	42	15	34	75
9	17	25	33	41	49	57	65	73
7	48	67	40	51	32	69	52	3
6	66	39	47	61	53	23	70	4
2	38	56	58	71	60	62	14	8
37	72	36	27	81	19	28	64	5

図 1.3b

77	18	54	63	1	55	10	46	45
74	68	13	22	11	26	35	44	76
78	29	59	20	21	24	43	15	80
79	30	12	50	31	42	34	16	75
9	17	25	33	41	49	57	65	73
7	66	48	40	51	32	70	52	3
2	67	39	58	61	62	23	53	4
6	38	47	56	71	60	69	14	8
37	36	72	27	81	19	28	64	5

図 1.3c

77	18	54	63	1	46	55	10	45
74	68	29	12	11	35	16	44	80
78	13	59	30	21	24	43	26	75
79	20	22	50	31	42	34	15	76
9	17	25	33	41	49	57	65	73
6	67	48	40	51	32	60	62	3
7	56	39	58	61	52	23	69	4
2	38	66	47	71	70	53	14	8
37	72	27	36	81	19	28	64	5

図 1.3d

ここで、基本的性質4の同層方陣について説明しよう。9方陣の場合について述べよう。1~81の数を左上から右下へ横向きに順に並べた自然配列の図と図1.3dの9×9の表に、同心円状に仕切りの線を入れたものを図1.4aと図1.4bに示す。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

図 1.4a

77	18	54	63	1	46	55	10	45
74	68	29	12	11	35	16	44	80
78	13	59	30	21	24	43	26	75
79	20	22	50	31	42	34	15	76
9	17	25	33	41	49	57	65	73
6	67	48	40	51	32	60	62	3
7	56	39	58	61	52	23	69	4
2	38	66	47	71	70	53	14	8
37	72	27	36	81	19	28	64	5

図 1.4b

これらの仕切りによって、外側から順に第1層、第2層、…と呼ぶことにしよう。図1.4aと図1.4bの第1層には32個の数が並び、順序は違うが全体として同じ数が含まれている。同じように図1.4aと図1.4bの第k層($k=1, 2, 3, 4$)には順序は違うが全体として同じ数が含まれている。この性質を持った図1.4bのような魔方陣を同層方陣(阿部楽方の命名)と呼ぶ。9方陣について例示したが、9方陣に限らない用語である。

実は、文献[2]において示した作り方による魔方陣は、奇方陣も偶方陣もすべて同層方陣になっている。

先に述べた基本的性質の1~3を満たす奇方阵を**広義のシェフェル型方阵**と呼び、基本的性質の1~4を満たす奇方阵を**狭義のシェフェル型方阵**と呼ぶ。これらを単に**シェフェル型方阵**と呼ぶ。

ここまでで示した図1.1a~図1.1c, 図1.2a, 図1.2d, 図1.3a~図1.3dの奇方阵の中では, 図1.1a~図1.1c, 図1.2aの7方阵と図1.3dの9方阵が**狭義のシェフェル型方阵**であり, 残りの奇方阵は**広義のシェフェル型方阵**である。

2. シェフェル型方阵の変換 n 次のシェフェル型方阵を図1.2bと図1.2cのように分解しておく。シェフェル型方阵の基本的性質1~3によって, 図1.2cに当たる4隅部分の図において, 中央を通らない行および列に属する数の和は一定になっている。この事実を基に, 4隅部分の図において次のような変換を考えよう。

1. 図全体を回転したり, 裏返したりする変換
2. 第 i 行と第 $n+1-i$ 行を入れ替える変換および第 i 列と第 $n+1-i$ 列を入れ替える変換
3. 1 から n までの整数の中の異なる i, j で, $i+j$ および $2i, 2j$ が $n+1$ と異なるものに対して, 第 i 行と第 j 行, 第 $n+1-i$ 行と第 $n+1-j$ 行, 第 i 列と第 j 列, 第 $n+1-i$ 列と第 $n+1-j$ 列を同時に入れ替える変換

4隅部分の図に, これらの変換を施したものと図1.2bに当たる等差数列部分の図を組み合わせたものは, シェフェル型方阵になっている。それで, この3種の変換を合成してできる変換を**シェフェル型を保つ変換**と呼ぶ。2つのシェフェル型 n 方阵は, 一方から他方へシェフェル型を保つ変換で移る場合, シェフェル型 n 方阵として同種であるという。

ただし, 1番目と2番目の変換では, 狭義のシェフェル型方阵を狭義のシェフェル型方阵に移すが, 3番目の変換は必ずしもそうとは限らない。

図1.1a~図1.1c, 図1.2aの7方阵は互いに同種であるが, 図1.3aの7方阵はこれらとは同種でない。前半については, 実際に変換を施すことによって確かめられる。後半については, シェフェル型を保つ変換では4隅部分の図において, 1つの行(列)の数の並びと変換後の行または列の数の並びとは順序が違ってても集合としては一致している, という事実によって証明できる。

また, 図1.2d, 図1.3b~図1.3dの9方阵は互いに同種でないことが確かめられる。

3. シェフェル型 $4k+3$ 方阵の作り方 7方阵 ($k=1$) の場合について説明する。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

図 3.1a

1			4			7
	9		11			13
		17	18	19		
22	23	24	25	26	27	28
		31	32	33		
	37		39		41	
43			46			49

図 3.1b

	2	3		5	6	
8		10		12		14
15	16				20	21
29	30				34	35
36		38		40		42
	44	45		47	48	

図 3.1c

自然配列の図3.1aを図3.1bと図3.1cに分解する。図3.1bには4本の等差数列が含まれている。この4本を適宜回転させて中央部分が3方阵になるようにしたのが, 図3.1dである。図3.1c

では中心に関して対称な位置にある2数の和が一定になっている。中心を通らない各行各列から2ヶ所(2ヶ所)を、全体として上下左右に対称になるように選ぶ(選び方は色々ある)。このように選んだ枠に記されている数を中心に関して対称な位置にある数と交換する。このようにして得られた表の1つが図3.1eである。

46			1			28
	39		9		27	
		32	17	26		
7	13	19	25	31	37	43
		24	33	18		
	23		41		11	
22			49			4

図 3.1d

	2	47		45	6	
42		10		12		36
15	34				30	21
29	20				16	35
14		38		40		8
	44	5		3	48	

図 3.1e

46	2	47	1	45	6	28
42	39	10	9	12	27	36
15	34	32	17	26	30	21
7	13	19	25	31	37	43
29	20	24	33	18	16	35
14	23	38	41	40	11	8
22	44	5	49	3	48	4

図 3.1f

図3.1dと図3.1eを組み合わせて図3.1fを得る。この図は狭義シェフェル型7方陣になっている。この7方陣も図1.2aの7方陣と同種である。

同じ方法で作成した狭義シェフェル型11方陣の例を図3.2abに挙げておく。

116	2	3	118	117	1	115	114	9	10	66
12	105	108	15	106	13	104	19	102	65	22
23	98	94	96	27	25	29	92	64	90	33
88	35	86	83	38	37	40	63	80	43	78
77	76	47	48	72	49	62	52	53	68	67
11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
55	54	69	70	60	73	50	74	75	46	45
44	79	42	59	82	85	84	39	36	87	34
89	32	58	30	93	97	95	26	28	24	99
100	57	20	103	18	109	16	107	14	17	110
56	112	113	8	7	121	5	4	119	120	6

図 3.2a

116	2	3	118	117	1	115	114	9	10	66
110	105	108	15	16	13	18	19	102	65	100
99	24	94	96	27	25	29	92	64	32	89
34	87	36	83	84	37	82	63	42	79	44
45	76	75	48	72	49	62	52	69	68	55
11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
67	54	53	70	60	73	50	74	47	46	77
78	43	80	59	40	85	38	39	86	35	88
33	90	58	30	93	97	95	26	28	98	23
22	57	20	103	104	109	106	107	14	17	12
56	112	113	8	7	121	5	4	119	120	6

図 3.2b

図 3.2b の 11 方陣は狭義シェフェル型親子方陣と呼び得るもので、中心を同じくする 7 方陣が内包されており、これもまた狭義シェフェル型方陣になっている。

一般に、狭義シェフェル型 $4k+3$ 方陣で、狭義シェフェル型 $4i+3$ 方陣 ($i=1, 2, \dots, k-1$) を内包するものを作成できる。 $k=3$ の場合について、図 3.2c に示しておく。

218	2	3	4	221	220	219	1	217	216	215	12	13	14	120
210	203	208	207	20	21	22	17	24	25	26	199	198	119	196
195	32	188	34	35	190	189	33	187	186	41	42	118	44	181
180	47	178	173	176	51	52	49	54	55	170	117	168	59	166
61	164	163	64	158	160	67	65	69	156	116	72	153	152	75
76	149	78	147	80	143	144	81	142	115	86	139	88	137	90
91	134	93	132	131	96	128	97	114	100	125	124	103	122	105
15	29	43	57	71	85	99	113	127	141	155	169	183	197	211
121	104	123	102	101	126	112	129	98	130	95	94	133	92	135
136	89	138	87	140	111	84	145	82	83	146	79	148	77	150
151	74	73	154	110	70	157	161	159	66	68	162	63	62	165
60	167	58	109	56	171	172	177	174	175	50	53	48	179	46
45	182	108	184	185	40	39	193	37	36	191	192	38	194	31
30	107	28	27	200	201	202	209	204	205	206	19	18	23	16
106	212	213	214	11	10	9	225	7	6	5	222	223	224	8

図 3.2c

4. 異種のシェフェル型方陣 まず、広義のシェフェル型 9 方陣であって、含まれる等差数列たちが先に示した図 1.2d および図 1.3bcd における等差数列たち (公差 (1,8) 型と呼ぶ) とは一致しない例を図 4.1abc として 3 種挙げておく。さらに、公差 (1,8) 型の狭義シェフェル型 9 方陣であって、図 1.2d および図 1.3bcd のいずれとも同種でないものの例を図 4.1d に挙げておく。このような例はたくさん作成できるようだ (後述する)。

69	1	2	10	5	76	78	79	49
7	62	38	63	14	54	18	47	66
52	57	55	65	23	8	45	40	24
53	73	71	48	32	43	15	12	22
21	26	31	36	41	46	51	56	61
60	70	67	39	50	34	11	9	29
58	42	37	74	59	17	27	25	30
16	35	64	28	68	19	44	20	75
33	3	4	6	77	72	80	81	13

図 4.1a 公差 (2, 5) 型

65	1	2	9	13	77	78	79	45
6	59	28	70	20	63	15	44	64
49	52	53	75	27	14	43	24	32
57	72	71	47	34	42	8	22	16
21	26	31	36	41	46	51	56	61
66	60	74	40	48	35	11	10	25
50	58	39	68	55	7	29	30	33
18	38	67	19	62	12	54	23	76
37	3	4	5	69	73	80	81	17

図 4.1b 公差 (1, 5) 型

73	1	2	10	5	76	78	79	45
7	65	46	54	14	47	26	44	66
51	61	57	71	23	12	43	22	29
52	63	74	49	32	42	18	24	15
13	20	27	34	41	48	55	62	69
67	58	64	40	50	33	8	19	30
53	60	39	70	59	11	25	21	31
16	38	56	35	68	28	36	17	75
37	3	4	6	77	72	80	81	9

図 4.1c 公差 (1, 7) 型

77	2	3	63	1	72	28	78	45
18	68	67	66	11	47	12	44	36
6	53	59	48	21	58	43	26	55
74	62	30	50	31	42	60	13	7
9	17	25	33	41	49	57	65	73
75	69	22	40	51	32	52	20	8
27	56	39	24	61	34	23	29	76
46	38	70	35	71	16	15	14	64
37	4	54	10	81	19	79	80	5

図 4.1d 公差 (1, 8) 型

5. シェフェル型方陣の構造 シェフェル型 7 方陣の構造を解析しよう。各成分から 25 を引いて、 -24 から 24 までの整数から成り、定和が 0 の 7 方陣を図 5.1a とする。

$3k_3$	a_1	$-b_2$	$-3k_4$	c_2	$-d_1$	$3k_1$
$-b_3$	$2k_3$	a_2	$-2k_4$	$-d_2$	$2k_1$	c_3
a_3	$-b_1$	k_3	$-k_4$	k_1	c_1	$-d_3$
$-3k_2$	$-2k_2$	$-k_2$	0	k_2	$2k_2$	$3k_2$
d_3	$-c_1$	$-k_1$	k_4	$-k_3$	b_1	$-a_3$
$-c_3$	$-2k_1$	d_2	$2k_4$	$-a_2$	$-2k_3$	b_3
$-3k_1$	d_1	$-c_2$	$3k_4$	b_2	$-a_1$	$-3k_3$

図 5.1a

図 5.1a はシェフェル型 7 方陣の基本的性質のうち、1 と 3 の性質が成り立つように表示されている。基本的性質の 2 に当たる条件は、次の等式を満たすことである：

$$k_3 = k_1 + k_2, \quad k_4 = k_1 + k_3 = 2k_1 + k_2.$$

さらに、図 5.1a において k_1, k_2, k_3, k_4 は正の数であると仮定して一般性を失わない。

$3(2k_1 + k_2) = 3k_4 \leq 24$ だから、上の等式を満たす k_1, k_2 の組は、 $(1, 5), (1, 6)$ の 2 組である。図 1.2a と図 1.3a の 7 方陣は $(k_1, k_2) = (1, 6)$ の場合である。

図 5.1a の一部を取り出して図 5.1b を作る。

	a_1	$-b_2$		c_2	$-d_1$	
$-b_3$		a_2		$-d_2$		c_3
a_3	$-b_1$				c_1	$-d_3$
d_3	$-c_1$				b_1	$-a_3$
$-c_3$		d_2		$-a_2$		b_3
	d_1	$-c_2$		b_2	$-a_1$	

図 5.1b

図 5.1b が満たすべき条件は、次の等式である：

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 + d_1 &= b_1 + c_1, & a_2 + d_2 &= b_2 + c_2, & a_3 + d_3 &= b_3 + c_3, \\ a_1 + c_2 &= b_2 + d_1, & a_2 + c_3 &= b_3 + d_2, & a_3 + c_1 &= b_1 + d_3. \end{aligned}$$

等式 (1) を変形して, (1) と同等な次の式を得る.

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 &= (b_1 + b_2 + c_1 - c_2)/2, & d_1 &= (b_1 - b_2 + c_1 + c_2)/2, \\ a_2 &= (b_2 + b_3 + c_2 - c_3)/2, & d_2 &= (b_2 - b_3 + c_2 + c_3)/2, \\ a_3 &= (b_3 + b_1 + c_3 - c_1)/2, & d_3 &= (b_3 - b_1 + c_3 + c_1)/2. \end{aligned}$$

等式 (2) より, 次の式を得る.

$$(3) \quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3, \quad c_1 + c_2 + c_3 = d_1 + d_2 + d_3.$$

さらに, 等式 (2) を使えば, 次の 2 式を得る.

$$\begin{aligned} (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) &= 2c_2 + (b_1 + b_2 + c_1 - c_2) = 2(c_2 + a_1) \\ (b_1 + c_1) + (b_3 + c_3) &= 2c_1 + (b_3 + b_1 + c_3 - c_1) = 2(c_1 + a_3) \end{aligned}$$

これより,

$$(4) \quad \underline{b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \text{ は, すべて偶数かすべて奇数である}}$$

ことが分かる.

まず, $(k_1, k_2) = (1, 6)$ の場合について考察しよう. 図 5.1b に現れる正の数は次の 12 個である.

$$4, 5, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 23.$$

偶数が 4 個で奇数が 8 個であり, (1)(4) によって,

$$(5) \quad a_1 + d_1 = b_1 + c_1, \quad a_2 + d_2 = b_2 + c_2, \quad a_3 + d_3 = b_3 + c_3$$

は, すべて偶数になる. さらに

$$b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) + (b_3 + c_3)$$

の右辺が偶数なので, $b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3$ は共に偶数か共に奇数になる.

今後, $c_3 = 22$ と仮定する. シェフェル型を保つ変換によって, このように仮定して一般性を失わない(確かめてほしい). このとき, $b_3 = \pm 4, \pm 10, \pm 20$ となる.

ここで, $b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3$ が共に奇数であると仮定しよう. b_3, c_3 が偶数であり, 偶数が 4 個だから, $a_1, a_2, a_3, d_1, d_2, d_3$ はすべて奇数になる. さらに, b_1, c_1 が偶数になるか b_2, c_2 が偶数になる. 一方, 考察の対象になっている 4 個の偶数に \pm の符号をつけた和は, 符号のつけ方に無関係に, 4 の倍数になっている. よって, 等式 (2) より a_3 または a_2 が偶数になり, 矛盾を生じる.

すなわち, $b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3$ が共に奇数であれば, 矛盾を生じる.

次に, $b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3$ が共に偶数である場合について考察しよう. (5) により次の 3 つの場合に分けられる:

- a_1, d_1 が偶数で, $a_2, a_3, d_2, d_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ が奇数
- a_2, d_2 が偶数で, $a_1, a_3, d_1, d_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ が奇数

- a_3, d_3 が偶数で, $a_1, a_2, d_1, d_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ が奇数

シェフェル型を保つ変換により, $b_3 = 4, 10, 20$ の場合について考察すれば十分である. 実際, $b_3 < 0$ の場合には, $c_3, -b_3$ の位置を $-d_1, a_1$ の位置になるようにシェフェル型を保ちながら変換して, b_3 と $-b_3$ の立場を入れ替える.

まず, $b_3 = 4$ の場合について考察しよう. 残りの偶数は $\pm 10, \pm 20$ である.

以下の説明において, $\{-, -\}$ と $(-, -)$ の2種類の括弧を使い分けているが, 前者は2数の集合を表し, 後者は2数の順序まで込めた集合を表している.

$a_3 + d_3 (= b_3 + c_3) = 26$ より, $\{a_3, d_3\} = \{17, 9\}, \{15, 11\}$. $a_2 - d_2 (= b_3 - c_3) = -18$ より, (a_2, d_2) は次のいずれかになる:

$$(5, 23), (-23, -5), (-5, 13), (-13, 5)$$

とくに, a_2, a_3, d_2, d_3 は奇数なので, a_1, d_1 が偶数になる. また,

$$\begin{aligned} b_2 - c_2 (= a_1 - d_1) &= \pm 10, \pm 30; & b_2 + c_2 (= a_2 + d_2) &= \pm 8, \pm 28 \\ b_1 + c_1 (= a_1 + d_1) &= \pm 10, \pm 30; & b_1 - c_1 (= a_3 - d_3) &= \pm 4, \pm 8 \end{aligned}$$

が成り立つことより, 次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \{b_2, c_2\} &= \{19, 9\}, \{-19, -9\}, \{19, -11\}, \{-19, 11\}, \\ \{b_1, c_1\} &= \{19, 11\}, \{-19, -11\}, \{17, 13\}, \{-17, -13\}. \end{aligned}$$

得られたデータを整理しておく.

$$\begin{aligned} \{a_3, d_3\} &= \{17, 9\}, \{15, 11\} \\ (a_2, d_2) &= (5, 23), (-23, -5), (-5, 13), (-13, 5) \\ \{b_2, c_2\} &= \{19, 9\}, \{-19, -9\}, \{19, -11\}, \{-19, 11\} \\ \{b_1, c_1\} &= \{19, 11\}, \{-19, -11\}, \{17, 13\}, \{-17, -13\} \end{aligned}$$

これらのデータを見比べて, b_2, c_2 の一方は ± 19 だから, $\{b_1, c_1\} = \{17, 13\}, \{-17, -13\}$ となる. この結果を使えば, $\{a_3, d_3\} = \{15, 11\}, (a_2, d_2) = (5, 23), (-23, -5)$ を得る. 最後に, $\{b_2, c_2\} = \{19, 9\}, \{-19, -9\}$ を得る. さらに, $\{a_1, d_1\} = \{10, 20\}, \{-10, -20\}$ を得る.

これを整理して, 次の結果を得る:

$$\begin{aligned} \{a_1, d_1\} &= \{10, 20\}, \{-10, -20\} \\ \{b_2, c_2\} &= \{19, 9\}, \{-19, -9\} \\ \{b_1, c_1\} &= \{17, 13\}, \{-17, -13\} \\ \{a_3, d_3\} &= \{15, 11\} \\ (a_2, d_2) &= (5, 23), (-23, -5). \end{aligned}$$

必要ならば, 3列と5列の入れ替え, 3行と5行の入れ替えを実行することにより, $a_2 = 5, d_2 = 23, a_3 = 15, d_3 = 11$ と仮定して一般性を失わない. すなわち, 次の図について考察すれば十分である.

	a_1	$-b_2$		c_2	$-d_1$	
-4		5		-23		22
15	$-b_1$				c_1	-11
11	$-c_1$				b_1	-15
-22		23		-5		4
	d_1	$-c_2$		b_2	$-a_1$	

図 5.1b'

この場合、 $b_1 - c_1 = 4$ より、 $(b_1, c_1) = (17, 13), (-13, -17)$ となる。必要ならば、2列と6列の入れ替えを実行して、 $b_1 = 17, c_1 = 13$ と仮定できる。この場合、 $\{a_1, d_1\} = \{10, 20\}$ となるが、1行と7行の入れ替えを考慮して、 $a_1 = 20, d_1 = 10$ と仮定できる。この結果、 $b_2 = 19, c_2 = 9$ と決まる。

ここまでの考察によって、 $b_3 = 4$ の場合には、シェフェル型を保つ変換で互いに移り合い、図 1.3a と同種になることが分かった。

次に、 $b_3 = 20$ の場合 について考察しよう。残りの偶数は $\pm 4, \pm 10$ である。

$a_3 + d_3 (= b_3 + c_3) = 42$ より、 $\{a_3, d_3\} = \{19, 23\}$ となる。

$\pm 20, \pm 22$ がすでに使用されているので、 $a_2 - d_2 (= b_3 - c_3) = -2$ より、 (a_2, d_2) は次のいずれかになる：

$$(9, 11), (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19), \\ (-11, -9), (-13, -11), (-15, -13), (-17, -15), (-19, -17)$$

とくに、 a_2, a_3, d_2, d_3 が奇数になるので、 a_1, d_1 が偶数になる。また、

$$b_1 + c_1 (= a_1 + d_1) = \pm 6, \pm 14, \quad b_1 - c_1 (= a_3 - d_3) = \pm 4$$

が成り立つことによって、 $\{b_1, c_1\} = \{5, 9\}, \{-5, -9\}$ となる。必要ならば、2列と6列の交換、3行と5行の交換を実行して、 $b_1 = 9, c_1 = 5$ と仮定できる。この場合、 $a_3 - d_3 (= b_1 - c_1) = 4$ より、 $a_3 = 23, d_3 = 19$ となる。

$a_1 + d_1 (= b_1 + c_1) = 14$ より、 $\{a_1, d_1\} = \{4, 10\}$ である。必要ならば、1行と7行の交換を実行して、 $a_1 = 4, d_1 = 10$ と仮定できる。残りの数は $\pm 11, \pm 13, \pm 15, \pm 17$ である。

$b_2 - c_2 (= a_1 - d_1) = -6$ より、 $(b_2, c_2) = (11, 17), (-17, -11)$ となる。必要ならば、3列と5列の交換を実行して、 $b_2 = -17, c_2 = -11$ と仮定できる。

最後に、 $a_2 + d_2 (= b_2 + c_2) = -28, a_2 - d_2 (= b_3 - c_3) = -2$ より、 $a_2 = -15, d_2 = -13$ を得る。

ここまでの考察によって、 $b_3 = 20$ の場合には、シェフェル型を保つ変換で互いに移り合い、図 1.2a と同種になることが分かった。

最後に、 $b_3 = 10$ の場合 について考察しよう。残りの偶数は $\pm 4, \pm 20$ である。

$a_3 + d_3 (= b_3 + c_3) = 32, a_2 - d_2 (= b_3 - c_3) = -12$ より、次の式を得る：

$$\{a_3, d_3\} = \{9, 23\}, \{13, 19\}, \{15, 17\} \\ (a_2, d_2) = (5, 17), (11, 23), (-17, -5), (-23, -11)$$

とくに, a_2, a_3, d_2, d_3 が奇数になるので, a_1, d_1 が偶数になる. この場合,

$$b_2 - c_2 (= a_1 - d_1) = \pm 24, \pm 16; \quad b_2 + c_2 (= a_2 + d_2) = \pm 22, \pm 34$$

となるが, この2式を満たす b_2, c_2 は存在しない. よって, $b_3 = 10$ の場合には, シェフェル型7方陣は得られない.

ここまで, $(k_1, k_2) = (1, 6)$ の場合について考察してきた. 次に, $(k_1, k_2) = (1, 5)$ の場合について考察する. この場合には, 図 5.1b に現れる正の数は次の 12 個である:

$$4, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24.$$

注. ここには, 偶数と奇数が 6 個ずつ含まれており, 4 で割り切れない偶数は 22 のみである.

まず, (4) の状況の下に, $b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3$ がすべて偶数である場合について考察しよう. このとき, $b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3$ は共に偶数か共に奇数である. 先に考察した場合と同様に, 一般性を失うことなく $c_3 = 22$ と仮定できる. ここで, $a_3 + d_3 (= b_3 + c_3)$ が偶数であり, 22 以外の偶数はすべて 4 の倍数であることを利用すれば, a_3, d_3 は奇数になる.

(3) の状況の下に, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3 = d_1 + d_2 + d_3$ が共に奇数の場合, $a_1 + a_2$ と $d_1 + d_2$ は共に偶数になる. $a_1 + d_1 = b_1 + c_1$ と $a_2 + d_2 = b_2 + c_2$ も偶数であるから, a_1, a_2, d_1, d_2 はすべて偶数か全て奇数となる. 一方, $b_1 + b_2$ と $c_1 + c_2$ は共に奇数であり, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ の中に偶数または奇数のいずれかが 6 個含まれることになり, 矛盾を生じる.

$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3 = d_1 + d_2 + d_3$ が共に偶数の場合, $a_1 + a_2$ と $d_1 + d_2$ は共に奇数になり, $b_1 + c_1, b_3, c_3$ が偶数であることを使えば, b_1, b_2, c_1, c_2 はすべて偶数か全て奇数である. この場合にも偶数奇数が同数であることに矛盾する.

この結果, $b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3$ がすべて偶数である場合はあり得ないことが分かった.

よって, (1)(4) により $a_1 + d_1 = b_1 + c_1, a_2 + d_2 = b_2 + c_2, a_3 + d_3 = b_3 + c_3$ はすべて奇数となる.

この場合には, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ と $c_1 + c_2 + c_3 = d_1 + d_2 + d_3$ の一方が偶数で他方が奇数になる. 図 5.1b の配置により, 前者が偶数で後者が奇数であると仮定して一般性を失わない. また, 先の注より, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ の 6 個すべてが偶数にはなり得ない.

偶数奇数の判定に関しては, a_1, a_2, a_3 と b_1, b_2, b_3 の立場は同じである.

ここでは, a_1 が偶数で a_2, a_3 が奇数であると仮定して考察してみよう. シェフェル型を保つ変換の下では, このように仮定して一般性を失わない. このとき, d_1 が奇数で d_2, d_3 が偶数になる. さらに, 次の 2 つの場合がある:

- (i) b_1, b_2, b_3 の中の 2 個が奇数で, c_1, c_2, c_3 の中の 2 個が偶数になる.
- (ii) b_1, b_2, b_3 がすべて偶数で, c_1, c_2, c_3 が全て奇数になる.

まず (i) の場合について考えよう. (i)-1: b_1 が偶数の場合. この場合, c_1 が奇数になる.

さらに, $a_1 = \pm 22$ または $b_1 = \pm 22$ と仮定すれば, 4 を法として $c_2 \equiv c_3 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv 0$ となる. 条件 (1) より, 合同式 $a_2 \equiv b_2, a_3 \equiv b_3$ を得る. $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ より, $a_1 \equiv b_1$ となる. 一方が 4 の倍数であり, 他方は 4 の倍数ではないので矛盾を生じる. 全く同様に, $c_2 = \pm 22, c_3 = \pm 22, d_2 = \pm 22$ または $d_3 = \pm 22$ と仮定した場合には, $a_1 \equiv b_1 \equiv 0$ とな

り、条件(1)より、 $c_1 \equiv d_1$ を得る。よって、 $c_2 + c_3 \equiv d_2 + d_3$ となり、矛盾を生じる。すなわち、(i)-1の場合には、偶数になるどの数についても ± 22 にはなり得ず、矛盾を生じることが分かった。

(i)-2: b_2 が偶数の場合。この場合、 c_2 が奇数になる。

さらに、 $c_3 = \pm 22$ または $d_3 = \pm 22$ と仮定すれば、 $a_1 \equiv b_2 \equiv c_1 \equiv d_2 \equiv 0$ となる。条件(1)の後半より、 $c_2 \equiv d_1$ を得る。 $c_1 + c_2 + c_3 = d_1 + d_2 + d_3$ より、 $c_3 \equiv d_3$ となる。一方が4の倍数であり、他方は4の倍数ではないので矛盾を生じる。同様に、 $a_1 = \pm 22$ または $b_2 = \pm 22$ と仮定した場合には、 $c_1 \equiv c_3 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv 0$ となり、 $c_2 \equiv d_1$ を得る。条件(1)より、 $a_1 \equiv b_2$ となり、矛盾を生じる。 $c_1 = \pm 22$ または $d_2 = \pm 22$ と仮定した場合には、 $a_1 \equiv b_2 \equiv c_3 \equiv d_3 \equiv 0$ となり、前半と条件(1)より、 $c_2 \equiv d_1$ を得るので、 $c_1 \equiv d_2$ となり、矛盾を生じる。よって(i)-2の場合にも、偶数になるどの数についても ± 22 にはなり得ず、矛盾を生じることが分かった。

(i)-3: b_3 が偶数の場合。この場合、 c_3 が奇数になる。

さらに、 $c_2 = \pm 22$ または $d_2 = \pm 22$ と仮定すれば、 $a_1 \equiv b_3 \equiv c_1 \equiv d_3 \equiv 0$ となる。条件(1)の前半より、 $b_1 \equiv d_1$ および $a_3 \equiv c_3$ を得る。条件(1)の後半より、 $a_3 + c_1 = b_1 + d_3$ であり、 $c_1 + c_3 \equiv d_1 + d_3$ を得る。この結果、 $c_2 \equiv d_2$ となり、矛盾を生じる。同様に、 $a_1 = \pm 22$ または $b_3 = \pm 22$ と仮定した場合には、 $c_1 \equiv c_2 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv 0$ となり、(1),(3)を利用して、 $a_1 \equiv b_3$ を得るので、矛盾を生じる。さらに、 $c_1 = \pm 22$ または $d_3 = \pm 22$ と仮定した場合にも、 $a_1 \equiv b_3 \equiv c_2 \equiv d_2 \equiv 0$ となり、(1),(3)を利用して、 $a_3 \equiv b_2$ を得る。再度、(1)を利用して、 $c_1 \equiv d_3$ を得るので、矛盾を生じる。よって(i)-3の場合にも、偶数になるどの数についても ± 22 にはなり得ず、矛盾を生じることが分かった。

ここまでの考察によって、(i)の場合は生じないことが分かった。

次に(ii)の場合について考えよう。

この場合には、 $a_1, b_1, b_2, b_3, d_2, d_3$ が偶数で、 $a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, d_1$ が奇数である。図5.1bにおいて、偶数は○印、奇数は●印に置き換えて、図5.1cを得る。

	○	○		●	●	
○		●		○		●
●	○				●	○
○	●				○	●
●		○		●		○
	●	●		○	○	

図 5.1c

	○	●		○	●	
●		●		○		○
●	○				●	○
○	●				○	●
○		○		●		●
	●	○		○		

図 5.1d

図5.1cに第2行と第6行の置換および第3列と第5列の置換を施して図5.1dを得る。これはシェフェル型を保つ変換であり、 a_1, a_2, a_3 の偶奇性を変えない。この変換によって、(ii)の場合が(i)の場合に帰着することが分かる。よって、(ii)の場合も生じないことになる。

よって、 $(k_1, k_2) = (1, 5)$ の場合にはシェフェル型7方陣は存在しないことが分かる。

ゆえに、シェフェル型7方陣は図1.2aまたは図1.3aのいずれかと同種になり、2種類のみであることが分かった。

シェフェル型9方陣について、4本の等差数列の公差を小さいものから順に k_1, k_2, k_3, k_4 とすれば、7方陣の場合と同じ次の関係式を得る。

$$k_3 = k_1 + k_2, \quad k_4 = k_1 + k_3 = 2k_1 + k_2.$$

$4(2k_1 + k_2) = 4k_4 \leq 40$ が成り立つことを使うと、可能性が残る (k_1, k_2) は、次の4組である。

$$(1, 5), (1, 7), (1, 8), (2, 5).$$

図 1.2d, 図 1.3bcd および図 4.1d の9方陣はいずれも $(k_1, k_2) = (1, 8)$ の場合である。

図 4.1b は $(k_1, k_2) = (1, 5)$, 図 4.1c は $(k_1, k_2) = (1, 7)$, 図 4.1a は $(k_1, k_2) = (2, 5)$ の場合のシェフェル型9方陣である。

6. 狭義シェフェル型9方陣 ここで、狭義のシェフェル型9方陣について考察しよう。シェフェル型奇方陣の基本的性質により、等差数列部分を取り除いた表について考察することが重要である。この部分を4隅部分と呼ぶことにしよう。その部分を図 6.1a に表示する。この図において、中心を通らない行と列に属する6数の和は246で一定になる。

	a_1	a_2	a_3		a_4	a_5	a_6	
a_7		b_1	b_2		b_3	b_4		a_8
a_9	b_5		c_1		c_2		b_6	a_{10}
a_{11}	b_7	c_3				c_4	b_8	a_{12}
a_{13}	b_9	c_5				c_6	b_{10}	a_{14}
a_{15}	b_{11}		c_7		c_8		b_{12}	a_{16}
a_{17}		b_{13}	b_{14}		b_{15}	b_{16}		a_{18}
	a_{19}	a_{20}	a_{21}		a_{22}	a_{23}	a_{24}	

図 6.1a

	a_1	a_3	a_2		a_5	a_4	a_6	
a_7		b_2	b_1		b_4	b_3		a_8
a_{11}	b_7		c_3		c_4		b_8	a_{12}
a_9	b_5	c_1				c_2	b_6	a_{10}
a_{15}	b_{11}	c_7				c_8	b_{12}	a_{16}
a_{13}	b_9		c_5		c_6		b_{10}	a_{14}
a_{17}		b_{14}	b_{13}		b_{16}	b_{15}		a_{18}
	a_{19}	a_{21}	a_{20}		a_{23}	a_{22}	a_{24}	

図 6.1b

図 6.1a において、同層性が分かりやすいように、第1層の数は $a_i (i = 1, 2, \dots, 24)$, 第2層の数は $b_i (i = 1, 2, \dots, 16)$, 第3層の数は $c_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ で表示している。

図 6.1a に対して、中心に関して対称な位置にある 2 本の行 (2 本の列) の置換および図形全体の回転と裏返しの操作、さらに第 3 行と第 4 行の置換・第 6 行と第 7 行の置換・第 3 列と第 4 列の置換・第 6 列と第 7 列の置換を続けて行う操作 (この最後の操作の結果、図 6.1a は図 6.1b に移る) を行ったものに、図 1.2d (および図 1.3d) の 9 方陣の等差数列部分を埋め込めば、狭義のシェフェル型 9 方陣が完成する。

このように、図 6.1a のような 1 つの図からたくさんの狭義シェフェル型 9 方陣を作成できる。ここでは、図 6.1a が次の条件を満たす場合、それを基本形と呼ぶ。

$$a_1 < a_6, a_1 < a_{19}, a_1 < a_{24}, a_7 < a_8, a_7 < a_{17}, a_7 < a_{18}$$

$$c_1 < c_2, c_1 < c_7, c_1 < c_8, c_3 < c_4, c_3 < c_5, c_3 < c_6$$

$$c_1 < c_3.$$

以下に、 (c_1, c_2, c_3, c_4) の値が指定された基本形を (c_1, c_2, c_3, c_4) 型と呼び、その例を表示する。

	2	27	28		75	78	36	
8		70	69		20	15		64
79	29		22		24		16	76
72	56	30				34	35	19
63	47	48				52	26	10
6	66		58		60		53	3
18		67	62		13	12		74
	46	4	7		54	55	80	

図 6.1c (22, 24, 30, 34) 型

	2	27	72		74	7	64	
28		67	20		16	69		46
19	70		22		24		35	76
79	56	30				48	29	4
78	53	34				52	26	3
6	47		58		60		12	63
36		13	66		62	15		54
	18	75	8		10	55	80	

図 6.1d (22, 24, 30, 48) 型

	2	6	79		78	7	74	
10		26	69		62	15		64
63	66		22		30		29	36
55	70	24				34	35	28
54	47	48				58	12	27
46	53		52		60		16	19
18		67	20		13	56		72
	8	75	4		3	76	80	

図 6.1e (22, 30, 24, 34) 型

	2	6	75		63	36	64	
10		67	62		66	13		28
27	53		22		30		35	79
74	70	24				48	26	4
78	56	34				58	12	8
3	47		52		60		29	55
54		69	16		20	15		72
	18	46	19		7	76	80	

図 6.1f (22, 30, 24, 48) 型

	2	6	79		78	7	74	
10		69	26		15	62		64
55	70		22		34		29	36
63	66	24				30	35	28
54	47	52				58	16	19
46	53		48		60		12	27
18		20	67		56	13		72
	8	75	4		3	76	80	

図 6.1g (22, 34, 24, 30) 型

	2	28	63		78	3	72	
8		69	56		29	66		18
36	67		22		34		12	75
55	62	24				52	47	6
76	35	30				58	20	27
7	70		48		60		15	46
64		16	53		26	13		74
	10	79	4		19	54	80	

図 6.1h (22, 34, 24, 52) 型

ここに、コンピュータを使って調べた基本形の個数についてまとめておく。

(c_1, c_2, c_3, c_4)	個数
(22, 24, 30, 34)	117
(22, 24, 30, 48)	46
(22, 30, 24, 34)	29
(22, 30, 24, 48)	22
(22, 34, 24, 30)	71
(22, 34, 24, 52)	52

このように、狭義シェフェル型9方陣が数多く存在することが示されたが、シェフェル型 $4k+1$ 方陣 ($k \geq 3$) が構成できるかどうか、なども今後の課題である。

広義シェフェル型13方陣が作成できたので図 6.2a に示しておく。

163	5	2	4	158	161	1	164	159	129	3	65	91
160	150	17	148	119	106	15	103	18	23	16	90	40
8	142	137	50	102	115	29	94	107	42	89	38	152
21	151	134	124	69	44	43	75	48	88	140	144	24
54	143	138	45	111	70	57	60	87	62	135	77	66
92	39	139	56	58	98	71	86	74	47	136	156	53
13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133	145	157
117	14	34	123	96	84	99	72	112	114	31	131	78
104	93	35	108	83	110	113	100	59	125	32	27	116
146	26	30	82	122	95	127	126	101	46	36	19	149
18	132	81	128	63	76	141	5	68	120	33	28	162
130	80	154	147	52	67	155	64	51	22	153	20	10
79	105	167	41	11	6	169	9	12	166	168	165	7

図 6.2a

163	168	3	4	5	92	1	117	130	162	11	158	91
14	150	154	103	148	147	15	77	17	18	146	90	26
143	28	137	107	128	31	29	76	134	34	89	38	131
6	129	115	124	126	45	43	47	122	88	102	149	9
52	119	140	56	111	112	57	110	87	62	135	54	10
65	19	120	101	70	98	71	86	74	95	138	64	104
13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133	145	157
66	106	32	75	96	84	99	72	100	69	50	151	105
160	116	35	108	83	60	113	58	59	114	30	51	118
161	21	68	82	48	123	127	125	44	46	55	41	164
39	132	81	136	36	94	141	139	42	63	33	142	27
144	80	24	152	153	93	155	23	22	67	16	20	156
79	12	159	8	40	53	169	78	165	166	167	2	7

図 6.2b

図 6.2a の 13 方陣の内側の 9 方陣の部分は、図 1.3d に示した狭義のシェフェル型 9 方陣を利用して作成しており、2 重外周部分の数の配置をうまくできれば、狭義のシェフェル型 13 方陣を作成できると思われるが、この方法ではまだ狭義のシェフェル型 13 方陣を発見できていない。

その後、配置図を変更し、狭義シェフェル型 7 方陣を内包し、3 重外周部分を操作する方法に切り替えてみた。その結果、図 6.2b に示す狭義シェフェル型 13 方陣を作成できた。

7. 4 方向に等差数列を含む 5 方陣について 中心を通る行、列、両斜の 4 方向に等差数列を含む 5 方陣について調べてみた。この条件を満たす 5 方陣は 6 個であることが分かった。その結果について記述する。

5 項からなる等差数列を

$$k, k + x, k + 2x, k + 3x, k + 4x$$

と表示する。この 5 項の和が 5 方陣の定和 65 に等しいことを使って、 $k + 2x = 13$ を得る。この結果、次の 6 種類の等差数列を得る。

	公差				
1	7	13	19	25	6
3	8	13	18	23	5
5	9	13	17	21	4
7	10	13	16	19	3
9	11	13	15	17	2
11	12	13	14	15	1

この中の 4 本を選んで、中央の項以外に重複の無いようにできるのは、公差を使って表示すれば、(6,5,4,1), (5,4,3,1) の 2 組のみである。

以下、奇数を ●印で、偶数を ○印で表示する。

まず、第1の場合：(6,5,4,1)について、4方向の等差数列は次の3種類に分けて表示できる。

●		●		●
	●	○	●	
●	○	●	○	●
	●	○	●	
●		●		●

図 7.1a

●		●		●
	●	●	○	
●	○	●	○	●
	○	●	●	
●		●		●

図 7.1b

●		●		●
	○	●	○	
●	●	●	●	●
	○	●	○	
●		●		●

図 7.1c

空欄を埋める残りの数は、次の8個でいずれも偶数である。

$$2, 4, 6, 10, 16, 20, 22, 24 \dots (*)$$

図 7.1a と図 7.1b において、どちらも第2行の残り2数の和が奇数になり、矛盾を生じる。一方、図 7.1c の各行各列の残り2数の和はすべて偶数になり、可能性を残している。この場合、両斜の等差数列を図 7.2a のように固定して一般性を失わない。

3		q		11
	8	*	12	
p	*	13	*	p'
	14	*	18	
15		q'		23

図 7.2a

図 7.2a において、 $\{p, p'\}$ および $\{q, q'\}$ は、一方が $\{1, 25\}$ であり、他方が $\{5, 21\}$ である。このような制約のもとに、すべての (p, q) について調べ、空欄を埋めるべき8個の数を $(*)$ の中から探し、可能性の残るものを拾い出すと、図 7.2b から図 7.2e の4つの場合が残る。

この中で、図 7.2b と図 7.2c の場合には、それぞれただ1つの解が求まる。また、図 7.2d の場合には、第1行と第5行の太字の数の上下入れ替えと、第2行と第4行の太字の数の上下入れ替えができるので、この図は4個の5方陣を表示している。

$q = 5, p = 25$

3	22	5	24	11
16	8	9	12	20
25	19	13	7	1
6	14	17	18	10
15	2	21	4	23

図 7.2b

$q = 21, p = 1$

3	20	21	10	11
24	8	17	12	4
1	7	13	19	25
22	14	9	18	2
15	16	5	6	23

図 7.2c

$q = 25, p = 5$

3	24	25	2	11
20	8	19	12	6
5	9	13	17	21
22	14	7	18	4
15	10	1	16	23

図 7.2d

図 7.2e の場合には, $a + b = a + c = 26$ より, $b = c$ となるので, 5 方陣を作成できない.

$q = 25, p = 21$

3	a	25	b	11
	8	19	12	
21	17	13	9	5
	14	7	18	
15	c	1		23

図 7.2e

次に, 第 2 の場合: (5,4,3,1) について. 奇数のみからなる等差数列が 1 個だけなので, 4 方向の等差数列は次の 2 種類に分けて表示できる.

●		●		●
	●	○	○	
●	○	●	○	●
	○	○	●	
●		●		●

図 7.3a

●		●		●
	○	○	○	
●	●	●	●	●
	○	○	○	
●		●		●

図 7.3b

空欄を埋める残りの数は次の通りで, 奇数が 2 個, 偶数が 6 個である.

$$1, 2, 4, 6, 20, 22, 24, 25 \cdots (**)$$

図 7.3a の場合, 各行各列の空欄を埋める 2 数の和はいずれも偶数であるが, (**) により奇数が 2 個のみだから, 5 方陣を作成できない.

図 7.3b の場合, 両斜に入る等差数列により, 図 7.4a から図 7.4c までの 3 つの場合に分けて考察する. それぞれの図について, 可能性の残るすべての (p, q) について, 空欄を埋める数を (**) の中から探してみたが, 3 図とも 5 方陣を作成できないことが分かった.

3		q		7
	8	*	10	
p	*	13	*	p'
	16	*	18	
19		q'		23

図 7.4a

3		q		11
	8	*	12	
p	*	13	*	p'
	14	*	18	
15		q'		23

図 7.4b

7		q		11
	10	*	12	
p	*	13	*	p'
	14	*	16	
15		q'		19

図 7.4c

このように, 考察の成果を簡明に記述することができたのは, 図 7.1abc および図 7.3ab のように, 奇数を ● 印で, 偶数を ○ 印で表示する説明を思いついた故である.

以上の考察により, 中心を通る行, 列, 両斜の 4 方向に等差数列を含む 5 方陣は図 7.2bcd に示した 6 個のみであることが分かった.

この中で, 図 7.2b(図 0.3a の転置) と図 7.2c の 2 個が対称 5 方陣であり, 図 7.2d の 4 個の 5 方陣は, いずれも対称ではない.

8. 2本の等差数列を含む4方陣 正規形の4方陣で、2本の対角線上に等差数列が並ぶのは、図8.1a(図0.1bと同じ)の場合のみである。

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

図8.1a

まず、この事実を証明しよう。

4項からなる等差数列 $a, a+x, a+2x, a+3x$ で、4和が正規形4方陣の定和34に一致するのは、 $2a+3x=17$ が成り立つ場合であり、公差 x は奇数になる。この結果、次の3組の等差数列が候補になる。

				公差
1	6	11	16	5
4	7	10	13	3
7	8	9	10	1

この3組の等差数列の中で、第2第3の等差数列は2個の共通数を含むので、4方陣の中に同時に含まれることはあり得ない。よって、次の2つの場合が考察の対象になる。

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

図8.1b

1			7
	6	8	
	9	11	
10			16

図8.1c

図8.1bの場合、空欄に入る数は2,3,5,8,9,12,14,15であり、4方陣が完成するのは図8.1aの場合のみである。

図8.1cの場合、空欄に入る数は2,3,4,5,12,13,14,15である。第1列の空欄に入る2数の和は23であり、この条件を満たす数は残されていない。よって、冒頭の主張が証明された。

次に、4方陣の2つの行に等差数列が並ぶ場合について考察する。

まず、2本の等差数列が図8.1bのものと同一場合について、次の12の場合に分けて考察する。どの場合にも、空欄に入るべき数は2,3,5,8,9,12,14,15である。

1	6	11	16
4	7	10	13
			*

図8.2a

1	6	11	16
13	10	7	4
12	3	14	5
8	15	2	9

図8.2b

1	6	11	16
4	7	10	13
			*

図8.2c

1	6	11	16
		*	
13	10	7	4

図8.2d

等差数列を含む魔方陣

1	6	11	16
14	12	5	3
15	9	8	2
4	7	10	13

図 8.2e

1	6	11	16
8	15	2	9
12	3	14	5
13	10	7	4

図 8.2f

4	7	19	13
1	6	11	16
			*

図 8.2g

13	10	7	4
1	6	11	16
		*	

図 8.2h

15	9	8	2
1	6	11	16
4	7	10	13
14	12	5	3

図 8.2i

12	3	14	5
1	6	11	16
13	10	7	4
8	15	2	9

図 8.2j

1	6	11	16
		*	
4	7	10	13

図 8.2k

1	6	11	16
		*	
13	10	7	4

図 8.2l

これらの図の中で、太字の数が記入されている図は、4 方陣を作成可能な例である。図 8.2b はただ 1 つの解を持ち、図 8.2e、図 8.2f、図 8.2i、図 8.2j の場合には、いずれも太字の数の入れ替えにより、2 個の 4 方陣を解にもつ。

残りの図については、* 印を通る列と対角線の空欄の 2 数の和を実現する数が無く、4 方陣を作成できない。

次に、図 8.1c と同じ等差数列を持つ場合について、12 個の図に分けて考察したが、どの場合にも 4 方陣を得られなかった。

この結果、2 本の等差数列を含む正規形の 4 方陣は 10 個である。

その中で、図 8.1a の 4 方陣は定和点対称型であり、その他の図 8.2b、図 8.2e、図 8.2f、図 8.2i、図 8.2j の 4 方陣はいずれも定和線対称型である。

注 正規形 6 方陣の場合について、ここに示した 4 方陣の場合と同様の考察を実行した。その結果、可能性を残す 2 本の等差数列の組すべてについて、両斜の場合および 2 本の行の場合、いずれにも正規形 6 方陣を作成できることが分かった。ここに具体的に示すには分量が多すぎる。

9. 等差数列を含む汎魔方陣 汎 5 方陣で等差数列を含むものは次の 4 種類で、いずれも対称方陣であり、等差数列は一方向のみである。

10	11	17	23	4
18	24	5	6	12
1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16

図 9.1a 公差 6

1	23	20	12	9
15	7	4	21	18
24	16	13	10	2
8	5	22	19	11
17	14	6	3	25

図 9.1b 公差 6

6	15	19	23	2
18	22	1	10	14
5	9	13	17	21
12	16	25	4	8
24	3	7	11	20

図 9.1c 公差 4

5	11	22	8	19
23	9	20	1	12
16	2	13	24	10
14	25	6	17	3
7	18	4	15	21

図 9.1d 公差 4

汎 5 方陣が桂馬とび法によって作られる汎ラテン方陣の直交対に分解されることを使って、等差数列を含む汎 5 方陣は、この 4 種に限ることが証明できる。

正則汎 7 方陣で等差数列を含むものは、いずれも対称方陣で、等差数列は一方向のみであり、次の 12 種類である。

1	48	39	30	28	19	10
18	9	7	47	38	29	27
35	26	17	8	6	46	37
45	36	34	25	16	14	5
13	4	44	42	33	24	15
23	21	12	3	43	41	32
40	31	22	20	11	2	49

図 9.2a 公差 8

1	46	42	31	27	16	12
20	9	5	43	39	35	24
32	28	17	13	2	47	36
44	40	29	25	21	10	6
14	3	48	37	33	22	18
26	15	11	7	45	41	30
38	34	23	19	8	4	49

図 9.2b 公差 8

1	45	40	35	23	18	13
21	9	4	48	36	31	26
34	22	17	12	7	44	39
47	42	30	25	20	8	3
11	6	43	38	33	28	16
24	19	14	2	46	41	29
37	32	27	15	10	5	49

図 9.2c 公差 8

44	3	11	19	27	35	36
32	40	48	7	8	16	24
20	28	29	37	45	4	12
1	9	17	25	33	41	49
38	46	5	13	21	22	30
26	34	42	43	2	10	18
14	15	23	31	39	47	6

図 9.2d 公差 8

45	4	12	20	28	29	37
35	36	44	3	11	19	27
18	26	34	42	43	2	10
1	9	17	25	33	41	49
40	48	7	8	16	24	32
23	31	39	47	6	14	15
13	21	22	30	38	46	5

図 9.2e 公差 8

48	7	8	16	24	32	40
30	38	46	5	13	21	22
19	27	35	36	44	3	11
1	9	17	25	33	41	49
39	47	6	14	15	23	31
28	29	37	45	4	12	20
10	18	26	34	42	43	2

図 9.2f 公差 8

7	44	39	34	22	17	12
18	13	1	45	40	35	23
29	24	19	14	2	46	41
47	42	30	25	20	8	3
9	4	48	36	31	26	21
27	15	10	5	49	37	32
38	33	28	16	11	6	43

図 9.2g 公差 6

7	46	36	33	23	20	10
16	13	3	49	39	29	26
32	22	19	9	6	45	42
48	38	35	25	15	12	2
8	5	44	41	31	28	18
24	21	11	1	47	37	34
40	30	27	17	14	4	43

図 9.2h 公差 6

7	47	38	29	27	18	9
15	13	4	44	42	33	24
30	28	19	10	1	48	39
45	36	34	25	16	14	5
11	2	49	40	31	22	20
26	17	8	6	46	37	35
41	32	23	21	12	3	43

図 9.2i 公差 6

48	5	11	17	23	29	42
32	38	44	1	14	20	26
16	22	35	41	47	4	10
7	13	19	25	31	37	43
40	46	3	9	15	28	34
24	30	36	49	6	12	18
8	21	27	33	39	45	2

図 9.2j 公差 6

47	4	10	16	22	35	41
29	42	48	5	11	17	23
18	24	30	36	49	6	12
7	13	19	25	31	37	43
38	44	1	14	20	26	32
27	33	39	45	2	8	21
9	15	28	34	40	46	3

図 9.2k 公差 6

44	1	14	20	26	32	38
34	40	46	3	9	15	28
17	23	29	42	48	5	11
7	13	19	25	31	37	43
39	45	2	8	21	27	33
22	35	41	47	4	10	16
12	18	24	30	36	49	6

図 9.2l 公差 6

正則汎 7 方陣の場合，中心を通る行，列，斜のいずれか 1 つが等差数列であれば，必然的に対称（定和点対称型）7 方陣になる．しかも，他の 3 つの数値は等差数列にはならない．この事実は，正則汎 7 方陣が汎ラテン方陣 2 つの直交対に分解されることを使って証明できる．

不規則汎 7 方陣の場合に，中心を通る行，列，斜の中の 2 つ以上が等差数列になることがあるかと思い調べてみた（2011 年 10 月）．次の図はいずれも 3 方向が等差数列になる対称不規則汎 7 方陣 である．

等差数列を含む魔方陣

4	44	42	1	48	14	22
20	11	34	9	40	23	38
29	35	18	17	24	47	5
37	19	43	25	7	31	13
45	3	26	33	32	15	21
12	27	10	41	16	39	30
28	36	2	49	8	6	46

図 9.3a 公差 (1, 7, 8)

4	48	36	7	44	8	28
16	11	30	13	38	27	40
35	29	18	19	26	45	3
41	17	49	25	1	33	9
47	5	24	31	32	21	15
10	23	12	37	20	39	34
22	42	6	43	14	2	46

図 9.3b 公差 (1, 6, 7)

1	21	34	22	48	30	19
45	9	47	23	6	7	38
40	35	17	24	37	14	8
4	11	18	25	32	39	46
42	36	13	26	33	15	10
12	43	44	27	3	41	5
31	20	2	28	16	29	49

図 9.3c 公差 (1, 7, 8)

図 9.3abc の 7 方陣は、いずれも汎パターン (汎魔方陣の性質をもった補助方陣、すなわち行和、列和、汎斜和が一定) の直交対に分解される。

なお、4 方向が等差数列になる対称不規則汎 7 方陣は存在しないようだ。

10. おわりに 等差数列を含む汎 7 方陣について考察し、対称汎 7 方陣になる場合が多いことに気付いた。等差数列を抜きに対称汎 7 方陣について調べた結果、新しい知見を得た (2013 年 7 月) ので紹介する。

ここに掲げた 3 組の図において、 M はいずれも対称汎 7 方陣である。すなわち、中心に関して対称な位置にある 2 数の和が一定値 50 になっている汎 7 方陣である。

図 10.1a	M	A	B																	
1	21	34	47	11	24	37	0	2	4	6	1	3	5	0	6	5	4	3	2	1
45	9	22	42	6	19	32	6	1	3	5	0	2	4	2	1	0	6	5	4	3
40	4	17	30	43	14	27	5	0	2	4	6	1	3	4	3	2	1	0	6	5
35	48	12	25	38	2	15	4	6	1	3	5	0	2	6	5	4	3	2	1	0
23	36	7	20	33	46	10	3	5	0	2	4	6	1	1	0	6	5	4	3	2
18	31	44	8	28	41	5	2	4	6	1	3	5	0	3	2	1	0	6	5	4
13	26	39	3	16	29	49	1	3	5	0	2	4	6	5	4	3	2	1	0	6

図 10.1b	M	A	B																	
3	5	43	46	27	39	12	0	0	6	6	3	5	1	2	4	0	3	5	3	4
17	48	41	14	18	29	8	2	6	5	1	2	4	1	2	5	5	6	3	0	0
34	37	10	1	30	28	35	4	5	1	0	4	3	4	5	1	2	0	1	6	6
26	31	6	25	44	19	24	3	4	0	3	6	2	3	4	2	5	3	1	4	2
15	22	20	49	40	13	16	2	3	2	6	5	1	2	0	0	5	6	4	5	1
42	21	32	36	9	2	33	5	2	4	5	1	0	4	6	6	3	0	1	1	4
38	11	23	4	7	45	47	5	1	3	0	0	6	6	2	3	1	3	6	2	4

図 10.1c	M	A	B
26	1	10	48
44	39	34	33
30	13	36	28
9	12	4	25
8	45	29	22
35	47	43	17
23	18	19	2
31	32	27	3
7	3	15	4
21	5	42	6
46	38	41	4
14	37	20	1
16	11	6	3
40	49	24	4
3	0	1	6
6	5	4	4
4	1	5	3
1	1	0	3
1	6	4	3
4	6	6	2
3	2	2	0
4	0	2	5
2	5	6	3
5	2	5	2
1	5	5	2
0	2	0	6
6	4	0	2
1	3	4	1
2	3	5	2
3	5	4	6
6	6	4	6
1	4	3	3
3	3	3	2
0	2	0	6
6	4	0	2
1	3	4	1
2	3	5	2

これらの M を $M = 7A + B + E$ と 7 進展開 (E は各成分が 1 の 7 方陣) した A, B を表示してある. 図 10.1a の A, B は汎ラテン方陣であり, M は正則汎 7 方陣である. 一方, 図 10.1b, 図 10.1c の M は不規則汎 7 方陣である. ただし, 図 10.1b の A, B は汎 7 方陣の性質 (行和, 列和, 汎斜和が一定) を受け継いでいるが, 図 10.1c の A, B は 7 方陣の性質さえ受け継いでいない. 実際, 行和, 列和, 汎斜和が一定値でない.

この図 10.1c のように, A, B の行和, 列和, 斜和の中に, 一定値 21 と異なる値が現れる M を分解非方陣型汎 7 方陣という. 筆者にとって, 汎 7 方陣では初めて目にするものである.

対称汎魔方陣という美しい性質を備えた方陣で次数 (= 7) が小さく自由度が低いと思われるものの中に, このような方陣が含まれていたことに驚いている. しかも, 分解非方陣型汎 7 方陣は数多く存在するようである.

引用文献

- [1] 平山諦・阿部楽方: 方陣の研究, 1983 年, 大阪教育図書
- [2] 内田伏一: 魔方陣, 2007 年, 日本評論社
- [3] 大森清美: 魔方陣の世界, 2013 年, 日本評論社