

工学力学系におけるエネルギー変換の幾何学的理論

上 原 武 幸

工学部機械工学科

(昭和59年8月30日受理)

A Geometrical Theory of Energy Conversion in Engineering Dynamical Systems

Takeyuki U_{EHARA}*Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering*

(Received August 30, 1984)

Abstract

It has been pointed out through the geometrical research activities of RAAG that the geometrical expression for the performance of electro-mechanical and hydro-mechanical systems has the non-Riemannian character and it plays an essential role associated with the energy conversion in these systems. This suggests a possibility of constructing such geometrical theory that treats in a unified way the various energy conversions in engineering dynamical systems. In this report an attempt is made to study geometrically the problem of energy conversions on the basis of somewhat simplifying assumptions for the facility of analysis. Essential features concerning the energy conversion are grasped geometrically and the general principle for the physico-engineering application is obtained.

序 論

古典解析力学の発展と共に、物理学の世界で、いわば純化された力学系に対する幾何学的認識が、力学系の挙動の客観性(座標変換のもとでの不変性)を把握しその本質を洞察するための極めて有力な方法論であることは既に広く認識されており、多くの成書、例えば1), 2), 3), 4)等によってそれを確かめることができる。

然しながら、物理学の応用としての工学の諸分野に現われる実際の力学系—例えば各種の動力機械や運輸機械等—においては、その構造の複雑さや、各種の移動物質—例えば電流、流体、熱流体等—が介在することによって、系の自由度の識別、

選定が一般に容易でなく、かつそれらの間の変換或いは拘束関係が機械の型式毎に異なる等の事情のために、上述の純化された力学系に対する幾何学的認識はそのままの形では単純に適用できない。

このように多くの困難が内在している工学力学系に対する幾何学的把握、そしてそれに基く統一理論確立の第一歩は、周知のように、G. Kronによる電気回転機械に対する研究5), 6), 7)によって踏み出されたといえよう。

彼の理論の成功は微分幾何学の基礎の上に立ち、電気力学系に対する背景空間として非リーマン空間、詳しくは非対称擬似接続空間を想定し、力学系における種々の物理的概念を背景空間における

種々の幾何学的概念に対応させ、座標変換による幾何学的量の不変性を利用したことにある。

その後我国においてもこのような幾何学的理論を電気力学系のみならず、他の種々の工学力学系に対しても展開しようとする機運が生れ、K. Kondo をリーダーとする RAAG (応用幾何学研究協会) の研究活動の一部門として多くの研究が行われた (8), (9), (10), (11) 等)。

これら一連の研究の中で得られたエネルギー変換についての認識—剛体としての機械エネルギーの他に電磁エネルギー或いは流体のエネルギーのごとき異種のエネルギーが介在し、異種の様相間でのエネルギー変換が行われるような場合には、非ホロノーム変換或いは振率テンソル等の概念によって、その現象の統一的把握が得られる—に基いて上述の2種の動力機械のみならず少くとも更に熱機関等をも含み得る形のエネルギー変換の幾何学的理論を作る試みがなされた¹²⁾。本稿はこれに基き、更にその後の検討を含めて報告する。

なお本稿で使用される幾何学的概念やテンソル記号については¹³⁾, ¹⁴⁾を参照されたい。

1. 道の擬似幾何学とフィルム空間

本節では工学力学系におけるエネルギー変換の様相を一般的に把握するための幾何学的理論の出発点として、力学系全系にわたってのエネルギー保存の立場が、擬似計量接続フィルム空間における道の幾何学に結びつけられることを示す。

1.1 擬似接続空間における道と不変エネルギーの概念

擬似接続空間において、その共変微係数が零となるような2階共変テンソルが存在すれば、その空間は計量接続をもつといわれ、このテンソルを計量テンソルと呼ぶ。

これを $a_{\beta\alpha}$ とし、指標 α, β は 0 から n までの値をとるものとする。即ち空間は $(n+1)$ 次元とする。このとき上述の計量接続の条件は

$$D_\gamma a_{\beta\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\gamma a_{\beta\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^\delta a_{\delta\alpha} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta a_{\beta\delta} = 0 \quad (1.1)$$

で表わされる。ここに $\Gamma_{\gamma\beta}^\delta$ 等は接続係数であり座標 x^α ($\alpha = 0, 1, \dots, n$) の関数である。 D_γ および ∂_γ はそれぞれ座標 x^γ についての共変微分および偏微分の演算記号である。また $\stackrel{\text{def}}{=}$ は右辺によって左辺が定義されることを表わす記号であり、以降においても随時使用される。後に (2.1 節) 示される理由によって接続の対称性は要求しない。従って

$$S_{\gamma\beta}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{[\gamma\beta]}^\alpha \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

で定義される振率テンソル $S_{\gamma\beta}^\alpha$ が存在する。ここに $[\gamma\beta]$ は指標 γ, β についての交代演算記号であり、従って $S_{\gamma\beta}^\alpha$ は指標 γ, β について交代性を有している。

この空間における道の方程式は良く知られているように、 t を任意のパラメタとして

$$\frac{D\dot{x}^\alpha}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\gamma}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0 \quad (1.3)$$

$$\dot{x}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^\alpha}{dt} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

で与えられる。ここに D/dt はパラメタ t についての絶対微分演算記号である。

一方上述の2階共変テンソル $a_{\beta\alpha}$ を用いて

$$E = \frac{1}{2} a_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (1.5)$$

なる \dot{x}^α についての2次形式を定義すれば、 E はスカラーであり、従って

$$\begin{aligned} \frac{DE}{dt} &= \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{D}{dt} (a_{\beta\alpha}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \\ &a_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta \frac{D\dot{x}^\alpha}{dt} = a_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta \frac{D\dot{x}^\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (1.6)$$

が成立つ。

(1.3) と (1.6) とから

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

が得られる。即ち擬似計量接続空間の任意の道に沿ってスカラー量 $E = \frac{1}{2} a_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ はパラメタ t に関して不変である。

さて我々は、パラメタ t として特に時間変数を取り、かつそれが $(n+1)$ 個の座標の中の第 0 座標と一致する場合を考えよう。即ち

$$x^0 = t \quad (1.8)$$

としよう。従って当然

$$\dot{x}^0 = 1 \quad (1.9)$$

である。このとき上述のスカラー量 E は物理学や力学における普通の意味でのエネルギーに対応することが第 2 節で行われる力学的考察から示される。Schouten¹⁾によればこのような構造を与えた $(n+1)$ 次元空間はフィルム空間と呼ばれ、レオノームな力学系の考察に役立てられている。

この言葉を用いれば(1.7)は次のように述べられよう。即ち、擬計量接続フィルム空間の道に沿って、時間と無関係な不変なエネルギーが存在する。

1.2 力学系の背景空間としての擬計量接続フィルム空間

前小節で構成された擬計量接続フィルム空間において、接続係数 $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ を適当に制限することによって、道の方程式(1.3)の $\alpha = 1, \dots, n$ に対する n 個の成分を、 n -自由度の力学系の運動方程式に対応させよう。このような取扱いは既に 9) において K. Kondo により逸散を伴う力学系の議論の際になされている。

擬計量接続空間の接続係数はよく知られているように

$$\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = \{\frac{\alpha}{\gamma\beta}\} + S_{\gamma\beta}^\alpha + 2S_{(\gamma\beta)}^\alpha \quad (1.10)$$

なる構造を有している。ここに $S_{\gamma\beta}^\alpha$ は $(n+1)$ 次元の振率テンソルであり

$$\begin{cases} \{\frac{\alpha}{\gamma\beta}\} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\alpha\delta} [\gamma\beta, \delta] \\ [\gamma\beta, \delta] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\partial_\gamma a_{\beta\delta} + \partial_\beta a_{\delta\gamma} - \partial_\delta a_{\gamma\beta}) \end{cases}$$

は $(n+1)$ 次元計量テンソル $a_{\beta\alpha}$ およびその反変成分 $a^{\alpha\delta}$ から導かれる Christoffel 記号である。式(1.10)を道の方程式(1.3)に代入すれば

$$\ddot{x}^\alpha + \{\frac{\alpha}{\gamma\beta}\} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma + 2S_{(\gamma\beta)}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (1.11)$$

或いは

$$a_{\alpha\delta} \ddot{x}^\delta + ([\gamma\beta, \alpha] + 2S_{\alpha(\gamma\beta)}) \dot{x}^\beta \dot{x}^\delta = 0 \quad (1.11)'$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n)$$

を得る。ここに $(\gamma\beta)$ は指標 γ, β についての対称演算記号である。上式は(1.9)の制限の下で次の 2 種類の成分に分離される。

$$\begin{aligned} a_{\lambda\nu} \ddot{x}^\nu + ([\nu\mu, \lambda] + 2S_{\lambda(\nu\mu)}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ + 2([\alpha\mu, \lambda] + 2S_{\lambda(\alpha\mu)}) \dot{x}^\mu + \\ ([\alpha\alpha, \lambda] + 2S_{\lambda\alpha\alpha}) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} a_{\alpha\kappa} \ddot{x}^\kappa + ([\nu\mu, \alpha] + 2S_{\alpha(\nu\mu)}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ + 2([\alpha\mu, \alpha] + 2S_{\alpha(\alpha\mu)}) \dot{x}^\mu + \\ [\alpha\alpha, \alpha] = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$(\kappa, \lambda, \mu, \nu = 1, \dots, n)$$

さてここで一般的な n -自由度の力学系に対して、 $(n+1)$ 次元計量接続フィルム空間が適切な背景空間となり得ることを示そう。そのために先ず(1.12)の n 個の成分が n -自由度の力学系の運動方程式に対応し、同時に(1.13)がそれと適合することを要求しよう。すると(1.13)は速度 \dot{x}^κ 、加速度 \ddot{x}^κ といった運動学的な量と無関係に満足されねばならない。従って次の条件式が成立する。

$$a_{\alpha\kappa} = 0 \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} [\nu\mu, \alpha] + 2S_{\alpha(\nu\mu)} &= 0 \\ \text{即ち } 2S_{\alpha(\nu\mu)} &= \frac{1}{2} \partial_\alpha a_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} [\alpha\mu, \alpha] + 2S_{\alpha(\alpha\mu)} &= 0 \\ \text{即ち } 2S_{\alpha(\alpha\mu)} &= -\frac{1}{2} \partial_\mu a_{\alpha\alpha} \\ \text{或いは } S_{\mu\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} \partial_\mu a_{\alpha\alpha} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$[\alpha\alpha, \alpha] = 0 \quad \text{即ち } \partial_\alpha a_{\alpha\alpha} = 0 \quad (1.17)$$

(1.1) と (1.14) を用いると

$$\partial_\alpha a_{\lambda\kappa} = \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu a_{\mu\kappa} + \Gamma_{\alpha\kappa}^\mu a_{\mu\lambda}$$

が得られ、また(1.16)を用いて

$$[\alpha\alpha, \lambda] + 2S_{\lambda\alpha\alpha} = -[\alpha\alpha, \lambda] = \frac{1}{2} \partial_\lambda a_{\alpha\alpha}$$

が得られるから、これらを用いて(1.12)は次のように書ける。

$$a_{\lambda x} \ddot{x}^x + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu + \frac{1}{2} \partial_\lambda a_{00} = q_\lambda \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} q_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} -4 S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}^\mu - 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= 2 (S_{0\lambda\mu} + S_{\mu\lambda 0}) \dot{x}^\mu - 2 S_{\lambda\nu\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \end{aligned} \quad (1.19)$$

ここで

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a_{\lambda x} \dot{x}^x \dot{x}^\lambda - \frac{1}{2} a_{00} \quad (1.20)$$

と定義すれば(1.18)は次の形に書けることがわかる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = q_\lambda \quad (1.21)$$

即ち、(1.18)は解析力学における Lagrange の運動方程式の構造を有している。ここに L はいわゆる Lagrange 関数に対応し、 q_λ は保存力以外の外力に対応している。このように道の方程式（の非時間成分）が力学方程式の性格を有するから、計量接続フィルム空間は或る制限の下での力学系の適切な背景空間となり得ることがわかる。

2. 力学的考察

前節で示された可能性を確かめるために、本節では解析力学からの諸概念を用い、幾何学的量と物理学的量との間の対応について考え、数種類の振率テンソル成分が見掛け外力の構成要素として自然に導入されることを示す。その上で、最も簡単な例として異種の2つの部分系から成る力学系（電気回転機械、流体回転機械等）におけるエネルギー変換の問題を扱う。

2.1 Lagrange-Hamilton 表現

古典解析力学における Lagrange-Hamilton の変分原理の表現を部分積分によって変形すれば次式を得る。

$$\delta \int L dt = \delta \int (y_\lambda \dot{x}^\lambda - H) dt$$

$$\begin{aligned} &= \int \delta y_\lambda (\dot{x}^\lambda - \frac{\partial H}{\partial y_\lambda}) dt + [y_\lambda \delta x^\lambda] \\ &\quad - \int \delta x^\lambda (\dot{y}_\lambda + \partial_\lambda H) dt \end{aligned}$$

ただしここに

$$y_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \quad (2.1)$$

$$H \stackrel{\text{def}}{=} y_\lambda \dot{x}^\lambda - L \quad (2.2)$$

とする。一方 Lagrange の方程式(1.21)は

$$\delta \int L dt + \int \delta x^\lambda q_\lambda = 0$$

から導かれることが知られている（例えば15）を参照）から、次の関係式が得られる。

$$\dot{x}^\lambda = \frac{\partial H}{\partial y_\lambda}, \quad \dot{y}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial x^\lambda} + q_\lambda$$

これはいわゆる Hamilton の正準方程式の一般化である。これを用いると

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \dot{x}^\lambda q_\lambda \quad (2.3)$$

なる関係が得られる。

(2.1), (2.2)において前節で定義した(1.20)を用いると

$$H = \frac{1}{2} a_{\lambda x} \dot{x}^x \dot{x}^\lambda + \frac{1}{2} a_{00} = T + U \quad (2.4)$$

を得る。ただしここに

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a_{\lambda x} \dot{x}^x \dot{x}^\lambda, \quad U \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a_{00} \quad (2.5)$$

である。明らかに T , U および H は前節で定義された $E = \frac{1}{2} a_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ と同じ次元的性格を有している。慣用的な力学的用語でいえば、これらはそれぞれ運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーおよび全エネルギーである。 H が全エネルギーと呼ばれるのは、力学系が(1.14)のフィルム空間条件を満足する限り

$$E = \frac{1}{2} a_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{1}{2} a_{\lambda x} \dot{x}^x \dot{x}^\lambda + \frac{1}{2} a_{00} = H$$

となって、(1.7)により H が時間に対して保存されるからである。

通常、力学における普通の意味での保存系に対

する Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0$$

或いは我々の記号で書けば

$$a_{\lambda\kappa} \ddot{x}^\kappa + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\partial_\lambda U$$

である。これは前節で得られたより一般的な方程式(1.18)において

$$\begin{cases} q_\lambda = 0 \\ \partial_0 a_{\mu\lambda} = \partial_\lambda a_{\mu 0} = 0 \end{cases}$$

なる条件を課した特別の場合に相当することがわかる。

2.2 見掛け外力と振率テンソル

方程式(1.18)を

$$a_{\lambda\kappa} \ddot{x}^\kappa + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \partial_\lambda a_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu = f_\lambda \quad (2.6)$$

$$f_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} q_\lambda - \frac{1}{2} \partial_\lambda a_{00} \quad (2.7)$$

と書き直せば、 f_λ は見掛け外力であり、(1.16)および(1.19)により次のように書ける。

$$f_\lambda = -S_{\lambda 00} + 2S_{0(\lambda\mu)} \dot{x}^\mu + 2(S_{\mu\lambda 0} + S_{0[\lambda\mu]}) \dot{x}^\mu - 2S_{\lambda\nu\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.8)$$

即ち、見掛け外力は次の4種の非リーマンの量により構成されている。

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } -S_{\lambda 00} (= -\partial_\lambda U) \\ \text{ii) } 2S_{0(\lambda\mu)} \dot{x}^\mu \\ \text{iii) } 2(S_{\mu\lambda 0} + S_{0[\lambda\mu]}) \dot{x}^\mu \\ \text{iv) } -2S_{\lambda\nu\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

このように見掛け外力はすべて振率テンソルに関連して与えられる。従って見掛け外力が存在する限り、全エネルギーの保存を前提とする定式化を行うためには、計量接続空間に振率を導入することが不可欠である。

2.3 エネルギー変換と振率テンソル

前節で導入された見掛け外力 f_λ によりなされる

仕事率或いは動力 P は(2.8)に \dot{x}^λ を乗じて和をとることによって次のように得られる。

$$P = f_\lambda \dot{x}^\lambda = -\dot{x}^\lambda S_{\lambda 00} + 2S_{0(\lambda\mu)} \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda \quad (2.10)$$

即ち、見掛け外力4種類(2.9)のうち、i), ii)だけが全体の動力 P に貢献し、他のiii), iv)によるものは係数 $2(S_{\mu\lambda 0} + S_{0[\lambda\mu]})$ および $-2S_{\lambda\nu\mu}$ のもつ前2指標についての交代性によって全体としては零になる。

そこで力学系内でのエネルギー交換の様相を明らかにするために、力学系が2つの異種の部分系より成る場合を考えてみよう。G. Kronが扱った電気回転機械力学系の場合5), 6)や以前に我々の扱った流体回転機械力学系の場合16), 10)一前者は剛体的部分系(ローター)と電気的部分系(ローター電流および外部巻線電流)とから成り、後者は剛体的部分系(インペラー)と流体的部分系(インペラー内流れおよび案内羽根内流れ)とから成っている一が全エネルギー保存の仮定の下でこれに含まれることはいうまでもない。

全系の n -自由度を2つの部分系に対してそれぞれ

$$\lambda, \mu, \nu = 1, m, n, \dots (=1, \dots, p)$$

および

$$\lambda, \mu, \nu = u, v, w, \dots (=p+1, \dots, n)$$

なる指標によって区別しよう。先ず見掛け外力(2.8)において全系の動力 P に貢献する項—第1項と第2項—を除けば f_λ は次のように分離される。

$$\left\{ \begin{array}{l} f_l = 2(S_{[\mu l] 0} + S_{0[\mu l]}) \dot{x}^\mu - 2S_{[\mu \nu] \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ f_u = 2(S_{[\mu u]}) \dot{x}^\mu - 2S_{[u \nu] \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$\quad (2.12)$$

$$(\mu, \nu = 1, \dots, n; l = 1, \dots, p;$$

$$u = p+1, \dots, n)$$

これらの成分による部分系動力 $P(l)$ および $P(u)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} P(l) &= f_l \dot{x}^l = 2(S_{[\mu l] 0} + S_{0[\mu l]}) \dot{x}^\mu \dot{x}^l - \\ &\quad 2S_{[\mu \nu] \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^l \\ &= 2(S_{[u l] 0} + S_{0[u l]}) \dot{x}^u \dot{x}^l \\ &\quad - 2S_{[u \nu] \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^u \dot{x}^l \end{aligned} \quad (2.13)$$

および同様にして

$$P(u) = f_u \dot{x}^u = 2(S_{[u]o} + S_{o[u]}) \dot{x}^1 \dot{x}^u - 2S_{[u] \mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^1 \dot{x}^u \quad (2.14)$$

であり、明らかに

$$P(1) = -P(u) \quad (2.15)$$

となっている。即ち、振率テンソルの成分 $2(S_{u1o} + S_{o[1u]})$ および $-2S_{1u\mu}$ は部分系(1, m, n, ...)と部分系(u, v, w, ...)との間のエネルギー変換に貢献し、その変換量は

$$P(1) = -P(u) = 2(S_{u1o} + S_{o[1u]}) \dot{x}^u \dot{x}^1 - 2S_{1u\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^u \dot{x}^1 \quad (2.16)$$

である。通常の動力機械においてはこの型のエネルギー変換が問題となる。*)

次に(2.9)の i) 即ち $-S_{\lambda oo}$ は上とは別種のエネルギー交換に関係がある。即ち全エネルギー保存の立場では

$$-dx^\lambda S_{\lambda oo} = -dU = dT \quad (2.17)$$

であるから、振率テンソルの成分 $S_{\lambda oo}$ は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーとの間の交換に関係するといえる。

これはエネルギー交換の過程において振率テンソルの果す役割の最も単純な説明を与えている。

最後に(2.9)のii) 即ち $2S_{o(\lambda\mu)} \dot{x}^\mu$ による動力

$$F \stackrel{\text{def}}{=} 2S_{o(\lambda\mu)} \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda \quad (2.18)$$

は摩擦損失或いはそれと同種の逸散の構造を有している(9)参照)。しかし現在の我々の立場では全エネルギーが保存されるから、それは計量テンソルを構成する見掛け慣性係数 $a_{\lambda\kappa}$ およびポテンシ

アルエネルギー a_{oo} の時間的な変化によって補償されている(ただしこれは部分系間のエネルギー交換には関係がない)。即ち、振率テンソルの成分 $2S_{o(\lambda\mu)}$ は慣性的なものから非慣性的なものへのエネルギー伝達に関係がある。

3. 位置付け可能部分系と位置付け不可能部分系との合成系

前節においては異種の2つの部分系から成る力学系について、その部分系間でのエネルギー変換について考察した。本節では更に多くの部分系から成る複雑な力学系に対しても同様な扱いが可能になるように形式的な拡張を行なう。拡張の方向はいろいろ考えられるがその1つとして、 r 個の部分系より成る1つの力学系の座標(自由度) x^α ($\alpha = 0, 1, \dots, n$) の中の僅かな数の座標のみが観測されて、これまでの考察における $a_{\mu\lambda}, S_{\nu\mu\lambda}, S_{\lambda(o\kappa)}, S_{\lambda oo}$ および a_{oo} のごとき構造的な量がすべてこの僅かな観測可能な座標だけの関数となるような場合を考えよう。このような場合についての考察は、電気機械5), 航空機9), 流体機械10)などの運動の解析に対して適用できるのみならず、多数の微視的自由度を含む工学力学系の巨視的理論に対しても適用されるので特に研究に値しよう。

3.1 位置付け可能部分系と位置付け不可能部分系

座標の観測が可能である部分系を位置付け可能であると呼び、そうでないものを位置付け不可能であると呼ぶことにしよう。 r 個の部分系をそれぞれ(1), (2), ..., (r)で表わし、部分系(1)だけが位置付け可能で他のすべての部分系(2), (3), ..., (r)は位置付け不可能であるとしよう。部分系のこのような分類に応じて全系の自由度もまた2種類に分けられるが、それぞれの自由度を同様に位置付け可能自由度および位置付け不可能自由度と呼ぶ。これらを表わす記号を下表にまとめて示す。

	位置付け可能		位置付け不可能			
部分系	1	2	3	...	r	
自由度	x_1^x	x_2^x	x_3^x	...	x_r^x	

*) 前述の5), 10)における扱いでは、背景空間が単なる擬計量接続空間であり、フィルム空間の構造を有していないため、(2.16)の第1項に相当するもの(速度成分について1次の力に基づくエネルギー変換)が含まれず第2項のみが得られている。この意味で現在の扱いは5), 10)における扱いを更に拡張したものとなっている。

計量テンソル $a_{\beta\alpha}$ は、上述のように部分系(1)の自由度だけの関数とすると

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} a_{\beta\alpha} &= 0 \\ q > 1; \alpha, \beta &= 0, 1, \dots, n; \lambda, \dots \\ &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1)$$

である。ここで解析を簡単にするため部分系エネルギー間の直交性

$$[a_{\lambda k}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{\lambda x} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\lambda x} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{rr}^{\lambda x} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

を仮定し*)、フィルム空間条件(1.14)を用いれば、 $a_{\beta\alpha}$ の非零成分は

$$a_{\mu\lambda}, a_{\mu\lambda}, a_{oo} \quad (q > 1)$$

のみであり、従って $a_{\beta\alpha}$ の微係数で意味のあるものは

$$\partial_1 a_{11}^{\mu\lambda}, \partial_1 a_{qq}^{\mu\lambda}, \partial_1 a_{oo}, \partial_o a_{11}^{\mu\lambda}, \partial_o a_{qq}^{\mu\lambda}$$

だけである。よって第1種 Christoffel 記号 $[\gamma\beta, \alpha]$ の非零成分は

$$\left. \begin{aligned} [\nu\mu, \lambda] &= \frac{1}{2} (\partial_\nu a_{11}^{\mu\lambda} + \partial_\mu a_{11}^{\lambda\nu} - \partial_\lambda a_{11}^{\mu\nu}) \\ [\nu\mu, \lambda] &= -[\mu\lambda, \nu] = \frac{1}{2} \partial_\nu a_{qq}^{\mu\lambda} \quad (q > 1) \\ [o\mu, \lambda] &= -[\mu\lambda, o] = \frac{1}{2} \partial_o a_{pp}^{\mu\lambda} \quad (p \geq 1) \\ [o\lambda, o] &= -[oo, \lambda] = \frac{1}{2} \partial_\lambda a_{oo} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

*)この仮定は本質的なものではないが、電気回転機械や流体回転機械の力学系については、この仮定を許容する扱いが可能であることが示されている (8), (10) 参照)。

である。

次に計量接続の条件(1.1) 即ち

$$D_\gamma a_{\beta\alpha} = \partial_\gamma a_{\beta\alpha} - 2 \Gamma_{\gamma(\beta\alpha)} = 0$$

によって $\Gamma_{\gamma(\beta\alpha)}$ の非零成分は次のように限定される。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{1\text{pp}}^{(\mu\lambda)} &= \frac{1}{2} \partial_1 a_{\text{pp}}^{\mu\lambda} \\ \Gamma_{o\text{pp}}^{(\mu\lambda)} &= \frac{1}{2} \partial_o a_{\text{pp}}^{\mu\lambda} \quad (p \geq 1) \\ \Gamma_{1(o\lambda)} &= \frac{1}{2} \partial_1 a_{oo} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

更にフィルム空間条件(1.15)および計量テンソルの直交条件(3.2)を用いれば次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 2S_{o(11)}^{(\nu\mu)} &= \frac{1}{2} \partial_o a_{11}^{\nu\mu} \\ 2S_{o(qq)}^{(\nu\mu)} &= \frac{1}{2} \partial_o a_{qq}^{\nu\mu} \quad (q > 1) \\ S_{o(pq)}^{(\nu\mu)} &= 0 \quad (p \neq q) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

3.2 力学系の運動方程式

現在考察中の力学系の運動方程式を求めるには、第1節で述べた道方程式(1.18)において、前小節で得られたすべての関係式を用いればよい。即ち、部分系(1)に対しては $\lambda = \lambda_1$ として

$$\begin{aligned} a_{11}^{\lambda x} \ddot{x}_1^\lambda + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_1^\nu \dot{x}_1^\mu + \partial_o a_{11}^{\mu\lambda} \dot{x}_1^\mu &= f_{\lambda_1} \\ f_{\lambda_1} &\stackrel{\text{def}}{=} q_1 - \frac{1}{2} \partial_\lambda a_{oo} = -\frac{1}{2} \partial_\lambda a_{oo} - \\ &\quad 4S_{1(o\mu)}^{\lambda\mu} - 2S_{1(\nu\mu)}^{\lambda\mu} \dot{x}_1^\nu \dot{x}_1^\mu \end{aligned}$$

が得られ、更に(3.3)を考慮して上式を展開し整理すれば

$$\begin{aligned} a_{11}^{\lambda x} \ddot{x}_1^\lambda + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_1^\nu \dot{x}_1^\mu + \partial_o a_{11}^{\mu\lambda} \dot{x}_1^\mu &= -\partial_\lambda U - [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^\nu \dot{x}_q^\mu - 4S_{1(o\mu)}^{\lambda\mu} \dot{x}_1^\mu \\ &\quad - 2S_{1(11)}^{\lambda\mu} \dot{x}_1^\nu \dot{x}_1^\mu - 4S_{1(oq)}^{\lambda\mu} \dot{x}_q^\mu \\ &\quad - 4S_{1(q1)}^{\lambda\mu} \dot{x}_q^\nu \dot{x}_q^\mu - 2S_{1(qq)}^{\lambda\mu} \dot{x}_q^\nu \dot{x}_q^\mu \end{aligned} \quad (3.6)$$

が得られる。ただしここに $U = \frac{1}{2} a_{00}$ を用いている。これが位置付け可能部分系(1)に対する運動方程式である。

一方(1・18)において $\lambda = \lambda_q$ ($q > 1$) とすれば

$$\begin{aligned} a_{\lambda q} \ddot{x}_q^x + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu + \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_q^\mu &= f_\lambda \\ f_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} q_\lambda - \frac{1}{2} \partial_\lambda a_{00} &= -4 S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_q^\mu - \\ &2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \quad (q > 1) \end{aligned}$$

が得られる。ここに $a_{\mu\lambda} = 0$, $\partial_\lambda a_{00} = 0$ が用いられている。更に(3・3)を用いて上式を展開し整理すれば

$$\begin{aligned} a_{\lambda q} \ddot{x}_q^x + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^\nu + \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_q^\mu &= -[\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^\nu - 4 S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_1^\mu - 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \\ &\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu - 4 S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_q^\mu - 4 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^\nu \\ &- 2 S_{\lambda(q\mu)} \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \quad (q > 1) \quad (3.7) \end{aligned}$$

を得る。これが位置付け不可能部分系(q)に対する運動方程式を与える。

3.3 エネルギー変換の幾何学的考察

前節で得られた我々の力学系の各部分系に対する運動方程式(3・6)および(3・7)にそれぞれ \dot{x}_1^i および \dot{x}_q^j を乗じて和をとることによって、各部分系に対する動力方程式は次のように書下せる。

位置付け可能部分系(1)：

$$\begin{aligned} a_{\lambda 1} \ddot{x}_1^x + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j \dot{x}_1^k + \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j &= -\dot{x}_1^i \partial_i U - [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu - 4 S_{\lambda(0\mu)} \\ &\dot{x}_1^i \dot{x}_1^j - 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j \dot{x}_1^k - 4 S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \\ &- 4 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu - 2 S_{\lambda(q\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \end{aligned} \quad (3.8)$$

位置付け不可能部分系(q)： ($q > 1$)

$$\begin{aligned} a_{\lambda q} \ddot{x}_q^x + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_1^k + \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j &= -[\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_1^k - 4 S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \\ &- 4 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_q^k - 2 S_{\lambda(q\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_q^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_1^k - 4 S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \\ &- 4 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_1^k - 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_q^k \end{aligned} \quad (3.9)$$

力学系における動力授受の様相を明らかにするため、上の2式をそれぞれ次のように書き直す。

位置付け可能部分系(1)：

$$\begin{aligned} a_{\lambda 1} \ddot{x}_1^x + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j \dot{x}_1^k + \frac{1}{2} \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j &+ \dot{x}_1^i \partial_i U \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{A}} &= -\frac{1}{2} \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j - [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{B}} &- 4 (S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j + S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{D}} &- 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_1^j \dot{x}_1^k - 4 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{E}} &- 2 S_{\lambda(q\mu)} \dot{x}_1^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \end{aligned} \quad (3.10)$$

位置付け不可能部分系(q)： ($q > 1$)

$$\begin{aligned} a_{\lambda q} \ddot{x}_q^x + [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_1^k + \frac{1}{2} \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{A}'} \\ = -\frac{1}{2} \partial_0 a_{\mu\lambda} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j - [\nu\mu, \lambda] \dot{x}_q^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^k &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{B}'} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{C}'} \\ - 4 (S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j + S_{\lambda(0\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_1^k) &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{D}'} \\ - 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^j \dot{x}_q^k - 4 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^k &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{E}'} \\ - 2 S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^i \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^k &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{E}'} \end{aligned} \quad (3.11)$$

これらの2式において、次の諸関係が成立することは容易に確かめられる。

$$(i) \text{E} + \text{E}' = 0$$

∵ 振率テンソルの交代性：

$$S_{\lambda(\nu\mu)}^{\mu} = 0 \text{ および } S_{\lambda(\nu\mu)}^{\mu} = 0$$

$$(ii) \textcircled{C} + \textcircled{C}' = 0$$

$$\because (3.3) \text{より} -[\nu_{\frac{q}{q}}, \lambda] = [\lambda_{\frac{1}{q}}, \mu_q]$$

$$(iii) \textcircled{B} + \textcircled{B}' + \textcircled{D} + \textcircled{D}' = 0$$

$$\because \textcircled{D} + \textcircled{D}'$$

$$\begin{aligned} &= 2S_{0(\lambda\mu)} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu + 2S_{0(\frac{\lambda}{q}\frac{\mu}{q})} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\mu \\ &= \frac{1}{2} \partial_0 a_{\frac{\mu}{11}} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu + \frac{1}{2} \partial_0 a_{\frac{\mu}{qq}} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\mu \\ &= -\textcircled{B} - \textcircled{B}' \end{aligned}$$

$$(iv) \textcircled{A} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} a_{\frac{\lambda}{11}} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\lambda \right) + \frac{dU}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{dT(1)}{dt} + \frac{dU}{dt} \\ T(1) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a_{\frac{\lambda}{11}} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\lambda \end{aligned}$$

$$\textcircled{A}' = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} a_{\frac{\lambda}{qq}} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\lambda \right) = \frac{dT(q)}{dt}$$

$$T(q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a_{\frac{\lambda}{qq}} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\lambda$$

これらの関係から、我々の力学系におけるエネルギーの挙動に関するいくつかの特徴を論ずることができる。

先ず(i), (ii), (iii)の関係によって、位置付け可能部分系と位置付け不可能部分系との間に、3種のエネルギー変換が考えられる。

(i) : この関係において、 \textcircled{B} 中の $S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu$ および \textcircled{B}' 中の $S_{\lambda(\nu\mu)} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu$ は振率テンソルの交代性によりそれら自身零となる。従って部分系(1)と部分系(q) ($q > 1$) との間で変換される単位時間当りの正味エネルギー量は

$$\begin{aligned} &-4S_{\frac{\lambda}{q1}}^{(\nu\mu)} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu \dot{x}_q^\nu - 2S_{\frac{\lambda}{1qq}}^{(\nu\mu)} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \\ &= -2S_{\frac{\lambda}{q1}}^{\nu\mu} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu \dot{x}_q^\nu - 2S_{\frac{\lambda}{1qq}}^{\nu\mu} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \end{aligned} \quad (3.12)$$

或いは

$$\begin{aligned} &-4S_{\frac{\lambda}{q1}}^{(\nu\mu)} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^\nu - 2S_{\frac{\lambda}{q11}}^{(\nu\mu)} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \\ &= -2S_{\frac{\lambda}{q1}}^{\nu\mu} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\mu \dot{x}_1^\nu - 2S_{\frac{\lambda}{q11}}^{\nu\mu} \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \end{aligned} \quad (3.12)'$$

である。

(ii) : この関係において、

$$\begin{aligned} &-[\nu_{\frac{q}{q}}, \lambda] \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu = [\lambda_{\frac{1}{q}}, \mu_q] \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu \\ &= \dot{x}_1^\lambda \frac{1}{2} \partial_{\frac{\lambda}{1}} a_{\frac{\nu\mu}{qq}} \dot{x}_q^\mu \dot{x}_q^\nu = \dot{x}_1^\lambda \partial_{\frac{\lambda}{1}} T(q) \end{aligned} \quad (3.13)$$

に注意すれば、このエネルギー変換が、位置付け不可能な部分系の運動エネルギー $T(q)$ が位置付け可能自由度 \dot{x}_1^λ に依存するという我々の前提によって生ずるものであることがわかる。

(iii) : これは位置付け可能および不可能な逸散力によるエネルギー交換を意味する。ここで注意すべきは条件(3.5)の第3式によって

$$\begin{aligned} \textcircled{B} + \textcircled{D} &= -4S_{\frac{\lambda}{1(q\mu)}} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_q^\mu \\ &= 2(S_{\frac{\mu}{q1}}^{\lambda 0} + S_{0[\frac{\lambda}{1}\mu]}) \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_q^\mu \end{aligned}$$

となることである。ただしここに

$$\begin{aligned} -4S_{\frac{\lambda}{1(q\mu)}} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu &= 2S_{0\lambda\mu} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu \\ &= \frac{1}{2} \partial_0 a_{\frac{\mu}{11}} \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_1^\mu \end{aligned}$$

が使用されている。同様にして

$$\textcircled{B}' + \textcircled{D}' = 2(S_{\frac{\mu}{1q}}^{\lambda 0} + S_{0[\frac{\lambda}{1}\mu]}) \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_q^\mu$$

となっている。従ってこの関係によって伝達される単位時間当りのエネルギー量は

$$2(S_{\frac{\mu}{q1}}^{\lambda 0} + S_{0[\frac{\lambda}{1}\mu]}) \dot{x}_1^\lambda \dot{x}_q^\mu \quad (3.14)$$

或いは

$$2(S_{\frac{\mu}{1q}}^{\lambda 0} + S_{0[\frac{\lambda}{1}\mu]}) \dot{x}_q^\lambda \dot{x}_1^\mu \quad (3.14)'$$

である。

次に直ちに知れるように

$$\textcircled{A} + \sum_{q>1} \textcircled{A}' = 0$$

が成立つ。即ち

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{p=1}^r T(p) + U \right) = 0$$

であって、力学系に対する全エネルギーが保存されている。

またポテンシャルエネルギー U が位置付け可能部分系と位置付け不可能部分系との間のエネルギー交換に関係していないことも注目すべきである。

以上をまとめて次の結論を得る。

- 1) 全系に対するエネルギー保存は、たとえ系を1つの位置付け可能部分系といくつかの位置付け不可能部分系とに分離しても保持される。
- 2) 振率テンソルの成分 $S_{\lambda\nu\mu}^{1q1}$ および $S_{\lambda\nu\mu}^{1qq}$ は上述の両種の部分系間の、速度成分について2次の力に基くエネルギー変換に関与する。
- 3) 振率テンソルの成分 $S_{o\lambda\mu}^{11}$ は位置付け可能自由度のみによる逸散に、また $S_{o\lambda\mu}^{qq}$ は位置付け不可能自由度に基く逸散に、それぞれ関与する。
- 4) 振率テンソルの成分 $S_{q1}^{\mu\lambda o}$ および $S_{o[\lambda\mu]}^{1q}$ は速度成分について1次の力に基くエネルギー変換に関与する。
- 5) 以上の構成において、すべての位置付け不可能部分系の運動エネルギーが位置付け可能自由度のみに依存することを前提としているが、このことが力学系においてエネルギー変換が可能であるための因子の1つになっている。

文 献

- 1) J. A. Schouten : Tensor Analysis for Physicists (Clarendon Press, Oxford 1951).
- 2) E. T. Whittaker : Analytical Dynamics (Cambridge University Press, 4th ed. 1937).
- 3) J. L. Synge and A. Schild : Tensor Calculus (University of Toronto Press 1949).
- 4) A. J. McConnel : Application of Tensor Analysis (Dover Publication Inc., New York 1947).
- 5) G. Kron : J. Math. Phys. **13**, 103 (1934).
- 6) G. Kron : Phys. **7**, 142 (1936).
- 7) G. Kron : The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery (General Electric Review, Schenectady, New York 1935-1938).
- 8) K. Kondo and Y. Ishizuka : RAAG Memoirs **1**, B-I, 185 (1955).
- 9) K. Kondo : RAAG Memoirs **1**, B-IV, 138 (1955).
- 10) K. Kondo, S. Nishimura and T. Uehara : RAAG Memoirs **2**, B-VII, 150 (1958).
- 11) K. Kondo and M. Fujinaka : RAAG Memoirs **1**, B-V, 335 (1955).
- 12) K. Kondo, T. Uehara and K. Sato : RAAG Research Notes 3rd Series, No. 157, (1970).
- 13) J. A. Schouten and D. J. Struik : Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, II (Groningen-Batavia, Nordhoff 1935, 1938),
- 14) J. A. Schouten : Ricci-Calculus (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954).
- 15) R. Weinstock : Calculus of Variations, with Applications to Physics and Engineering (McGraw-Hill, New York 1952).