

グラフの平面性の判定について

最首 和雄*・小野寺力男**・佐藤 隆**

*工学部 共通講座

**工学部 電気工学科

(昭和50年9月25日受理)

1. はじめに

グラフの平面性判定についてはいろいろ考察されている。3連結グラフの平面性判定方法とし、R. Tarjan, J. Hopcraft⁽²⁾ はグラフの木を作り、その端点を処理して平面性の判定をする方法を提案している。K. Steinglitz, L. Weingberg⁽³⁾ と B. Knauer⁽⁴⁾ は Tutte の3連結面グラフの諸定理にもとづき、グラフを単純化して、平面性を判定する方法を述べている。

グラフの平面性判定では3連結グラフでない場合の効率的な処理方法が問題である。ここでは3連結平面グラフに網目集合を定義し、グラフのいくつかの性質を導いた。それを利用して3連結グラフの平面性を効率的に判定できることを示す。さらに一般のグラフの平面性の判定にもこの方法が拡張できることを示す。

ここでは次のようにグラフを表現した。

グラフ G の辺集合、節点集合をおのおの $E(G)$, $V(G)$ とする。 G を集合とする場合、 $G = \{E(G), V(G)\}$ を意味する。辺 $e_k = (v_x, v_y) = (v_y, v_x)$ とする。単純閉路 C をそれに含まれる辺と節点の集合で定義する。3つの閉路 C , C_1 , C_2 で、 C が C_1 , C_2 のいずれか一方のみ含まれる辺と、その辺の両端の節点からなる閉路なら $C = C_1 \oplus C_2$ と書く。 $|\cdot|$ は集合の要素の数、 $\|\cdot\|$ は集合の辺の数とする。 $\|C\| = n$ なら n 側閉路という。ここでは1, 2側閉路を含まないグラフを扱う。

グラフ G , H で各節点、辺に異なる記号が付される。 H の各節点、辺の記号を置換し、 G と対応した隣接関係を保つ記号を付すことができれば、 G と H を同型なグラフとよぶ、また G と H で各グラフの次数2の節点を端点にもつ辺の一方を短絡除去する手順を可能な限り繰返してできるグラフ G_0 , H_0 が同型なら、 G と H を同相なグラフとよぶ。 G が真部分グラフ G_i をもち、 G_i と H_j が同相なら、これらの関係を次式であらわす。

$$G \supset G_i, G \supset H_j, G \simeq H, G_i \simeq H_j, G_0 = H_0 \quad (1)$$

と書く。 G の独立閉路の数を p_G (第1ベッチ数) とする。ここでは3連結平面グラフ G_i で $p_{G_i} = i - 1$ とすると

$$K_4 = G \langle G_0 \langle \dots \langle G_i' \quad (2)$$

なる3連結平面グラフの列 G_0, \dots, G_i' が作れることを証明し、作り方を述べる。また

2 連結グラフについても考察する。

$G_i \simeq G'_i$ で G'_i は 3 連結グラフとする。 G'_i の一辺 $e'_k = (v'_x, v'_y)$ に対応する G_i の道を $l_k = (v_x - v_y) = (v_y - v_x)$ とする。 l_k 上の節点の次数は v_x, v_y では 3 以上, 他の節点の次数は 2 である。

2. 3 連結平面グラフについて

G の閉路集合の部分集合 $M_o(G) = \{C_1, C_2, \dots\}$ を次の定義により網目集合とよぶ。

定義 1. $M_o(G)$ で次の条件が成立すれば網目集合とよぶ。

(1) 任意の 2 個の網目 ($C_a, C_b \in M_o(G)$) で次のいずれかが成立する。

イ. $C_a \cap C_b = \phi$, ロ. $C_a \cap C_b = \{v_x\}$

ハ. $C_a \cap C_b = \{v_x, e_k, v_y\}$

ただし $e_k = (v_x, v_y)$

(2) G のすべての辺でそれを含む網目が唯 2 つ存在する。

任意の 2 節点とそれを端点とする辺を開放除去しても G が分離したグラフにならなければ, G を 3 連結グラフとよぶ。 G が 3 連結平面グラフなら $M_o(G)$ が一意に定まることが知られている。⁽¹⁾ G の部分グラフ G_i, G_j において, $G_i \cup G_j = G, G_i \cap G_j = \{v_1, v_2, v_3\}$ なら, 「 G は v_1, v_2, v_3 で分離すると G_i, G_j になる。」とよぶ。

$G \supset G_i, G_i \simeq G'_i$ とし, 各グラフの節点の次数を $d(v_x, \cdot)$ とすると次式が成立する。

$$d(v_x, G) \geq d(v_x, G_i) = d(v'_x, G'_i) \quad (3)$$

G_i の閉路集合の部分集合を $m(G_i)$ とする。とくに G'_i が 3 連結平面グラフの場合, $M_o(G'_i)$ に対応する G_i の閉路集合を $M(G_i)$ とする。 $M(G_i)$ は網目集合ではないが, $M_o(G'_i)$ の一意性により, $M(G_i)$ も一意に定まる。また次のように G の道集合の部分集合を定義する。

定義 2. $G \supset G_i$ とし, 次の条件を満たす道の集合を $A_1(G, m(G_i))$ とする。

(1) 道 $l_k = (v_x - v_y)$ のとき, v_x, v_y は G_i に含まれ, l_k の他の辺, 節点は G に属し, G_i に属さない。

(2) $m(G_i)$ の要素で v_x, v_y を同時に含むものが唯一つある。

また $A_o(G, m(G_i))$, と $A_2(G, m(G_i))$ を定義 2-(2) を変えて, 次のように定義する $A_o(G, m(G_i))$ の場合

(2)' $m(G_i)$ の要素で v_x, v_y を同時に含むものはない。

$A_2(G, m(G_i))$ の場合

(2)'' $m(G_i)$ の要素で v_x, v_y を同時に含むものは 2 個以上ある。

G の道で両端だけが G_i に属し, 他の節点, 辺は G に属し, G_i に属さない道の集合を $\Omega(G, G_i)$ とすれば次式が成り立つ。

$$\Omega(G, G_i) = \bigcup_{j=0}^2 A_j(G, m(G_i)) \quad (4)$$

ここでグラフの平面性を判定する場合の基本的ないくつかの関係について述べる。

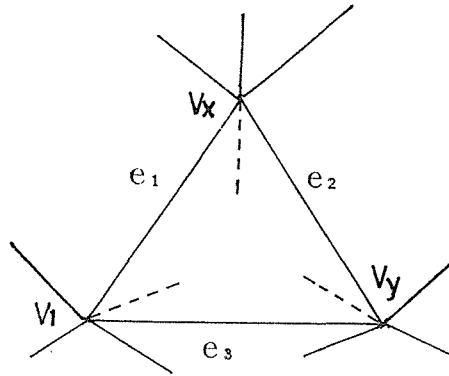
補題 1. $G \supset G_i, G_i \simeq G'_i, G'_i$ は 3 連結平面グラフとする。このとき

(1) $A_o(G, M(G_i)) \neq \phi$ なら, G は非平面グラフである。

(2) $l_k \in A_1(G, M(G_i))$ とする。 $G_{i+1} = G_i \cup l_k$ とすると、 G_{i+1} も同相な3連結平面グラフをもつ。

証明 省略

補題2. $G \supset G_i$, $G_i \simeq G'_i$, G, G'_i は3連結平面グラフとする。 $C_a \in M(G_i)$, $\|C_a\| = 3$, $C_a \in M_o(G)$ とする。このとき G_i に道 $l_k \in A_1(G, M(G_i))$ を加える手順を繰返してできる平面グラフの列を G_i, G_{i+1}, \dots, G_k とする。 $A_1(G, M(G_k)) = \phi$ とすると、 $C_a \in M(G_k)$ である。



第1図 $\|C_a\| = 3$ の例

証明 省略

第1図の如く、 C_a が円順列 $(v_1, e_1, v_x, e_2, v_y, e_3, v_1)$ とする。各グラフ G_j に次々に道 $l_k \in A_1(G, M(G_j))$ を加えても、 l_k には C_a の内部の部分グラフ(点線)を含めることはできないので補題2は自明である。

補題3. $l_k \in A_1(G, M(G_i))$, $\|l_k\| \geq 2$, $l_k = (v_x - v_y)$ とする。 $C \in M(G_i)$, $\{v_x, v_y\} \subset C$ とする。 $G_{i+1} = G_i \cup l_k$ とし、 $C_a, C_b \in M(G_{i+1})$, $C_a \oplus C_b = C$ とすると、 $\|C_a\|, \|C_b\| \geq 4$ である。

証明 省略

補題4. $l_k = (v_x - v_y) \in A_1(G, M(G_i))$, $\|l_k\| = 1$, $C \in M(G_i)$, $\{v_x, v_y\} \subset C$ とする。 $A_1(G, M(G_i))$ には v_x, v_y を端点とする他の道が存在しないとき、 $G_{i+1} = G_i \cup l_k$, $C_a, C_b \in M(G_{i+1})$, $C = C_a \oplus C_b$ とする。 $\|C_a\| = 3$ なら、 $C_a \in M_o(G)$ である。

証明, $C_1, \dots, C'_a \in M_o(G)$, $C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C'_a = C_a$ とする。 C_a を第1図で与える。 C_1, \dots, C'_a の辺のうち e_1, e_2, e_3 以外は G_{i+1} に含まれないと仮定する。このときこれらの網目で (v_x, v_y) を含むものがある。その網目には v_x, v_y を端点とする別な道が存在することになり補題の仮定に反する。

また C_1, \dots, C'_a の辺のうち e_1, e_2, e_3 以外に G_{i+1} に含まれる辺があれば、 $C_a \in M(G_{i+1})$ ということは成り立たなくなる。証明終り

これらの関係から次の定理が成り立つ。

定理1 $G \supset G_i$, $G_i \simeq G'_i$, G, G'_i は3連結平面グラフとする。 G_i の任意の網目 C で $\|C\| \geq 4$ とする。このとき次の手順を繰返す。 $G_i \rightarrow G_j$ とする。

ステップ1. G_j に $l_k \in A_1(G, M(G_j))$, かつ $\|l_k\| \geq 2$ なる道があれば $G_{j+1} = G_j \cup l_k$ を作る。

ステップ2. $l_k \in A_1(G, M(G_j))$, かつ $\|l_k\| \geq 2$ なる道がなければ $\|l_k\| = 1$ なる道を取り, $G_{j+1} = G_j \cup l_k$ を作る。

ステップ3. $G_{j+1} \rightarrow G_j$ とし, ステップ1へ行く。

このときできる平面グラフの列を G_i, \dots, G_j とする。このとき $A_1(G, M(G_j)) = \phi$ なら, $G = G_j$ である。

証明 $G \neq G_j$ とする。補題4より, $C \in M(G_j)$, $\|C\| = 3$, かつ $C \notin M_0(G)$ なる網目は存在しない。したがって $C \in M(G_j)$, $\|C\| \geq 4$, かつ $C \notin M(G)$ なる網目について考察すればよい。このとき $A_2(G, M(G_j)) \neq \phi$ である。補題1より $M(G_j)$ は一意に定まる。このとき G は2連結グラフになり仮定に反する。 証明終り

3. 3連結グラフの平面性の判定方法

3連結平面グラフのこれらの性質から, 平面性を判定するには, 3連結グラフ G で, $G \supset G_4, G_4 \supset K_4, C \in M(G_4)$ で $\|C\| \geq 4$ になるように G_4 を選ぶ。次に順次 $l_k \in A_1(G, M(G_j))$, $\|l_k\| \geq 2$ なる道を G_j に加えて, $G_j \cup l_k \rightarrow G_j$ とする。さらにそのような道がないときは $\|l_k\| = 1$ なる道を加える。こうして $A_1(G, M(G_j)) = \phi$ になったとき, $G = G_j$ なら G を3連結平面グラフと判定できる。アルゴリズムは次のようになる。

アルゴリズム 1

スラップ1. 側数4以上の閉路 $C_a = G_2 \subset G$ をえらぶ。 C_a を2個の網目（内側と外側）とする。

ステップ2. $\{v_x, v_y\} \subset G_2, (v_x, v_y) \in E(G_2)$ なる節点对について, それを両端にもつ道 $l_k \in A_2(G, m(G_2))$, $\|l_k\| \geq 2$ をえらぶ。すべての節点对についてこの条件の道がないとき, $\|l_k\| = 1$ なる道をえらぶ。 $G_3 = G_2 \cup l_k$ とする。 $G_j \leftarrow G_3$ とする。

ステップ3. $G = G_j$ なら G は3連結平面グラフになる。

ステップ4. $d(v_x, G) > d(v_x, G_j)$ なる節点を端点とする道 $\Omega(G, G_i)$ を探索する。

ステップ5. このとき $l_k = (v_x - v_y) \in A_1(G, M(G_j))$ なる道があれば G は非平面グラフ。

ステップ6. $l_k = (v_x - v_y) \in A_1(G, M(G_j))$, $\|l_k\| \geq 2$ なる道があれば $G_j \cup l_k \rightarrow G_j$ とし, $M(G_j)$ を作ってステップ3へもどる。

ステップ7. $l_k = (v_x - v_y) \in A_1(G, M(G_j))$, $\|l_k\| = 1$ なる道があれば $G_j \cup l_k \rightarrow G_j$ とし, $M(G_j)$ を作ってステップ3へもどる。

ステップ8. 別な節点を選んでステップ4へもどる。

4. 2連結平面グラフについて

一般のグラフの平面性の判定では, グラフを分割して3連結部分グラフからなるグラフにする。そして各部分グラフの平面性を判定する方法が提案されている。しかしグラフが3連結グラフでない場合, 3連結部分グラフに分割する方法が不明確であり, 詳しく言及されていない。ここでは前節の方法を利用して2連結グラフの平面性の判定方法を述べる。

定義3. G の閉路集合の部分集合 $m(G)$ が定義1 - (2)のみを満たすとき, それを半網

目集合とよぶ。 $G \supset G_i$ とし、 $l_k \in A_2(G, M(G_i))$ とする。 l_k の端点を含む網目を C_a, C_b とする。この一つをとり、 $C_{a1} \oplus C_{a2} = C_a$ 、 $C_{a1} \cap C_{a2} = l_k$ となる。 C_{a1} 、 C_{a2} を作る。 $G_{i+1} = G_i \cup l_k$ 、 $m(G_{i+1}) = M(G_i) \cup C_{a1}$ 、 $\cup C_{a2} - C_a$ とすると、これは半網目集合であり、 $m(G_{i+1})$ は一意に定まらない。

定義4. $G \supset G_i$ 、 $v_x \in G_i$ 、 $v_y \in G$ とする。 $G - G_i$ なるグラフの木で、 v_y を含むものを $T(v_y, \tilde{G}_i)$ とする。

ただし $\tilde{G}_i = G - G_i$ は G から $V(G_i)$ とそれを端点にもつ辺を除去したグラフとする。2連結グラフの処理における問題点は定理1が成り立たないことである。 $\|C_a\| \geq 4$ 、 $C_a \in M(G_i)$ としたとき、 $l_k \in A_1(G, M(G_i))$ なる道を順次加えてできるグラフの列を G_i, G_{i+1}, \dots, G_k とする。 $A_1(G, M(G_k)) = \phi$ のとき、 $C_a \in M(G_k)$ 、 $C_a \in M(G)$ なる場合が生じる。

\tilde{G}_i は一般には非連結で、 \tilde{G}_i の連結な部分グラフを $\tilde{G}_{i,1}, \tilde{G}_{i,2}, \dots$ とする。 $G_a, G_b \subset G$ 、 $G_a \cap G_b = \phi$ 、 $v_x \in V(G_a)$ 、 $v_y \in V(G_b)$ 、 $e_k = (v_x, v_y)$ とすると、 e_k を G_a と G_b を結ぶ辺とよぶ。

定義5. $G_i \supset C_a$ とし $\tilde{G}_{i,e}$ と G_i を結ぶ辺の集合と C_a と $\tilde{G}_{i,e}$ を結ぶ辺の集合が等しいとき $G_{i,e}$ と C_a の最長距離は1であるとよぶ。

$G \supset G_i$ 、 $C_a \in m(G_i)$ とする。 $\tilde{G}_{i,e}$ と C_a の最長距離は1で、他の網目で $\tilde{G}_{i,e}$ と最長距離1のものがないとする。 C_a に両端点を持ち、 $\tilde{G}_{i,e}$ の一部を含む道を $l_k \in A_2(G, m(G_i))$ とする。 $m(G)$ を作る場合、ここでは $G_{i+1} = G_i \cup l_k$ での半網目集合として、 $C_a = C_{a1} \oplus C_{a2}$ 、 $C_{a1} \cap C_{a2} = l_k$ とし、 $m(G_{i+1}) = m(G_i) \cup C_{a1} \cup C_{a2} - C_a$ としなければならない。

なぜなら $l_k = (v_x - v_y) \in A_2(G, m(G_i))$ 、 v_x, v_y を含む網目を C_a, C_b とする。このとき $C_b = C_{b1} \oplus C_{b2}$ 、 $C_{b1} \cap C_{b2} = l_k$ 、 $m(G_{i+1}) = m(G_i) \cup C_{b1} \cup C_{b2} - C_b$ とすると、 l_k 上の v_x, v_y 以外の節点から C_b に含まれない C_a 上への道で $l_k \in A_0(G, m(G_{i+1}))$ になるからである。

ここで扱うグラフでは次数1、2の節点と1側、2側閉路は含まないとする。このときグラフの平面性の判定に次のアルゴリズムを用いた。このとき各節点に順位をつけ、変数IXを用いて配列 $B(\cdot)$ に記憶させる。

アルゴリズム 2

ステップ1. G の各節点で $B(v_x) = 0$ とおく。 $IX = 1$ とおく。

ステップ2. $G \supset G_1$ 、 $G_1 \simeq K_4$ なる G_1 を作る。 $M(G_1) \rightarrow m(G_1)$ 、 $G_1 \rightarrow G_i$ とする。

ステップ3. $G = G_i$ なら G は平面グラフである。 $A_1(G, m(G_i)) = \phi$ なら非面グラフである。

ステップ4. $A_1(G, m(G_i)) = A_0(G, m(G_i)) = \phi$ なら G は1連結グラフまたは非連結グラフである。このとき演算を終る。

ステップ5. $A_1(G, m(G_i)) \neq \phi$ ならステップ8へ行く。

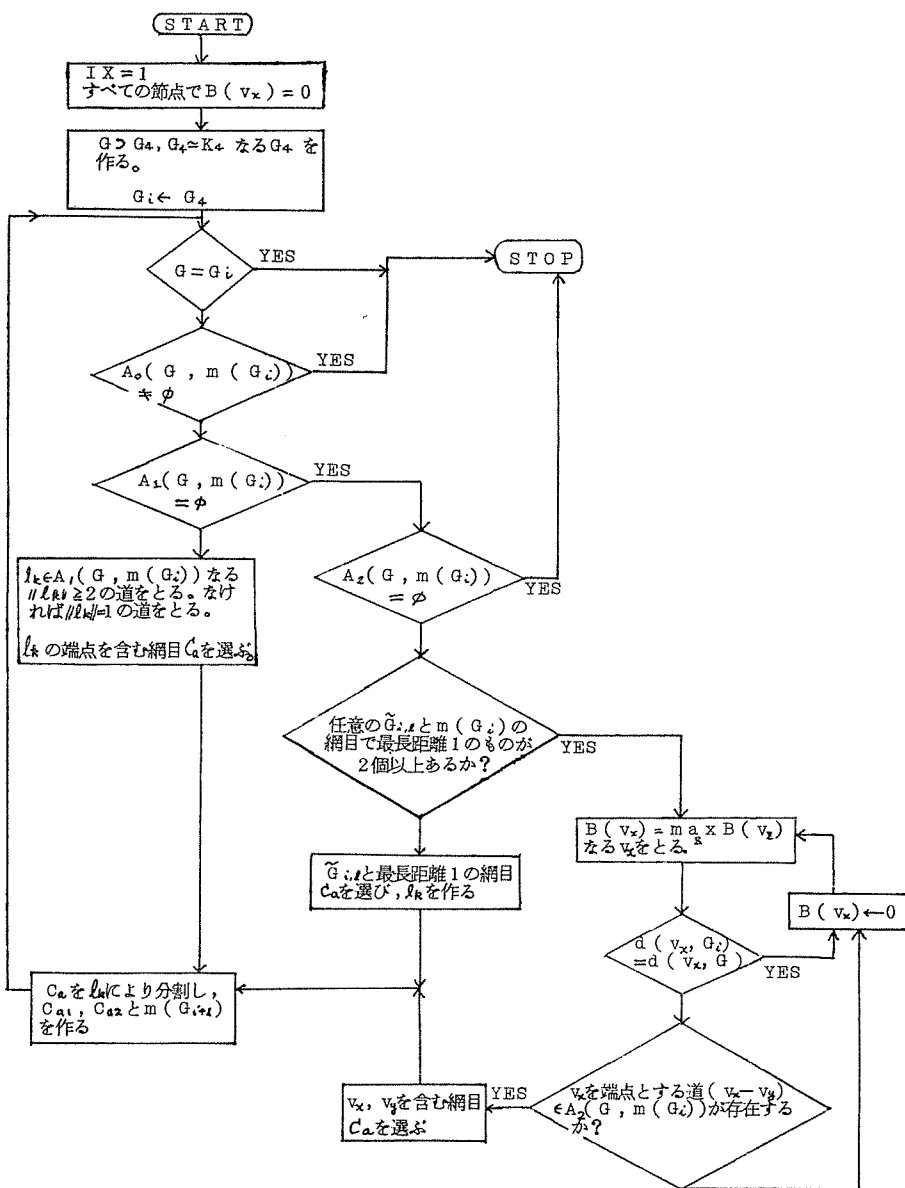
ステップ6. 各 $\tilde{G}_{i,e}$ と $m(G_i)$ の2個以上の網目で最長距離1なら、ステップ12へ行く。

ステップ7. $\tilde{G}_{i,e}$ と $m(G_i)$ の網目で最長距離1のものが C_a だけなら、 C_a に両端を持ち $\tilde{G}_{i,e}$ の一部を含む道 $l_k \in \Omega(G, G_i)$ を作る。ステップ9へ行く。

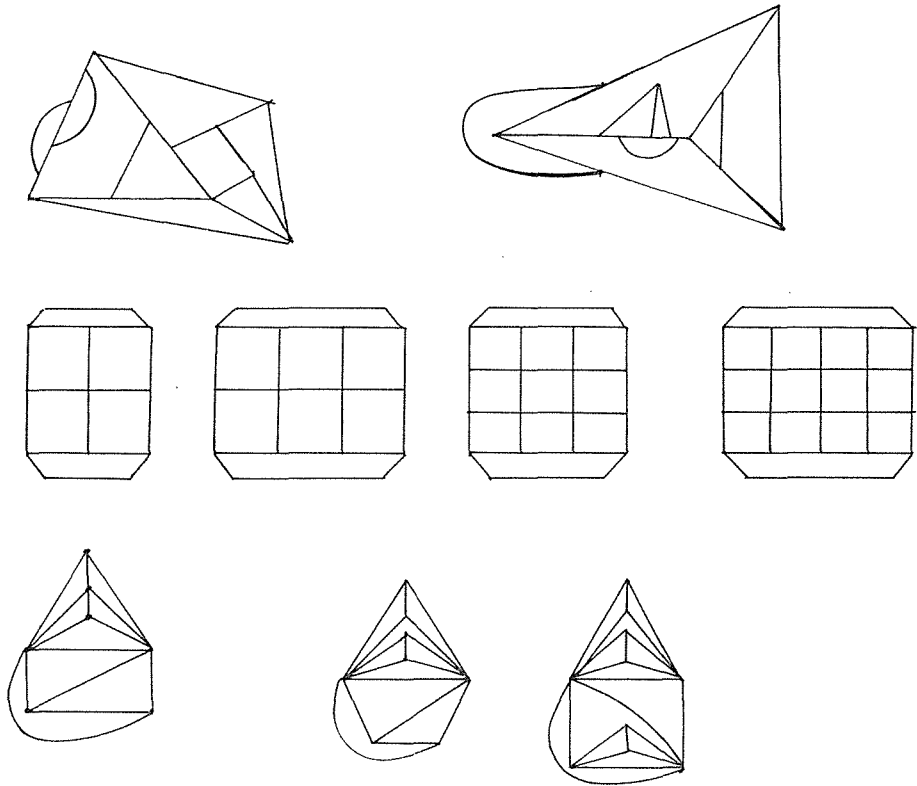
ステップ8. $l_k \in (v_x - v_y) \in A_1(G, m(G_i))$ 、 $\|l_k\| \geq 2$ の道をとる。なければ $\|l_k\| = 1$ の道をとる。 $\{v_x, v_y\} \subset C_a \in m(G_i)$ とする。

ステップ9. $C_{a1} \oplus C_{a2} = C_a$ 、 $C_{a1} \cap C_{a2} = l_k$ なる C_{a1} 、 C_{a2} を作る。 $m(G_{i+1}) = m(G_i) \cup C_{a1} \cup$

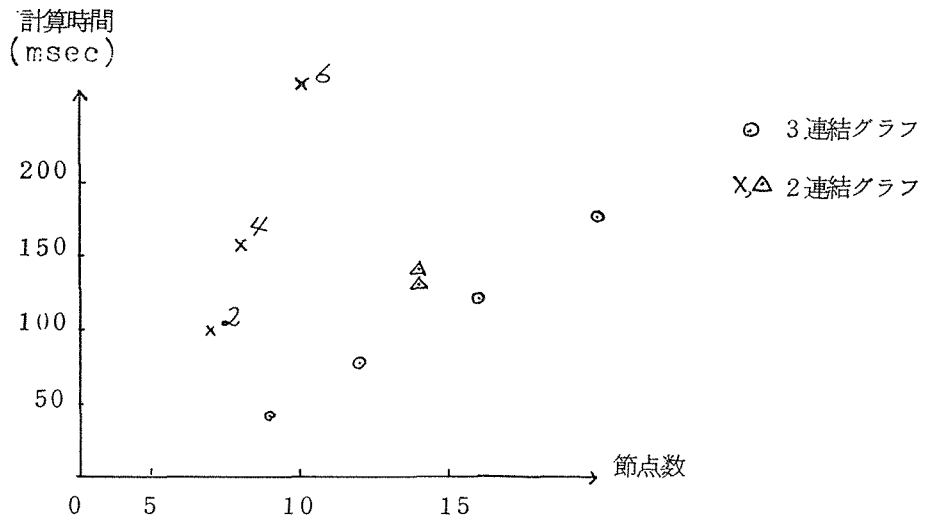
- $C_{a2} - C_a, G_{i+1} = G_i \cup l_k$ とする。 $G_{i+1} \rightarrow G_i$ とおく。
 ステップ10. l_k 上の節点で $B(v_z) = 0$ なるものがあれば $B(v_z) = IX$ とおく。
 ステップ11. ステップ3へもどる。
 ステップ12. $\max_z B(v_z) = B(v_x)$ なる節点 v_x をとる。
 ステップ13. $d(v_x, G_i) = d(v_x, G)$ なら, $B(v_x) = 0$ として, ステップ12へもどる。
 ステップ14. $(v_x - v_y) \in A_2(G, m(G_i))$ なる道がなければ G は v_x で分離できる。このとき



第2図 アルゴリズム2のフロ・チャート



第3図 例題で試みたグラフ



第4図 節点数-計算時間 (msec) の関係。×印の数値-アルゴリズム2でステップ12を計算した回数, △は1回

$B(v_x) = 0$ としてステップ13へもどる。

ステップ15. $l_k = (v_x - v_y) \in A_2(G, m(G_i))$ をとる。 $\{v_x, v_y\} \subset C_n \in m(G_i)$ とする。 $IX \leftarrow IX + 1$ とし、ステップ9へもどる。

この方法でグラフの平面性、連結数の判定ができる。ステップ4で演算が終了したときはグラフは非連結又は1連結となる。このとき $d(v_x, G) = d(v_x, G_i)$ なるすべての節点とそれを端点にもつ辺をすべて除去し、残ったグラフにこのアルゴリズムを適用する。この手順を繰返せばグラフ全体の平面性が判定できる。このフロー・チャートを第2図に示す。

アルゴリズム2における考え方について述べる。

ステップ7, 8で道 l_k に対してとるべき網目 C_n が一意に定まる場合を扱っている。このように l_k, C_n が一意に定まる場合を優先させて処理した。

3連結グラフでは $\|l_k\| \geq 2$ なる道を優先的に選んだ。それと同様にステップ8の処理を行っている。これにより G が3連結グラフの場合には、短い計算時間で平面性の判定ができる。

ステップ12で $B(v_x)$ の値の大きい節点から選んだ。これは2連結グラフの場合2連結の部分グラフから先に網目集合を作るためである。

ステップ15で v_x, v_y を含む網目は複数である。このとき G は v_x, v_y で分離できる。ゆえに v_x, v_y を含むどの網目をとっても、このアルゴリズムで G の平面性を判定できる。

また2連結平面グラフを平面に書くとき、すべての書き方を求める方法はアルゴリズム2のステップ15で、 $\{v_x, v_y\}$ を含むすべての網目に対する半網目集合を作り、順次処理することによりできる。

5. 例題

第3図のグラフについて、アルゴリズム2を用いて平面性の判定を試みた。計算時間と節点数の関係を図4に示す。3連結グラフの場合には計算時間は短い。2連結グラフではアルゴリズム2のステップ12の手順を行う回数が多いほど、計算時間が長くなっている。計算機は東大大型計算機センター HITAC8700 を用いた。

6. おわりに

一般のグラフの平面性の判定に、道の部分集合の適当な要素を順次用いて判定する方法を示した。これまで3連結グラフにのみ用いられていた方法を2連結グラフの平面性の判定に拡張している。この方法を用いれば2連結平面グラフの同形の判定にも使える。^{(5), (6)}

おわりにこの研究で貴重な助言をしてくださった電気通信大学神品光弘氏に感謝する。

参考文献

- (1) H. Whitney; Am. J. Math. 57, 507-533, (1935)
- (2) J. Hopcroft, R. Tarjan; IFIP Congress 71, 174-179, (1971)
- (3) K. Steinglitz, L. Weingberg; I.E.E.E. Trans. CT-17 197-206, (1970)
- (4) B. Knauer; J.A.C.M. 22, 226-230, (1975)
- (5) L. Weingberg; I.E.E.E. Trans. CT-13, 142-148, (1966)
- (6) J. E. Hopcroft, R.E. Tarjan; J.C.S.S. 7, 323-331, (1973)

A Planarity Test Based on the Set of Meshes

Kazuo SAISHU* ,Rikio ONODERA** and Takashi SATO**

*Department of Basic Technology, Faculty of Engineering

**Department of Electrical Engineering,
Faculty of Engineering

An efficient algorithm is presented for determining if a given graph is planar. Algorithm 1 is to test whether or not a given three-connected graph can be embedded in a plane and is based on the planar mesh, which is defined in the three-connected planar graph. If $|V(G)|$ is a number of vertices in the graph G , a time required in the computation by using Algorithm 1 is proportional to $|V(G)|$. To decide the planarity of a given two-connected graph, further, Algorithm 2 is given in the manner of similar techniques in Algorithm 1.