高校数学の解析指導における実践的研究

― ２次関数・方程式の統合を焦点に ―

教科教育高度化分野（17220907）星　健　太

本研究では，高等学校数学Ｉの「２次関数」の単元において，学習者が概念的知識である２次関数のグラフと２次方程式の実数解との関係を考察する授業を実践した。その結果，学習者がそれぞれの知識を統合し，新たな手続き的知識として，２次関数のグラフと x 軸との共有点の x 座標の求め方を獲得していくこと，既習内容の概念的知識の獲得していくことの示唆を得た。

［キーワード］　概念的知識，手続き的知識，２次関数，２次方程式

１　はじめに

文部科学省(2016a)では,学習指導要領改訂の方向性として，新しい時代に必要となる資質・能力の育成と，学習評価の充実であることを示した。それに伴い数学科において育成を目指す資質・能力も整理された。これらの資質・能力を育成していくためには，学習過程の果たす役割が極めて重要であり，算数・数学の学習過程のイメージを以下の図１に示した。

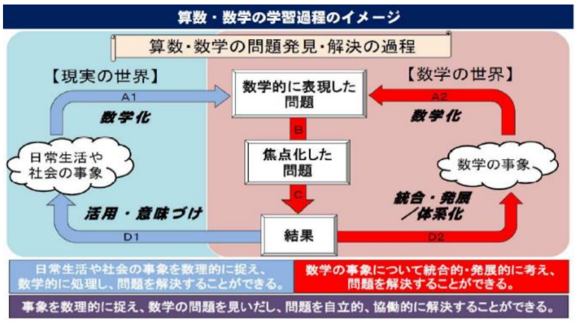

図１：算数・数学の学習過程のイメージ

しかし，高校数学の現状としてこれらの視点から授業が行われているだろうか。大学入試改革は進められてはいるが，従来型のセンター試験の影響や，単元内容の多さなどから教師から知識を教え込む授業だけで終えてしまっていないだろうか。断片的な知識や解法の暗記では試験以外に役に立たないだけでなく，新たな数学的事象に対しても知識の活用ができないのではないかと考える。そのような認識をもとに本稿では，図１の右側のサイクルの学習過程である，解決過程を振り返り概念を形成・体系化を図った授業実践に焦点を当てる。ここで，学習者が学習過程の中で数学的知識を獲得していくものを Hiebert(1986)が論述した「概念的知識」と「手続き的知識」に分類し，それぞれの知識の性質や獲得に向けた研究がなされている。しかし，その多くの研究は知識の性質を明らかにしていくことや学習者が知識定着したかどうかが目的となっているように感じる。そこで本稿の目的は,「２次関数」の単元，２次関数のグラフと x 軸の共有点において，概念的知識を考察することが，断片的であった知識が関係づけられ構造化されることや新たな手続き的知識獲得の有効性を明らかにしていくことである。

２　問題の所在と研究方法

(1)問題の所在

本稿では，高校数学Ｉ「2 次関数」の単元に焦点を当てた。国立教育政策研究所教育課程研究センター(2005)が実施した「高等学校教育課程実施状況調査」によると，数学Ｉで扱う「２次関数と２次方程式や２次不等式との関係」を“生徒にとって理解し難い内容である”と考える教師の回答の割合は 75.8%と述べている。また,「２次関数と２次方程式や２次不等式との関係」を“よく分かった”とする生徒の回答する割合は 26.6%であった。この調査は 2005 年以降実施されておらず，全て鵜呑みにできる資料ではない。しかし，現在でもこのような資料の傾向があると考える。理由として，現行の学習指導要領でも２次関数と２次方程式や２次不等式の関係を扱うのは数学Ｉで初めて扱う内容であること。また，２次関数の単元はグラフをかくことや最大値最小値,定義域値域等,

新たに学ぶ内容が多いことから，代数との関係にまで理解することは学習者にとって簡単でない。このような背景から数学の授業では，まずはそれぞれの課題に対し，解決のための手続きを問題演習などによって定着を図っていき，次第に概念を獲得していく形態が多いのではないか。既有の知識を基に解法の手続きから指導するのではなく，概念となる知識を生徒に考察させる指導によってそれぞれの知識が統合し，新たな手続きを学習者自らが獲得していくことができないだろうか。

(2)研究の方法

これらのことから，概念的知識の考察が図１の右側の学習過程を学習者自らが辿るために有効であるか，本稿の目的を達成できるよう以下の方法で研究を進めていく。

・先行研究により，概念的知識，手続き的知識の性質を明らかにする。
・高校数学Ⅰ「2 次関数」の単元の一般的な扱いを踏まえた指導方法の検討。
・教材開発を行い，授業を実践する。
・実践の結果から，概念的知識の考察の有効性について考察し，まとめる。

３　先行研究の検討

(1)概念的知識・手続き的知識とは

文部科学省(2016b)は，知識について「事実的な知識のみならず，学習過程において試行錯誤をすることなどを通じて，新しい知識が既得の知識と関係づけられて構造化されたり，知識と経験が結びつくことで身体化されたりして，様々な場面で活用できるものとして獲得される，いわゆる概念的な知識を含むものである。」と述べている。さらに，この概念的な知識について「学びのプロセスを通じて，発達の段階を踏まえながら，このような構造化された概念的知識の獲得に向かうことを重視するものである。」と述べている。知識はネットワークのように繋がりを持たせることで問題発見・解決を可能にし，このような知識を獲得することが深い学びの実現や資質・能力の育成の基盤となる。つまり図１の学習過程の基盤となるものである。また，Hiebert(1986)によると，「概念的知識は，最もはっきりと，関係において豊富である知識として特徴づけられる。手続き的知識は，数学の形式言語，あるいは記号の表現に関すること。数学的な課題を解決するために使われるアルゴリズムに関することから成る。」としている。また,「意味を伴って学習される手続きが概念的知識と結合している手続きである。」とも述べている。概念的知識とはつながりの持つ知識であり，文部科学省が述べている概念的な知識もこれと同義と捉えられる。手続き的知識とは，例えば演算記号＋，＝の使い方や問題を解くための手順を意味している。具体的にxの１次方程式を解く際，xの項を左辺，定数項を右辺に移項し計算をするなどの手順が手続き的知識である。これら２つの知識は独立したものでなく，相乗的に連携して働くものであるとされている。そのため，概念的知識を考察することはそれに伴われる手続き的知識の獲得促進が期待できる。

(2)指導の方法

山村(1993)はHiebert の研究をもとに，概念的知識と手続き的知識の結合が算数・数学学習に効果的であることを示した。さらに，各教材の概念的知識と手続き的知識をきちんと把握したうえで,どの知識をもとにして，どのように結合を図っていくか，指導の工夫が望まれると述べている。本稿では，２次関数の単元における概念的知識と手続き的知識を整理し，もとになる知識と知識が結合していく授業形態を検討していく。

まず，２次関数と２次方程式の関係として，２次関数$y = ax^2 + bx + \mathrm{c}$のグラフと$x$軸の共有点の$x$座標が２次方程式$ax^2 + bx + \mathrm{c} = 0$の実数解である。(図２)

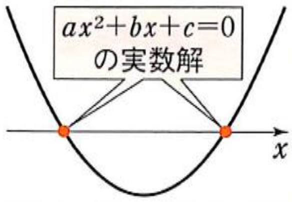

図２：グラフと方程式の関係(数研出版，2017)

この概念的知識を踏まえ，x軸との共有点を求めるために$y = 0$を代入し方程式を解く，という手続きを行うことが知識理解につながる。また，その後の２次不等式の発展等にも有効に働くのではないだろうか。しかし，教科書では初めに説明としてx軸の共有点は$y = 0$となるxの値，すなわち２次方程式の実数解であると説明し，例題では２次方程式を解けばよい，と述べ方程式の解を求めた式が書かれてある。学習者にとって方程式を解けばよいといった手続き的知識は定着するかもしれないが，なぜ方程式を解くのか概念的知識

が伴いにくいのではないか。そのため，既習であるグラフをかき，変化の値を考察する知識と，方程式を解く知識をそれぞれ統合する教材を考える。

４　教材開発

２次関数$y = ax^2 + bx + c$のグラフとx軸の交点のx座標が２次方程式$ax^2 + bx + c = 0$の実数解である。この概念的知識を学習者に注目させるために，２次方程式$ax^2 + bx + c = 0$の実数解は２次関数$y = ax^2 + bx + c$のグラフのどの部分になるか理由も含めて考えるという課題にした。解答としては，２次方程式$ax^2 + bx + c = 0$の実数解は，２次関数$y = ax^2 + bx + c$において$y = 0$となるxの値である。２次関数のグラフで$y = 0$の部分はx軸との交点より，グラフとx軸との交点のx座標が２次方程式の実数解，となる。概念の根拠となることを生徒自身に考えさせることで，概念的知識の考察と理解をねらいとする。その後，教科書で扱われている問を出題し，手続き的知識を生徒自ら発見することをねらいとする。(図３)

【Exercise1】$y = x^2 - 6x + 5$のグラフをかこう。

【Exercise2】2 次方程式$x^2 - 6x + 5 = 0$の解を求めよう。また，この２次方程式の実数解はExercise1 でかいたグラフのどの部分になりますか。理由も含めて考えよう。

【Exercise3】次の２次関数のグラフとx軸の共有点のx座標を求めよう。
(1)$y = x^2 - 8x + 12$　(2)$y = -x^2 + 6x + 7$

○振り返り　今日の授業でわかったことやわからなかったことを自由に書いて下さい。

図３：学習プリント内容

５　授業実践

時期・対象・授業者・授業概要
時期：平成 29 年 10 月下旬(３単位時間)
対象：山形県立Ａ高等学校第１学年２クラス
授業者：星健太
授業概要：数学Ⅰ・２次関数のグラフとx軸との共有点(共有点が２個の場合)

学習プリント(図３の内容)を用いて授業を実施した。【Exercise１】【Exercise２】は，４人１グループを作り，同時に活動を実施した。その後全体共有をし，【Exercise３】を個人活動，最後に全体で答え合わせを実施した。

６　実践結果の考察

(1)概念的知識の考察について

生徒の中で２次方程式$ax^2 + bx + c = 0$は，２次関数$y = ax^2 + bx + c$に$y = 0$を代入したものとみなせた生徒は数名であった。そのため，一度活動を止めヒントとしてその見方ができていた生徒に考えを発表してもらった。生徒が「$y = 0$のとき，放物線とx軸が交わる部分」と発表し，授業者は２次関数に$y = 0$を代入すると２次方程式になることを強調した。さらに，黒板にグラフをかき「今言ってくれたのは，このグラフで$y = 0$のときとはどの部分か？というのを発表してくれました。」と伝えたところ，グラフとx軸の共有点が方程式の実数解になることは多くの生徒が理解していたことを机間巡視で見取ることが出来た。理由も書けた生徒は①$y = 0$を代入するとxの値が１と５になるから，②方程式の解を２次関数のxに代入すると$y = 0$になるためx軸との交点になる，③方程式の解の個数が２個でグラフとx軸の共有点が２個であるため，の主に３つの内容を記述した。グラフとx軸の共有点であることの見通しを持つことが出来ると，それを示すために$y = 0$を代入することで実数解や共有点の個数に一致していることや，実数解を２次関数の式に代入することでx軸との共有点であることを調べることが出来たと示される。概念的知識の定着は一度の授業では難しい。しかし，①～③のように互いがどのような関係にあるのか生徒が考察していくことは十分可能であった。振り返りの中で「共有点の意味がわかりました。」等の記述も見られ，概念が豊かになりうる活動であったことが示唆された。

(2)手続き的知識の獲得について

多くの生徒が２次関数のグラフとx軸の共有点のx座標を求めることができた。2 次関数$y = ax^2 + bx + c$に$y = 0$を代入することは生徒にとってわかりやすい手続き的知識であったことが考えられる。【Exercise２】で２次方程式の実数解は２次関数のグラフとx軸の共有点であることが理解できれば，グラフとx軸の共有点のx座標を求めるために$y = 0$を代入した方程式を解けばよいことを生徒自身で考えることができたのではないだろうか。授業者から直接手続き的知識を教え

なくても，生徒自ら獲得できる示唆を得られた。また，振り返りの中で「方程式の実数解がどういうことなのかわかってよかった。」などの内容があった。このような振り返りをした生徒は，これまでと同様にただ方程式を解くという手続きを行ったのではなく，２次関数の$y=0$の時のxの値という概念の伴った手続きを行えたことがうかがえる。これは，最初に概念的知識を考察する活動を行ったことが有効に働いていると考えられる。

(3)既習内容について

本実践では，２次関数のグラフをかいて変化の値を考察する知識と，方程式の解を求める知識の統合を図った。生徒にとってグラフをかくことと方程式を解くことは，平方完成と因数分解と手続きが違う。そのため同時にその２つを求めることは簡単ではない。振り返りの中で「日頃の勉強が大切だと思った。グラフと方程式の関係を深く理解することはできなかった。」などの内容があった。単にグラフのかき方や方程式の解き方を忘れただけかもしれない。しかし，授業の中でグラフもかけて方程式も解けるが，２つの関係に悩んでいる生徒が多くいた。そこで授業者がそのような生徒に対し「まず方程式の解はこのグラフのどの部分になると思う？」と質問すると，「グラフとx軸の交わっている範囲（$1 \leq x \leq 5$）」や「グラフのx軸とy軸の交点」などと述べた。これは既習内容である方程式の解の意味やグラフとy軸の交点は何を表しているのかまだ十分に理解できていないといえる。２次関数と２次方程式の関係を考察することはその基となる概念的知識が必要になり，それぞれの手続きの背景にある概念に注目する機会になった。また，振り返りにもあるように，概念的知識を考察することでこれまで手続きだけに注目していたものを，２つの関係性に注目し，さらに深く理解しようとしたのではないか。つまり，学習者自らが図１の学習過程を辿ることを促す活動であったという示唆を得られた。

７　まとめと今後の課題

振り返りの中では「難しかった」といった内容を記述した生徒が多くいた。しかし，これまで概念を考慮せずに教科書に載っている手続きにのっとって問題を解く活動ではなく，その背景にある概念を考察する活動は十分可能であった。また，２次関数のグラフと２次方程式の関係を本実践で獲得できるかは明らかではないが，その概念的知識を考察した後に，多くの学習者がグラフとx軸との共有点を求めることができた。これは概念を考察することで学習者自らが手続き的知識を獲得していく示唆を得られたと考えられる。また，２次関数のグラフと２次方程式の実数解の関係を考察することは，既習内容の概念的知識を見直す機会にもなりえたといえる。以上のような，本実践での生徒の姿から見られた学習過程に意味があり，こうした実践を続けることが重要であるといえる。

今後の課題として，「２次関数」の単元に限らず，概念的知識の考察が有効であるか検証していきたい。そのために，学習者が概念的知識をどのように考察していくとよいのか，考察したことで何を獲得していくのかを踏まえさらに教材開発を検討していく必要がある。また，何を根拠に学習者が新たな手続きをしたのか詳しく考察する必要がある。さらにどのような基準で概念的知識の考察が有効であったか評価方法も検討していきたい。

引用文献

国立教育政策所教育課程研究センター（2005）「高等学校教育課程実施状況調査」，http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/h17_h/05001031040004000.pdf（最終閲覧日2018年1月29日）

文部科学省（2016a）「次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめについて（報告）」，http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/004/gaiyou/1377051.htm（最終閲覧日2018年1月29日）

文部科学省（2016b）「教育課程部会芸術ワーキンググループ（第７回）」，http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/069/siryo/1371890.htm（最終閲覧日2018年1月29日）

山本慎ほか(2017)『最新数学Ⅰ』，数研出版，p.97.

山村郁人（1993）『概念的知識と手続き的知識に関する一考察』，日本数学教育学会論文発表会論文集，第26巻，187-192.

Practical Research in Analysis Guidance of High School Mathematics : Focus on Unity of Quadratic Function and Equation

Kenta HOSHI