

閾値対数ACDモデルの理論と実証
— 東京金先物市場への応用 —

砂 田 洋 志
(山形大学人文社会科学部)

山形大学紀要（社会科学）第50巻第2号別刷

2020年2月

研究ノート

閾値対数 ACD モデルの理論と実証 — 東京金先物市場への応用 —

砂 田 洋 志

(山形大学人文社会科学部)

1 はじめに

本稿で扱うデュレーション (duration) とは、証券市場や商品市場における取引の時間間隔であり、1 日の中で季節性を有する。寄り付きと大引けは取引が集中するので取引間隔が短くなる。一方、昼間は取引が少なくなるので取引間隔が広がるのである。こうしたパターンは日中効果 (intraday effect) と呼ばれている。本稿では時系列モデルを用いて取引の時間間隔データを分析する。

取引間隔を時系列分析の立場からモデル化して数量的に分析した研究としては、Engle=Russell(1997,1998) の ACD (Autoregressive Conditional Duration) モデルを基礎として、様々なモデルが提案されてきた。¹ 対数変換を課すことによって非負制約を外した Bauwens = Giot (2000) の対数 ACD モデル、閾値を組み込んだ Zhang 他 (2001) の閾値 ACD モデル、価格上昇と下落によって対数 ACD モデルを 2 つに分けた Bauwens = Giot (2003) の非対称対数 ACD モデル、Russell=Engle(2005) の ACM - ACD モデルなどが挙げられる。ACD モデルに確率的要素を加える形で発展させたモデルとして、Bauwens=Veredas (2004) で提案された SCD (Stochastic Conditional Duration) モデルがある。SCD モデルに関する研究としては、擬似最尤法で推定する Bauwens=Veredas(2004) に加えて、ベイズ統計学の立場から SCD モデルを推定する方法を示した Strickland 他 (2006)、2 つの誤差項間に相関関係を仮定した非対称 SCD モデルをスライスサンプラーによって推定する Men 他 (2015,2016) などがある。

日本の市場を対象としたデュレーションの研究に限定すると、森保 (2006) が挙げられる。森保 (2006) では対数 ACD モデルと ACM - ACD モデルを用いて東京金先物市場が計量的に分析されている。杉浦 = 中妻 (2016) では、株式市場のティックデータへ SCD モデルが適用され、モンテカルロフィルタを用いてパラメータが推定されている。さらに、推定結果を用いて約定時間の予測も行なわれている。この他には、SCD モデルで東京金先物市場を分析した砂田

¹ 先行研究については Pacurar(2008) に詳しくまとめられている。

(2018a,b) など幾つかの研究が行われているに過ぎない。

閾値対数 ACD モデルを紹介することが本稿の第 1 の目的である。第 2 の目的は同モデルとその派生タイプのモデルを現実の取引間隔データへの応用することである。本稿では東京商品取引所の金先物市場の取引間隔データに応用する。第 3 の目的は、応用したモデルの当てはまりを比較することによって、同市場の取引間隔データにとって最適なモデルを見出すことである。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第 2 節では基本的なモデルである ACD モデル、対数 ACD モデルを紹介した後、それらを発展させた閾値 ACD モデルと非対称対数 ACD モデルについて説明する。第 3 節ではデータについて説明した後、データを平滑化する方法についても説明する。第 4 節では、閾値対数 ACD モデルを説明する他、東京商品取引所に上場されている金先物市場のデータを対象に閾値対数 ACD モデルとその派生タイプのモデルに適用し、状態変数とパラメータをベイズ推定した結果を示すとともに、対数尤度と DIC (Deviance Information Criterion) を用いてモデルを比較する。第 5 節では本稿の内容をまとめる。

2. ACD モデル

閾値 ACD モデルを説明する前に基本となる ACD モデルを説明する。²その後、条件付期待値の式に非負制約を課さないように工夫した対数 ACD モデルを紹介する。さらに、Zhang 他 (2001) の閾値 ACD モデル、Bauwens = Giot (2003) で提案された非対称対数 ACD モデルを紹介する。

2.1 ACD モデル

i 番目の事象が発生する時点をも t_i と表し、 $i-1$ 番目の事象が発生した時点である t_{i-1} との間隔を $x_i = t_i - t_{i-1}$ と記述し、デュレーションと呼ぶ。ACD モデルでは、デュレーション x_i がその条件付期待値 Ψ_i (状態変数) と誤差項 ε_i を用いて以下のように定式化される。

$$x_i = \Psi_i \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \quad (2)$$

ただし、誤差項 ε_i は 0 以上の値を実現値とする確率変数であり、 $E[\varepsilon_i] = 1$ と仮定する。³ Ψ_i の定式化は様々なものを提案することが可能であるが、ここでは基本的なモデルとして、 Ψ_i と x_i の一次のラグ付き変数である Ψ_{i-1} と x_{i-1} を説明変数とする以下の一次式を仮定する。

$$\Psi_i = \omega + \alpha \Psi_{i-1} + \beta x_{i-1} \quad i=2, \dots, n. \quad (3a)$$

² SCD モデルについては砂田 (2018a,b) においても説明されている。

³ Pacurar (2008) の 714 ページを参照されたい。

$$\Psi_1 \sim N\left(0, \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}\right) \quad (3b)$$

ただし、 $\alpha, \beta \geq 0, \omega > 0, \alpha + \beta < 1$ を仮定する。

誤差項 ε_i の確率分布として様々な確率分布を仮定できるが、ここでは平均が 1、パラメータが γ だけのガンマ分布 $GAM\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right)$ を仮定する。この場合、 ε_i の確率密度関数は以下のとおりである。

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. GAM\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right) \quad f(\varepsilon_i|\gamma) = \frac{\varepsilon_i^{\gamma-1} \exp(-\varepsilon_i \gamma)}{\gamma^{-\gamma} \Gamma(\gamma)} \quad (4)$$

(1) と (4) から、 x_i の確率密度関数として次式を得る。

$$g(x_i|\Psi_i, \gamma) = \frac{1}{x_i} \left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right)^\gamma \exp\left(-\frac{x_i \gamma}{\Psi_i}\right) \frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)}$$

$GAM\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right)$ において $\gamma=1$ とおけば、自由度が 1 の指数分布となる。第 4 節の実証分析では ε_i の確率分布として自由度が 1 の指数分布を仮定する。自由度が 1 の指数分布に従う ε_i の確率密度関数は以下のとおりである。

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. Exp(1) \quad f(\varepsilon_i) = \exp(-\varepsilon_i) \quad (5)$$

(1) と (5) から、 x_i の確率密度関数として次式を得る。

$$g(x_i|\Psi_i, \gamma) = \frac{1}{\Psi_i} \exp\left(-\frac{x_i}{\Psi_i}\right) \frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{1}{\Psi_i} \exp\left(-\frac{x_i}{\Psi_i}\right)$$

したがって、対数尤度は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \ln L(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots, \Psi_n, \omega, \alpha, \beta, |x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = -\sum_{i=2}^n \ln(\omega + \alpha \Psi_{i-1} + \beta x_{i-1}) - \sum_{i=2}^n \frac{x_i}{(\omega + \alpha \Psi_{i-1} + \beta x_{i-1})} - \ln \Psi_1 - \frac{x_1}{\Psi_1} \end{aligned}$$

2.2 対数 ACD モデル

ACD モデルでは x_i の条件付期待値 Ψ_i の時系列的な構造を定式化するが、対数 ACD モデルでは、 Ψ_i を対数変換した $\psi_i (= \ln \Psi_i)$ について時系列的な構造を定式化する。したがって、(3a) と (3b) が以下の (6a) と (6b) へ変更される。

$$\psi_i = \omega + \alpha \psi_{i-1} + \beta x_{i-1} \quad i=2, \dots, n. \quad (6a)$$

$$\psi_1 \sim N\left(0, \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}\right) \quad (6b)$$

このように定式化することによって回帰係数 ω, α, β に非負制約を課す必要がなくなる。(1), (2), (6a), (6b) で構成されるモデルが対数 ACD モデルである。ACD モデルの Ψ_i と同様に、 ψ_i の定式化は様々なものを提案することが可能である。

2.3 閾値 ACD モデル

Zhang 他 (2001) で提案された閾値 ACD モデルでは、デュレーション x_i がその条件付期待値 Ψ_i と誤差項 ε_i を用いて以下のように定式化される。

$$x_i = \Psi_i \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Psi_i = \delta + \sum_{j=1}^p \alpha_j^{(1)} x_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j^{(1)} \Psi_{i-j} & Z_{i-d} \in [0, r_1) \\ \vdots & \vdots \\ \Psi_i = \delta + \sum_{j=1}^p \alpha_j^{(K)} x_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j^{(K)} \Psi_{i-j} & Z_{i-d} \in [r_{K-1}, \infty) \end{cases} \quad i=2, \dots, n. \quad (7)$$

Z_i はデュレーション x_i および、 x_i 以外の経済変数で構成されるベクトル Y_i における第 i 取引以前の変数の関数 $h(x_i, \dots, x_2, x_1; Y_i, \dots, Y_2, Y_1)$ である。この閾値 ACD モデルでは、第 i 取引における x_i の条件付期待値 Ψ_i の式が d 期前の Z_i 、つまり Z_{i-d} の大きさによって変化する。 Z_{i-d} が $[0, r_1)$ に含まれていれば、状態 1 に属するモデルとなり、 Ψ_{i-j} と x_{i-1} のパラメータはそれぞれ $\alpha_j^{(1)}$ と $\beta_j^{(1)}$ になる。 Z_{i-d} が $[r_1, r_2)$ に含まれていれば、状態 2 に属するモデルとなり、 Ψ_{i-j} と x_{i-j} のパラメータはそれぞれ $\alpha_j^{(2)}$ と $\beta_j^{(2)}$ になる。こうして、 Z_{i-d} の値が閾値 r_j ($j=1, 2, \dots, K-1$) で区切られた K 個の区間の何れに含まれるかによって、 Ψ_i の式のパラメータが変化するモデルである。なお、誤差項 ε_i の確率分布として一般ガンマ分布を仮定する。

Zhang 他 (2001) では、IBM のティックデータを対象にして閾値 ACD モデルのパラメータが推定される。その際にモデルが単純化されて $p=1, q=1, d=1, K=3$ と設定される。そして、状態を決める変数 Z_i として x_i が用いられた。さらに、条件付期待値 Ψ_i を定式化する (7) に新たな説明変数として $1_{\{Y_{i-1} > 1\}}$ が加えられた。この変数は第 i 取引で複数の取引が同時に実行された場合に 1、そうでない場合に 0 となる変数である。実証分析に利用された以上の条件を満たすモデルを数式で記述すると以下のとおりである。

$$\begin{cases} \Psi_i = \omega + \alpha^{(1)} x_{i-1} + \beta^{(1)} \Psi_{i-1} + \gamma^{(1)} 1_{\{Y_{i-1} > 1\}} & x_{i-1} \in [0, r_1) \\ \Psi_i = \omega + \alpha^{(2)} x_{i-1} + \beta^{(2)} \Psi_{i-1} + \gamma^{(2)} 1_{\{Y_{i-1} > 1\}} & x_{i-1} \in [r_1, r_2) \\ \Psi_i = \omega + \alpha^{(3)} x_{i-1} + \beta^{(3)} \Psi_{i-1} + \gamma^{(3)} 1_{\{Y_{i-1} > 1\}} & x_{i-1} \in [r_2, \infty) \end{cases} \quad i=2, \dots, n. \quad (8)$$

Zhang 他 (2001) では閾値 ACD モデルのパラメータを推定した後、構造変化を考慮して標本期間を短く区分した上で改めて同モデルのパラメータを推定した。さらに、ACD モデルとの比較も行っている。

2.4 非対称対数 ACD モデル

Bauwens=Giot (2003) で提案された非対称対数 ACD モデルでは、デュレーション x_i が、その条件付期待値 Ψ_i を対数変換した ψ_i 、そして誤差項 ε_i を用いて以下のように定式化される。

$$x_i = \Psi_i \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad \psi_i = \ln \Psi_i \quad (1)$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \quad (2)$$

$$\begin{cases} \psi_i = \delta + \alpha^{(1)}x_{i-1} + \beta^{(1)}\psi_{i-1} + \delta^{(1)}E_{i-1} & y_i = 1 \\ \psi_i = \delta + \alpha^{(2)}x_{i-1} + \beta^{(2)}\psi_{i-1} + \delta^{(2)}E_{i-1} & y_i = -1 \end{cases} \quad i=2, \dots, n. \quad (9)$$

誤差項 ε_i の確率分布としてワイブル分布 Weibull(1, γ) を仮定する。 ψ_i は自らの過去の値 ψ_{i-1} 及び観測される x_{i-1} に加えて、市場要因を示す変数 E_i に依存している。市場要因として a . 取引強度、 b . 取引当たりの出来高、 c . スプレッドが挙げられている。

さらに、時点 t_i と時点 t_{i-1} の間でスプレッドの仲値が上昇した場合 ($y_i=1$) と下落した場合 ($y_i=-1$) でモデルの係数が変化すると仮定する。このように価格変化の方向によって2つの状態を考えて状態ごとにパラメータが変化する対数 ACD(1,1) モデルを非対称対数 ACD(1,1) モデルと呼んでいる。なお、彼らが利用したデータにはスプレッドの仲値の変化がないものはなかった。

彼らはパラメータを最尤推定した後、このモデルを用いてスプレッドの仲値の変動予測を行った。さらに、変動予測を取引戦略と結びつけてシミュレーション取引を行い、買い持ち戦略の場合と結果を比較した。

3 データとその加工方法について

3.1 分析するデータについて

本稿では、東京商品取引所で取引されている金先物（現物受渡用）のティックデータを加工して取引間隔のデータを作成し、そのデータを用いて対数 ACD モデルと後述する閾値対数 ACD モデルを推定した。分析する期間については以下のように決めた。金先物も含めて、日本の商品先物市場では一般に期先物の出来高が最も多い。2016年4月から2018年9月までの期先物の日次データを用いて価格変化率の月間の分散を計算したところ、2017年7月の分散が最も小さい。つまり、比較的安定している期間と考えられる。一方、2016年7月の分散が最も大きい。つまり、比較的不安定な期間と考えられる。今回は不安定な期間である2016年7月を分析対象とした。具体的には、2016年7月4日～8日までの5日間におけるティックデータを分析対象とした。市場価格が変動している方が価格変動によって収益を得ようと考えて、取引が多くなるからである。なお、この5日間の期先物は2017年6月限である。以下に分析するデータの作成方法を説明するが、分析対象とするデータは16,052個であった。

金先物市場における取引時間は午前9時00分～15時15分が日中の取引時間である。9時0分0秒に板合せ取引が行なわれて9時00分1秒に始値が付く。その後、ザラバ取引が15時15分

⁴ 金先物市場における現在の日中の取引時間は午前8時45分～15時15分に変更されている。午前8時45分に板合せ取引が行なわれて始値が付く。その後、ザラバ取引が15時10分まで行なわれ、5分間の取引停止時間を経て、15時15分に板合せ取引が行なわれる。

0 秒まで行なわれる。⁴この後、夜間取引も行われているが、本稿の分析では日中のザラバ取引のデータだけを利用してパラメータの推定を行った。

今回、分析に利用するモデルでは、各取引における取引時間間隔を利用するので、1つ前の取引におけるデータも必要である。複数の日のデータを用いるため、寄り付きと大引けのデータをつなげてデータを作成することとなる。しかし、寄り付きにおける1つ前の取引におけるデータは前日の大引けとの時間差であり、制度によって決められた値である。そこで、1日の取引の最初のデータは9時1分1秒以降の最初の取引から採用し、そこからザラバ取引の最後の取引までを利用する。その結果、1日の中で分析対象とする最初の取引からみて1つ前の取引の時間間隔データは取引の結果として存在するので、その値を利用して最初の取引間隔を計算する。⁵

本稿で分析するティックデータとは、1日の中で取引される一つ一つの取引に関するデータを集めたものである。ティックデータには、取引時刻（時分秒）、取引価格（円）、取引数量（枚）が含まれている。東京商品取引所から得たティックデータには、日付（年月日）、取引種別（先物かオプションか）、商品番号、限月（年月）、約定時刻（時分秒）、約定価格（円）、出来高（枚）が入力されている。

ティックデータでは1秒間に複数の取引が執行される場合もある。この場合は表1に示すとおり、同じ時点に複数の取引情報が表示される。取引間隔を計算する場合には同じ時点（秒）で執行された取引を分けることはできないので、1つのデータと考える。2016年7月の5日間において取引が執行された時点（秒）ごとの出来高（取引枚数）と約定価格の中で、上記の条件を満たすデータは16,052個であった。

表1 取引データの集計例

取引データ集計前			取引データ集計後		
取引時刻	取引価格	出来高	取引時刻	取引価格	出来高
9:05:10	1000	1	9:05:10	1000	4
9:05:10	1000	3	9:05:11	1002	5
9:05:11	1002	2	9:05:13	1003	2
9:05:11	1002	3	⋮	⋮	⋮
9:05:13	1003	2	⋮	⋮	⋮

⁵ 1日の最初の取引間隔の一期間のデータとして、本稿では実際に取引されたデータを利用する。一方、Engle=Russell(1998)では寄り付き後の10分間の平均を1期前のデータとして利用している。

3.2 データの加工方法について

全ての取引が含まれているティックデータから時間間隔データ（原データ）を作成する。その原データにモデルを直接適用して、パラメータを推定するのではなく、原データを用いて計算した平滑化曲線から得られた値で原データを割って加工データを作る。分析では、加工データを用いてモデルのパラメータを推定する。こうして原データを平滑化した値で割ることで、確定的な日中の傾向を予め除去しておく。⁶

平滑化の方法は様々である。局所多項式回帰においてバンド幅を可変とした LOESS (LOcally weighted ReGrESSion) が考案された。LOESS をさらに発展させたものにスーパースムーザ (Friedman, 1984) がある。森保 (2006) に従って、本稿ではスーパースムーザを用いて取引間隔のデータを平滑化する。⁷ 原データから計算された平滑化曲線が図 1 である。横軸は取引された順に並べたデータの番号である。取引間隔に変動のあることが読み取れる。

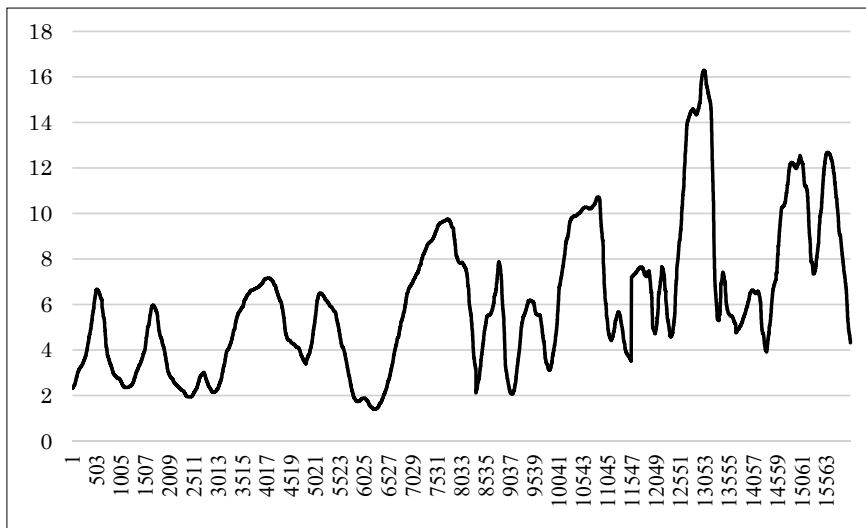


図 1 デュレーション x_i の平滑化曲線（縦軸は平滑化曲線の値、横軸はデータの番号、1 ~ 16,052）

⁶ Engle=Russell(1998) の 1,137 ページに期待デュレーションは確定的 (deterministic) な成分と確率的 (stochastic) な成分に分けられると記述されている。

⁷ データの平滑化については竹澤 (2007) に詳しい。

4 推定

本稿では、まず対数 ACD モデルを基本モデルとして推定した。その後で閾値を組み込んだ閾値対数 ACD モデル、 ψ_{i-1} の式の変数に出来高を加えた対数 ACD モデル、閾値と出来高を加味した閾値対数 ACD モデルを推定した。

4.1 対数 ACD モデルの推定

a. 推定するモデル

本稿では、価格変動が変動している 2016 年 7 月の中の 7 月 4～8 日の間に東京商品取引所で取引された金先物市場（現物受渡用）のティックデータを用いて、以下の数式で記述される対数 ACD モデルを推定した。

$$x_i = \exp(\psi_i) \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1')$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \text{Exp}(\gamma) \quad (10)$$

$$\psi_i = \omega + \alpha \psi_{i-1} + \beta x_{i-1} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad \ln \Psi_i = \psi_i \quad (6a)$$

$$\psi_1 \sim N\left(0, \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}\right) \quad (6b)$$

したがって、 x_i の確率密度関数は以下のとおりである。

$$f(x_i) = \frac{1}{\gamma \psi_i} \times \exp\left(-\frac{x_i}{\gamma \psi_i}\right) \quad (11)$$

対数 ACD モデルは条件付分散 ψ_i の式 (6) に一つ前の取引におけるデータ x_{i-1} と条件付分散 ψ_{i-1} が含まれていることから、GARCH モデルと似た形をしている。そこで、GARCH モデルの推定方法を参考にしてベイズ推定する。三井 = 渡部 (2003) では、GARCH モデルのパラメータをベイズ推定する際に、最尤推定値を提案分布の平均、ヘッセ行列の逆行列にマイナスをかけた値を分散としてサンプリングする方法が提案されている。Asai (2006) においてその優秀性が指摘されている。そこで、本稿でもこの方法を参考にして、条件付分散の係数 (ω, α, β) をベイズ推定する際には、提案分布の平均として条件付分散の係数の最尤推定値を利用する。そして、これらの最尤推定値で評価したヘッセ行列を提案分布の分散共分散行列に利用した。この提案分布と M-H アルゴリズムを用いてベイズ推定した。なお、事前分布には正規分布を仮定し、平均は最尤推定量、分散は推定誤差を利用した。

前述したとおり、平滑化した値で取引間隔 x_i を割って調整した値を改めてデータ x_i と定めて対数 ACD モデルを当てはめる。全部で 10,000 回の乱数を生成して後半の 5,000 個の乱数の (事後) 平均をパラメータと状態変数の推定値と考えている。この点はこれから紹介する 3 つのモデルでも共通である。

b. 推定結果

推定に当って誤差項 ε_i には自由度 γ が 1 の指数分布を仮定した。閾値の無い標準的な対数 ACD モデルをベイズ推定した結果を表 2 に示しておく。定数項 ω は -0.068、 α は 0.0704、 β は 0.857 であり、有意に 0 と異なると判定された。DIC は 34,028.42、状態変数の系列 $\{\psi_i\}_{i=1}^{16052}$ の事後平均を用いて計算した対数尤度は -17,009.842 であった。採択率は 71.7% であった。

表 2 対数 ACD モデルをベイズ推定した結果($\gamma=1$)

パラメータ	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
ω	-0.068249	0.003287	0.061766
α	0.070453	0.001495	0.044429
β	0.857098	0.002205	0.059726
対数尤度	-17,009.842	DIC	34,028.423

4.2 出来高を考慮した対数 ACD モデル (ψ の決定要因に出来高を加味)

a. 推定するモデル

条件付期待値 Ψ_i を対数変換した ψ_i の式の変数として、1 つ前の取引における出来高の対数値 ($\ln(\text{vol}_{i-1})$) を加えたモデルを検討した。具体的には、(6a) の変数として出来高 $\ln(\text{vol}_{i-1})$ を加えた (12) へ変更する。誤差項 ε_i は自由度 γ が 1 の指数分布に従うと仮定する。1 つ前の取引における出来高 (vol_{i-1}) は時点 t_{i-1} の出来高であるから、時点 t_{i-1} の出来高の多少が ψ_i を通じて時点 t_i と t_{i-1} の間隔 x_i に影響を与えていると考えたモデルである。

$$x_i = \exp(\psi_i) \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n. \tag{1'}$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \text{Exp}(1) \tag{10'}$$

$$\psi_i = \omega + \alpha\psi_{i-1} + \beta x_{i-1} + \delta \ln(\text{vol}_{i-1}) \quad i=1, 2, \dots, n. \tag{12}$$

表 3 出来高を考慮した対数 ACD モデルをベイズ推定した結果($\gamma=1$)

パラメータ	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
ω	0.072749	0.002638	0.059008
α	0.024558	0.001927	0.036997
β	0.842274	0.001312	0.047098
δ	-0.057128	0.000185	-0.047452
対数尤度	-16,823.302	DIC	33,664.316

b. 推定結果

出来高を組み入れた対数 ACD モデルベイズ推定した結果を表 3 に示しておく。定数項 ω は 0.073、 α は 0.025、 β は 0.842、 δ は -0.057 であり、有意に 0 と異なると判定された。DIC は 33,664.32、状態変数の系列 $\{\psi_i\}_{i=1}^{16052}$ の事後平均を用いて計算した対数尤度は -16,823.30 であった。採択率は 87.6% であった。この 2 つの指標を見る限り、対数 ACD モデルの ψ_i の式に出来高を加えたモデルの方が出来高を加えないモデルよりも適切であると考えられる。出来高の対数値の係数は負値なので、出来高が大きいとその後の取引間隔は短くなる、つまり連続して取引が行われることを示している。

4.3 閾値対数 ACD モデルの推定

a. 推定するモデル

4.1 で取り上げた対数 ACD モデルに閾値を組み込んだ閾値対数 ACD モデルを紹介した後で、推定結果を示す。本稿では、レジームが 2 個で誤差項 ε_i に自由度 γ が 1 の指数分布を仮定した閾値対数 ACD モデル、つまり、以下の (1'), (10), (13) に基づいたモデルのパラメータをベイズ推定した。

$$x_i = \exp(\psi_i) \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1')$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \text{Exp}(1) \quad (10')$$

$$\begin{cases} \psi_i = \omega + \alpha^{(1)} x_{i-1} + \beta^{(1)} \psi_{i-1} & \Delta p_{i-1} \in [0, \infty] \\ \psi_i = \omega + \alpha^{(2)} x_{i-1} + \beta^{(2)} \psi_{i-1} & \Delta p_{i-1} \in [-\infty, 0) \end{cases} \quad i=2, \dots, n. \quad (13)$$

上記のモデルは、重複した取引の有無を考慮しない点で閾値対数 ACD モデルを用いて実証分析した Zhang 他 (2001) と異なるが、価格の変動を状態の決定に利用している点で Bauwens=Giot(2003) に似ている。

対数 ACD モデルの推定と同様に、条件付分散の係数 ($\omega^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, k=1, 2$) をベイズ推定する際には、提案分布の平均として条件付分散の係数の最尤推定値を利用する。そして、これらの最尤推定値で評価したヘッセ行列を提案分布の分散共分散行列に利用した。この提案分布と M-H アルゴリズムを用いてベイズ推定した。

このモデルの場合、閾値として価格変化額を利用しているので、閾値として 0 を利用する。つまり、価格が上昇したか、上昇しないか（変化しない及び下落）によって状態が決まるモデルにしている。

b. 推定結果

表 4 に 3 つのパラメータ ($\omega^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, k=1, 2$) をベイズ推定した結果を示す。3 つのパラメータ ($\omega^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, k=1, 2$) のレジームごとの推定値 (= 事後平均) に加えて事後標準偏差と

事後自己相関係数を示してある。また、3つのパラメータ ($\omega^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, k=1,2$) をベイズ推定した結果を利用して状態変数の系列 $\{\psi_i\}_{i=1}^{16052}$ を推定した。その結果を図2に示してある。横軸は取引された順に並べたデータの番号である。図2を見ると、状態変数の系列 $\{\psi_i\}_{i=1}^{16052}$ の平均の系列は1の周辺を変動していることが分かる。さらにベイズ推定した結果を用いて計算した対数尤度は -17,005.09、DIC は 34,017.82 であった。採択率は 79.14% であった。

両方のレジームで $\alpha^{(k)} + \beta^{(k)}$ の値は 0.9 を超える値であること、 $\beta^{(k)}$ の値も 0.8 を超えていることが特徴である。特に価格が上昇した場合、 $\alpha^{(1)} + \beta^{(1)}$ の値は 1 に近い値である他、 $\beta^{(1)}$ は 0.9 を越える値となった。

表2と表4の結果と比較すると、閾値がない対数 ACD モデルの推定結果は状態1よりも状態2に近い。その原因は、価格の上昇回数が 3,326 回で全体の 21% であったからであると予想される。ベイズ推定した結果を用いて計算した対数尤度は -17,005.09、DIC は 34,017.82 であった。この2つの指標を表3の結果と比較する限り、対数 ACD モデルに出来高を加えたモデルの方が閾値を組み込んだ加えたモデルよりもモデルとしては適切であると考えられる。

表4 閾値対数 ACD モデルをベイズ推定した結果($\gamma=1$)

パラメータ	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
$\omega^{(1)}$	-0.058438	0.004365	0.049971
$\alpha^{(1)}$	0.076924	0.004837	-0.023516
$\beta^{(1)}$	0.919287	0.009772	-0.013948
$\omega^{(2)}$	-0.070188	0.002515	-0.062380
$\alpha^{(2)}$	0.068491	0.001281	-0.062242
$\beta^{(2)}$	0.843132	0.001837	-0.038098
対数尤度	-17,005.085	DIC	34,017.816

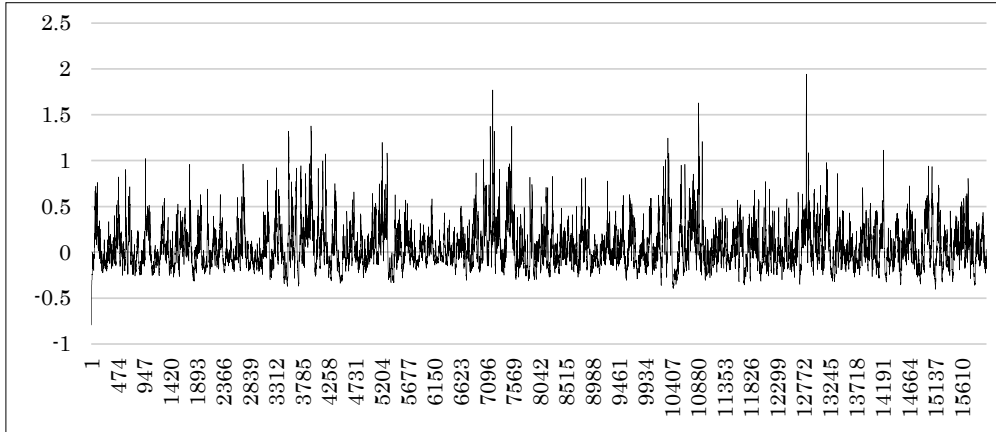


図 2 ψ_i の推定値の推移（横軸は取引された順に並べたデータの番号）

4.4 出来高を考慮した閾値対数 ACD モデル (ψ の決定要因に出来高を加味)

a. 推定するモデル

4.1 で取り上げた対数 ACD モデルに閾値を組み込んだ上、条件付期待値 Ψ_i を対数変換した ψ_i の式の変数として出来高 ($\ln(\text{vol}_{i-1})$) を加えた閾値対数 ACD を推定した結果が表 5 である。

具体的には、レジームを 2 個と仮定するとともに、誤差項に自由度 γ が 1 の指数分布を仮定した閾値対数 ACD モデル、つまり、以下の (1'), (10'), (14) に基づいたモデルのパラメータをベイズ推定した。

$$x_i = \exp(\psi_i) \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1')$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \text{Exp}(1) \quad (10')$$

$$\begin{cases} \psi_i = \omega + \alpha^{(1)} x_{i-1} + \beta^{(1)} \psi_{i-1} + \delta^{(1)} \ln(\text{vol}_{i-1}) & \Delta p_{i-1} \in [0, \infty) \\ \psi_i = \omega + \alpha^{(2)} x_{i-1} + \beta^{(2)} \psi_{i-1} + \delta^{(2)} \ln(\text{vol}_{i-1}) & \Delta p_{i-1} \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

b. 推定結果

出来高の係数の推定値は小さい値であるが、統計的には有意に 0 と異なるので、 ψ_i の式の変数として出来高は有効であると考えられる。なお、出来高の係数は価格変化に関係なく負値であった。

ベイズ推定した結果を用いて計算した対数尤度は -16,816.69、DIC は 33,635.88 であったから、出来高を加えた閾値対数 ACD モデルが 4 つの中で最も適切であると考えられる。採択率は 97.68% であった。この 2 つの指標を見る限り、対数 ACD モデルに出来高と閾値を組み込むことによってより適切なモデルに向かうと考えられる。

表 5 出来高を考慮した閾値対数 ACD モデルをベイズ推定した結果($\eta=1$)

変数	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
$\omega^{(1)}$	0.081307	0.002712	-0.036968
$\alpha^{(1)}$	0.035975	0.001367	-0.031056
$\beta^{(1)}$	0.847973	0.003304	-0.033947
$\delta^{(1)}$	-0.051765	0.000489	0.048413
$\omega^{(2)}$	0.071205	0.001115	-0.027635
$\alpha^{(2)}$	0.020782	0.000903	0.015810
$\beta^{(2)}$	0.840327	0.000682	0.008459
$\delta^{(2)}$	-0.059068	9.1206016e-005	0.000759
対数尤度	-16,816.687	DIC	33,635.881

5 結 論

本稿の目的は、閾値対数 ACD モデルを紹介すること、同モデルを用いて日本の先物市場を分析すること、モデル比較を行なうことである。第 3 節では、分析対象の取引間隔データについて説明した後、日中効果を取り除くのに用いる平滑化について説明した。平滑化の手法はいろいろあるが、本稿では森保 (2006) と同じスーパースムーザを利用して平滑化曲線を計算した。第 4 節では、対数 ACD モデルのパラメータをベイズ推定する方法について説明した後、東京商品取引所の金先物市場のティックデータを対象にして対数 ACD モデルのパラメータをベイズ推定した。次に、条件付分散を対数変換した ψ_i の式に 1 期遅れの出来高の対数値を組み入れたモデルを構築し、パラメータを推定したところ、DIC と対数尤度が向上したことから、出来高を含めることによって対数 ACD モデルが改善されると判断された。

さらに、対数 ACD モデルに閾値を組み込んだ閾値対数 ACD モデルをベイズ推定した。DIC と対数尤度から、対数 ACD モデルへ閾値を組み込むことによってモデルが改善することが判った。しかし、閾値よりも出来高の効果の方が大きいことも判った。

最後に、閾値対数 ACD モデルの ψ_i の式に出来高を加えたモデルを推定した結果、DIC と対数尤度が最も良い値となった。つまり、推定したモデルの中でもっとも適切なモデルであることが判った。

以上の結果をまとめると、今回用いたデータの場合には、単なる対数 ACD モデルよりも閾値を組み込んだ閾値対数 ACD モデル、単なる対数 ACD モデルよりも出来高を加味した対数 ACD モデル、閾値対数 ACD モデルよりも出来高を加味した対数 ACD モデル、出来高を加味した対数 ACD モデルよりも同モデルに出来高と閾値を組み込んだ閾値対数 ACD モデルの方が適切で

あると判断される。

今回は比較的価格変動が大きな期間を分析したが、安定した期間についても分析して結果を比較したい。

参考文献

- [1] Asai, M., 2006, "Comparison of MCMC method for estimating GARCH Models," *Journal of the Japan Statistical Society*, 36, pp.199-212.
- [2] Bauwens, L., and Giot, P., 2000, "The logarithmic ACD model : An application to the bid-ask quote process of three NYSE stocks," *Annales d' Economie et de Statistique*, 60, pp.117-149.
- [3] Bauwens, L., and Giot, P., 2003, "Asymmetric ACD models : Introducing price information in ACD models," *Empirical Economics*, 28, pp.709-731.
- [4] Bauwens, L., and Veredas, D., 2004, "The stochastic conditional duration model: a latent variable model for the analysis of financial durations," *Journal of Econometrics*, 119, pp.381-412.
- [5] Engle, R.F., and Russell, J.R., 1997, "Forecasting the frequency of changes in quoted foreign exchange price with the ACD model," *Journal of Empirical Finance*, 4, pp.187-212.
- [6] Engle, R.F. and Russell, J.R., 1998, "Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data," *Econometrica*, 66, pp.1127-1162.
- [7] Gordon, N., Salmond, D. and Smith, A., 1993, "Novel approach to nonlinear /non-Gaussian Bayesian state estimation," *IEEE Proceedings-F*, 140, pp.107-113.
- [8] 林高樹・佐藤彰洋, 2016, 『金融市場の高頻度データ分析』, 朝倉書店 .
- [9] 林高樹, 2012, 「高頻度データの分析 (2) : 不等間隔データ分析」, 刈屋武昭他編, 『経済時系列ハンドブック』の第 6 章 4 節に所収, 朝倉書店 .
- [10] Men, Z., and Kolkiewicz, A. W., Wirjanto, T. S., 2015, "Bayesian analysis of asymmetric stochastic conditional duration model," *Journal of Forecasting*, 34, pp.36 - 56.
- [11] Men, Z., and Kolkiewicz, A. W., Wirjanto, T. S., 2016, "Bayesian inference of asymmetric stochastic conditional duration models," *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86, pp.1295 - 1319.
- [12] 三井秀俊・渡部敏明, 2003, 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」, 『日本統計学会誌』, 第 33 巻第 3 号, pp.307-324.
- [13] 森保洋, 「金先物市場の日中価格変動と取引時間間隔」, 2006, 『経営と経済』, 長崎大学経済学会, 第 85 巻 3・4 号, pp.408-430.
- [14] Pacurar, M., 2008, "Autoregressive conditional duration models in finance : A survey of the

- theoretical and empirical literature,” *Journal of Economic Survey*, 22, pp.711-751.
- [15] Russell, J.R., and Engle, R.F., 2005, “A discrete-state continuous-time model of financial transactions prices and times : the autoregressive conditional multinomial - autoregressive conditional duration model,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 23(2), pp.166-180.
- [16] 砂田洋志 ,2018a, “SCD モデルの理論と実証—東京商品取引所における金先物取引への応用—”, 山形大学紀要 (社会科学), 第 48 巻第 2 号 ,pp.41-63.
- [17] 砂田洋志 ,2018b, “モンテカルロフィルタの理論と応用—SCD モデルへの応用—”, 山形大学大学院社会文化システム研究科紀要, 第 15 号 ,pp.31-44.
- [18] Strickland, C.M., Forbes, C.S., and Martin, G.M., 2006, “Bayesian analysis of stochastic conditional duration model,” *Computational Statistics & Data Analysis*, 50, pp.2247-2267.
- [19] 杉浦航・中妻照雄 ,2016, 「ティックデータを用いた株式市場における約定予測」, 日本金融・証券計量・工学学会編『ファイナンスにおける数値計算手法の新展開』の第 4 章に所収, 朝倉書店 .
- [20] 竹澤邦夫 ,2007, 『みんなのためのノンパラメトリック回帰 (上) 第 3 版』, 吉岡書店 .
- [21] Zhang, M., Russell, J.R. and Tsay, R., 2001, “A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data ,” *Journal of Econometrics*, 104(1), pp.179-207.