

道路網における交通流配分

最 首 和 雄

工学部 共通講座

1. はじめに

交通制御について、広域信号制御と順路指定による交通流の最適配分が考えられる。広域信号制御は近年広く普及したもので、東京の銀座地区、トロント、サンホセその他多くのシステムがあり、いずれも遅れが10%から20%改善されたと報告されている。しかし自動車台数の増加と道路網の整備拡張が不十分なため、大都市の交通事情が非常に悪くなっている。広域信号制御では交通流に渋滞が発生すると、それを解消する有効な制御ができないのである。道路網における交通流を円滑に保つためには、渋滞が発生しないように各車に進路指示をおこなわねばならない。本文では交通流を円滑に保つための各道路への車の最適配分について報告する。

2. 交通流理論について

道路網において、同じ出発地、同じ目的地を持つ車が各走行経路(チェーンとよぶ)に配分されるとき、配分の割合を定める方法にしたがって「最適経路、次適経路を選択する流れ」、「等時間原則に従う流れ」、「最適配分に従う流れ」などに分類できる。その他にもモデルの作り方によって、「フレーター法」、「グラビティーモデル法」など多くの研究がなされている。

車の出発地から目的地(origin, destination)までの単位時間当りの交通量をOD交通量とよぶ。「最短経路、次短経路を選択する流れ」とはすべてのOD交通が走行時間の最短な経路と、次短の経路にある割合で、配分されるとして、計算するものである。「等時間原則に従う流れ」には、各OD交通ごとにその間に存在する経路のうち、利用される経路については走行時間は同じで、利用されない経路についてはそれ以上の時間を要するものである。「最適配分に従う流れ」とは、各OD交通ごとにその間に存在する経路の走行時間と経路の交通量の積をすべての経路について加えたものを総通過時間とよび総通過時間が最小になる配分をさす。最近では交通情報センターからラジオによって道路状況が各運転者に送られており、交通情報センターから各OD交通に対する順路指示などが送られれば、「等時間原則に従う流れ」「最適配分に従う流れ」に近い現象もおこるであろう。これらの配分がおこなわれた場合道路網の最大交通容量は「最適配分に従う流れ」が最大となり、「最短経路、次適経路を選択する流れ」が最小となる。

3. 交通流の最適配分

交通流の最適配分法については、C. Pinnell⁽⁵⁾ などによって線形計画法による配分方法が研究された。また T. C. Young⁽⁶⁾ は最大原理を用いて配分計算をしている。これらはいずれも各道路の通過時間を一定とした単純なモデルを用いている。浜田⁽¹⁾ は交通量—通過時間の関係に2乗特性を仮定して配分計算をしている。

本文は電気回路におけるジュール熱最小の法則を非線形の場合について拡張したもので、これによって最適配分を求めることを意図している。この問題は従来のネットワーク理論における「多種類の物質の流れの問題」の変形と考えられる。この種の非線形問題は Lagrange の乗数法によって解く。計算においてはニュートン法により繰返し演算をおこなう。この方法では計算の収束性、解の一意性などは不明確となる。本文の方法では回路方程式から解を求めるので、解の性質が明らかになる。また「等時間原則に従う流れ」と「最適配分に従う流れ」の関係についても明らかになるという特徴をもつ。

3-1 有向グラフとしての道路網

本文では道路網を有向グラフで表現した。有向グラフ $G[V, E, T]$ において、 V は節点の集合、 E は枝の集合、 T は枝の通過時間をあらわす関数の集合とする。これらは道路網における交差点、交差点間の道路、各道路の車の通過時間を意味する。

$$V = \{v_i \mid i = 1 \sim m\}$$

$$E = \{e_i \mid i = 1 \sim b\}$$

とする。各枝には容量 $C(e_i)$ が存在する。

$$T = \{T_i \mid i = 1 \sim b\}$$

とすると、 T_k は e_k のフロー値 α_k の関数で、それを $T_k = T_k(\alpha_k)$ とあらわす。 T_k は $0 \leq \alpha_k < C(e_k)$ で単調増加、2階微分可能で $d^2(T_k \cdot \alpha_k) / d\alpha_k^2 > 0$ なる関数とする。また $T_k(0) > 0$ である。

グラフ理論において、チェーンと閉路は次の如く定義される。 $e_k = (v_i, v_j)$ のとき、有向枝 e_k は節点 v_i から出て、節点 v_j へ入るとよぶ。

有向グラフ上の異なる節点の順列を v_1, v_2, \dots, v_n ($n \geq 2$) とする。このとき $i=1, 2, \dots, n-1$ に対して (v_i, v_{i+1}) なる有向枝となっているとき、 v_1 から v_n へのチェーンとよび次式であらわす。

$$v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_3) \cdots (v_{n-1}, v_n)v_n$$

$v_1 = v_n$ なるチェーンを有向閉路とよぶ。

また $i=1, 2, \dots, n-1$ に対して (v_i, v_{i+1}) または (v_{i+1}, v_i) なる有向枝となっているとき v_1 から v_n への道とよび、 $v_1 = v_n$ なる道を閉路とよぶ。有向閉路をもたない有向グラフを acyclic graph とよぶ。

$\beta_1(v_x), \beta_2(v_x)$ を次式で与えられる節点の集合とする。

$$\beta_1(v_x) = \{v_y \in V_i \mid (v_x, v_y) \in E_i\} \quad (1)$$

$$\beta_2(v_x) = \{v_y \in V_i \mid (v_y, v_x) \in E_i\} \quad (2)$$

$G[V, E, T]$ の部分グラフ $G_i[V_i, E_i, T_{E_i}]$ において、次の条件を満たすものを単向グラフと定義する。

(1) 有向閉路を含まない。

(2) $\beta_i(v_i) = \phi$ (ϕ : 空集合) なる節点 v_i をただ一個含む。ただし T_{E_i} は E_i に含まれる枝に関する関数の集合とする。

道路網における OD 交通の OD 交通量, 出発地, 目的地を, グラフにおいて OD フローの OD フロー値, 起点, 終点とよぶこととする。G において n 組の OD フローが存在するとき, それを次式のベクトルであらわす。

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2, \dots, \mathbf{F}^n)$$

\mathbf{F}^r は G における第 r フローとよばれる。 \mathbf{F}^r のフロー値は f^r , 起点 $O(r)$, 終点 $D(r)$ である。 \mathbf{F}^r は次式であらわされる。

$$\mathbf{F}^r = ((C_i^r; \sigma_i^r), (C_j^r; \sigma_j^r), \dots, (C_{i(r)}^r; \sigma_{i(r)}^r)) \quad (3)$$

C_i^r は $O(r)$, $D(r)$ を起終点とするチェーンの集合の要素であり, σ_i^r は C_i^r のフロー値である。したがって次式が成り立つ。

$$f^r = \sum_{i=1}^{i(r)} \sigma_i^r \quad (4)$$

$\mathbf{e}_k = (v_x, v_y)$ のとき, \mathbf{e}_k を含む \mathbf{F}^r のチェーン C_i^r に対する σ_i^r の和

$$\sum_{\{i \mid (v_x, v_y) \in C_i^r\}} \sigma_i^r = \alpha_k^r (= \alpha^r(v_x, v_y)) \quad (5)$$

を枝 \mathbf{e}_k の第 r フロー値とよぶ。 \mathbf{e}_k のフロー値は

$$\alpha_k = \sum_{r=1}^n \alpha_k^r \quad (6)$$

となる。また次式が成り立たねばならない。

$$0 \leq \alpha_k < C(\mathbf{e}_k)$$

また「等時間原則に従う流れ」とは次の関係を満たすものをいう。

異なる経路 C_i^r, C_j^r に対して

$$\sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_i^r, \sigma_i^r > 0\}} T_k < \sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_j^r, \sigma_j^r = 0\}} T_k \quad (7)$$

$$\sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_i^r, \sigma_i^r > 0\}} T_k = \sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_j^r, \sigma_j^r > 0\}} T_k \quad (8)$$

また $\sigma_i^r > 0$ なるチェーンの集合を $\{C_i^r, C_j^r, \dots, C_{i(r)}^r\}$ とすると, 「等時間原則に従う流れ」において, このチェーンの集合によって作られる部分グラフは単向グラフをなす。

これに対して, 本文では「最適配分に従う流れ」においても, (7), (8)式と類似した関係が成り立つことを証明した。 $W_k(\alpha_k) = d(T_k(\alpha_k)\alpha_k)/d\alpha_k$ とおくと, 「最適配分に従う流れ」とは, 次の関係を満たすものをいう。

$$\sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_i^r, \sigma_i^r > 0\}} W_k < \sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_j^r, \sigma_j^r = 0\}} W_k \quad (9)$$

$$\sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_i^r, \sigma_i^r > 0\}} W_k = \sum_{\{k \mid \mathbf{e}_k \in C_j^r, \sigma_j^r > 0\}} W_k \quad (10)$$

また最適配分が生ずるとき, 同一起点 v_i をもつ OD フローが配分される枝の集合は単向グラフをなす。

(9), (10)式は次のことを意味する。最適配分がされると, 起点 v_i , 終点 v_j をもつ OD フロ

一が配分されるチェーンを $\{C_1^r, C_2^r, \dots, C_{i(r)}^r\}$ とする。有向グラフにおいて v_i と v_j を結ぶその他のチェーンを $C_{i(r)+1}^r$ とする。 $(\sigma_{i(r)+1}^r = 0)$ そのとき $C_1^r, C_2^r, \dots, C_{i(r)}^r$ における W_k の和はすべて等しく、その他のチェーン $C_{i(r)+1}^r$ の W_k の和より小である。

同一起点をもつ OD フローの起点を v_i 、終点を $D_i(1), D_i(2), \dots, D_i(k_i)$ とする。各 OD 間に OD フロー値 $f^{i1}, f^{i2}, \dots, f^{ik_i}$ が与えられる。このように表現するとすべての OD フローの数は次式であらわせる。

$$n = \sum_{i=1}^m k_i$$

本文では最適配分のこれらの性質に着目して、通過時間の短いチェーンの集合によって作られる、いくつかの単向グラフについて最適配分を計算して、それらの最小値を近似的な最適配分に行っている。

3-2 総通過時間のもつ意味について

有向グラフ G において、 n 組の OD フローが与えられ、起点、終点、OD フロー値、各チェーンのフロー値 σ_i^r が定まると、チェーン C_i^r の通過時間 T_i^r は次式で与えられる。

$$T_i^r = \sum_{\{k \mid e_k \in C_i^r\}} T_k$$

このとき、次式を最小にする配分を最適配分とよぶ。

$$\sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^{v(r)} T_i^r \sigma_i^r = \sum_{\{k \mid e_k \in E\}} T_k(\alpha_k) \alpha_k \quad (11)$$

(11)式が実際の道路網での交通流に対してもつ意味について考察する。道路網で n 組の OD 交通が存在するとき、起点を $O(1), O(2), \dots, O(n)$ 、終点を $D(1), D(2), \dots, D(n)$ とする。各起終点間の OD 交通量を f^1, f^2, \dots, f^n 台/時間とする。各 OD 交通のそれぞれの走行経路の交通量を σ_i^r 台/時間とする。このとき次の定理が成り立つ。

(定理 1) OD 交通量一定の道路網における総通過時間は道路網上の車台数の平均値である。

(証明) 時刻 t に道路網に存在する車台数を $N(t)$ とする。また走行経路 C_i^r をとおり、起終点が $O(r), D(r)$ の車で、道路網上に存在する車台数を $N_i^r(t)$ とする。 Δt を定数、 P を十分大きな整数とすると次式が成り立つ。

$$N(t_0 + j\Delta t) = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^{v(r)} N_i^r(t_0 + j\Delta t) \quad (12)$$

走行経路 C_i^r にある車の平均台数は、走行経路の平均通過時間と走行経路をとる交通量 σ_i^r の積に等しいので次式が成り立つ。

$$\frac{1}{P} \sum_{j=1}^P N_i^r(t_0 + j\Delta t) = T_i^r \cdot \sigma_i^r \quad (13)$$

(12), (13)式より次式が成り立つ。

$$\frac{1}{P} \sum_{j=1}^P N(t_0 + j\Delta t) = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^{v(r)} T_i^r \sigma_i^r \quad (\text{証明終})$$

3-3 総通過時間を最小にする条件

起終点の集合を同一の起点をもつものによって、部分集合にする。起点が v_i になっている OD フローの終点の集合を

$$D_i = \{D_i(1), D_i(2), \dots, D_i(k_i)\}$$

とする。これらの起終点間の OD フロー値を $f^{i1}, f^{i2}, \dots, f^{ik_i}$ とする。この起終点集合の部分集合を (v_i, D_i) とする。このとき $e_k = (v_x, v_y)$ のフローのうち、 $f^{i1}, f^{i2}, \dots, f^{ik_i}$ によるフローを G_i フロー値とよび次式で与える。

$$\begin{aligned} \alpha_k^i &= \alpha^i(v_x, v_y) \\ &= \sum_{\{r \mid (O(r), D(r)) \in (v_i, D_i)\}} \sum_{\{l \mid (v_x, v_y) \in C_l r\}} \sigma_l^i \end{aligned} \quad (14)$$

α_k^i はキルヒホッフ第一法則を満たさねばならないので次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\sum_{v_y \in \beta_1(v_x)} \alpha^i(v_x, v_y) - \sum_{v_y \in \beta_2(v_x)} \alpha^i(v_y, v_x) \\ &= \begin{cases} \sum_{l=1}^{k_i} f^{il} & v_x = O(i) \\ -f^{il} & v_x = D_i(l) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

総通過時間が最小に交通流が配分されるとき、次の定理が成り立っている。

(定理 2) 同一起点をもつ OD フローの集合が総通過時間最小に配分されたとき、配分された枝の集合によって作られる有向グラフは単向グラフをなす。

(証明) 省略

起点 v_i なる単向グラフの一つを G_i とする。 G_i の独立な閉路を P_1^i, P_2^i, \dots とする。各閉路は右まわりの方向をもつ。そして次の関数を定義する。

$$\delta(P_a^i, k) = \begin{cases} 1 & P_a^i \text{ と } e_k \text{ は同方向} \\ 0 & P_a^i \text{ は } e_k \text{ を含まぬ} \\ -1 & P_a^i \text{ と } e_k \text{ は逆方向} \end{cases} \quad (16)$$

3-3-1 起点が単一な場合

有向グラフを単向グラフ $G_i[V, E, T]$ とし、各枝の G_i フロー値を $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_b^i$ とする。また各枝の定常フロー値を A_1, A_2, \dots, A_b とする。 $\alpha_k = \alpha_k^i + A_k$ である。この枝フロー値をベクトルであらわす。

$$\mathbf{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_b)$$

$$\mathbf{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_b^i)$$

関数 $F(\mathbf{\alpha})$ は次式で与えられる

$$F(\mathbf{\alpha}) = \sum_{k=1}^b T_k(\alpha_k) \alpha_k \quad (17)$$

$\mathbf{\alpha}^i$ が(15)式を満たし、(17)式を最小にするなら、 $\mathbf{\alpha}_i$ は総通過時間を最小にするという。ただし $\alpha_k^i > 0$ ($k=1, 2, \dots, b$) である。

$$W_k(\alpha_k) = d(T_k(\alpha_k) \cdot \alpha_k) / d\alpha_k$$

とする。 $W'_k(\alpha_k)$ を次式で定義する。

$$W'_k(\alpha_k) = \begin{cases} W_k(\alpha_k) & \alpha_k^i > 0 \\ W_k(A_k) - R\alpha_k^i & \alpha_k^i \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

(18)式で R を十分大きな値とすると次の定理が成り立つ。

(定理 3) 同一起点をもつ OD フローが単向グラフ G_i に配分されるとき、 G_i のすべての閉路に対して次式が成り立てば α_k^i ($k=1, 2, \dots, b$) は最適配分の近似値となる。

$$\sum_{k=1}^b \delta(P_a^i, k) \cdot W'_k(\alpha_k) = 0 \quad (19)$$

ただし $a = 1, 2, \dots$

(証明) (19)式を満たしている配分の値を $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_b$ とする。 $\bar{\alpha}_k^i = \bar{\alpha}_k - A_k$ とする。 $\bar{\alpha}_k^i > 0$ なる枝の集合を S, $\bar{\alpha}_k^i \leq 0$ なる枝の集合を \bar{S} とする。そのとき次式が成り立つ。

$$\sum_{e_k \in S} W_k(\bar{\alpha}_k) \delta(P_a^i, k) + \sum_{e_k \in \bar{S}} \{W_k(A_k) - R\bar{\alpha}_k^i\} \cdot \delta(P_a^i, k) = 0$$

R + dR における解を $\bar{\alpha}_1 + d\alpha_1, \bar{\alpha}_2 + d\alpha_2, \dots, \bar{\alpha}_b + d\alpha_b$ とする。そのとき次式が成り立つ。

$$\sum_{e_k \in S} \left. \frac{\partial W_k}{\partial \alpha_k} \right|_{\bar{\alpha}_k} \cdot d\alpha_k \cdot \delta(P_a^i, k) - \sum_{e_k \in \bar{S}} \{R d\alpha_k + dR \bar{\alpha}_k^i\} \cdot \delta(P_a^i, k) = 0 \quad (20)$$

$dR/R = \varepsilon$ とおく。

(20)式は物理的には $e_k \in S$ なる枝の抵抗値を $\partial W_k / \partial \alpha_k |_{\bar{\alpha}_k}$ とし、 $e_k \in \bar{S}$ なる枝の抵抗値を R, 電圧源を $dR \cdot \bar{\alpha}_k^i$ としたとき、回路の各枝の電流値を $d\alpha_k$ とおいたものに等しい。よってすべての枝について $R \gg \partial W_k / \partial \alpha_k |_{\bar{\alpha}_k}$ ならば、 $e_k \in \bar{S}$ なる枝は定電流源と見なされる。

(1) \bar{S} の部分集合 $\bar{S}' \subset \bar{S}$ が G_i のカットセットの場合は、 \bar{S}' によって G_i は 2 つの部分グラフに分けられる。このときすべての起終点の一つの部分グラフに含まれる。これは G_i が通過時間の短いチェーンの集合からつくられるという性質から生じる。このときはその部分グラフについてのみ考察する。

(2) \bar{S} が G_i のカットセットを含まぬ場合は、 $e_k \in \bar{S}$ なる枝について $d\alpha_k = -\varepsilon \bar{\alpha}_k^i$ となる。したがって $R \rightarrow \infty$ とすると、 $\bar{\alpha}_k^i \rightarrow 0$ ($e_k \in \bar{S}$) となる。

任意の閉路 P_a^i における枝 $e_k \in \bar{S}$ ($\alpha_k^i \neq 0$) の G_i フロー値 α_k^i が増加する方向にフロー値を変化させると、(19)式より(17)の値は増加する。よって(19)式が成り立つと、最適配分の近似値となる。(証明終)

$R \rightarrow \infty$ のとき(18)式の $R \alpha_k^i$ と(20)式の W_k^i は一致する。

(定理 4) 総通過時間を最小にする G_i のフロー値 $\bar{\alpha}_k$ は G_i のすべての独立な閉路に対して(21)式を満たしている。

$$\sum_{k=1}^b \delta(P_a^i, k) \cdot t_k(\bar{\alpha}_k) = 0 \quad (21)$$

ただし $t_k(\alpha_k)$ は次式で与えられる。

$$t_k(\alpha_k) = \begin{cases} W_k(\alpha_k) & \alpha_k^i > 0 \\ W_k(A_k) - w_k^i & \alpha_k^i = 0 \end{cases} \quad (22)$$

w_k^i は非負なる定数とする。

(証明) G_i で $\bar{\alpha}_k^i = 0$ なる枝 e_k の集合を \bar{S} とする。 $e_k, e_k \in \bar{S}$ なる枝について

$$\delta(P_a^i, k) \cdot \delta(P_a^i, k) = -1 \quad (23)$$

が成りたつとき、閉路 P_a^i のフローを変化させることはできない。 P_a^i のすべての枝に関して(23)式が成り立たないとき、閉路のすべての枝のフロー値を右まわりの方向に Δ だけ変化させる。そのとき e_k のフロー値は $\bar{\alpha}_k + \Delta \delta(P_a^i, k)$ となる。そして枝フロー値はベクトル $\bar{\alpha} + \Delta P_a^i$ とする。 Δ を微小な変化とすると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & F(\bar{\alpha} + \Delta P_a^i) - F(\bar{\alpha}) \\ &= \sum_{k=1}^b W_k(\bar{\alpha}_k) \cdot \Delta \cdot \delta(P_a^i, k) \\ &= \sum_{k \in \bar{S}} W_k^i \Delta \delta(P_a^i, k) \end{aligned}$$

P_a^i のフロー値は $e_k \in \bar{S}$ なる枝と同じ方向にのみ増加しうるので、 $\Delta \cdot \delta(P_a^i, k) > 0$ である。ゆえに $\bar{\alpha}$ は $F(\alpha)$ を最小にするフロー値である。(証明終)

一般には道路には容量 $C(e_k)$ がある。このときは $t_k(\alpha_k)$ を次式で定義する。

$$t_k(\alpha_k) = \begin{cases} W_k(A_k) - w_k^i & \alpha_k^i = 0 \\ W_k(\alpha_k) & \alpha_k^i > 0, \alpha_k < C(e_k) \\ W_k(C(e_k)) + \omega_k & \alpha_k = C(e_k) \end{cases} \quad (24)$$

ただし $\omega_k > 0$

上式で与えられる $t_k(\alpha_k)$ が(21)式を満たすなら、そのときの $\bar{\alpha}$ の値は $F(\alpha)$ を最小にすることがいえる。

3-3-2 一般の多重フローについて

起点が二個以上の一般の多重フローについて考察する。ODフローで起点 v_i なるものが単向グラフ G_i に配分されるとする。それらの単向グラフを G_1, G_2, \dots, G_m とする。また G_i は $G_i[V_i, E_i, T_{E_i}]$ とする。枝を部分集合に分ける。部分集合 $D(i_1, i_2, \dots, i_l)$ は異なる l 組の単向グラフの枝集合 $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_l}$ にもみ属する枝の部分集合とする。すると、

$$E = \{D(1), D(2), \dots, D(m), D(1, 2), \dots, D(m, m-1), D(1, 2, 3), \dots, D(1, 2, 3, \dots, m)\}$$

となる。このとき、 $e_k \in D(i_1, i_2, \dots, i_l)$ なら、 α_k は次式であらわされる。

$$\begin{aligned} e_k &= \sum_{\{i_j \mid e_k \in D(i_1, i_2, \dots, i_l)\}} \alpha_k^{i_j} \\ &= \alpha_k^{i_1} + \alpha_k^{i_2} \dots + \alpha_k^{i_l} \end{aligned} \quad (25)$$

また $e_k \notin E_i$ なら $\alpha_k^i = 0$ である。 G のフロー値を $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m)$ とする。このとき G のフロー値の関数 F は次式で与えられる。

$$F(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m) = \sum_{k=1}^b T_k(\alpha_k) \cdot \alpha_k \quad (26)$$

すべての k, i について $\alpha_k^i \geq 0, \alpha_k \leq C(e_k)$ を満たす G のフロー値が(15)式を満たし、(26)式を最小にするなら、 $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m)$ は総通過時間を最小にするという。この総通過時間を最小にする G のフロー値 $(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2, \dots, \bar{\alpha}^m)$ について、次の定理が成り立つ。

(定理5) 総通過時間を最小にする G のフロー値 $(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2, \dots, \bar{\alpha}^m)$ はすべての単向グラフの独立な閉路に対して(27)式を満たしている。

$$\sum_{k=1}^b \delta(P_a^i, k) \cdot W_k(\bar{\alpha}_k) = 0 \quad (27)$$

(27)式の $\bar{\alpha}_k$ は G のフロー値が $(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2, \dots, \bar{\alpha}^m)$ のときの e_k のフロー値である。

(証明) G_i の任意の閉路 P_a^i のフロー値を Δ だけ増加させる。そのとき G_i フロー値は $\bar{\alpha}^i + \Delta P_a^i$ とあらわされる。また e_k のフロー値は $\bar{\alpha}_k + \Delta \delta(P_a^i, k)$ となる。そのとき総通過時間の変化量は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & F(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2, \dots, \bar{\alpha}^i + \Delta P_a^i, \bar{\alpha}^m) - F(\bar{\alpha}^1, \dots, \bar{\alpha}^m) \\ &= \sum W_k(\bar{\alpha}_k) \cdot \delta(P_a^i, k) \cdot \Delta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Δ を微少な変化とすると上式が成り立つ。ゆえに各単向グラフのすべての閉路について、閉路のフロー値を変えても、総通過時間は変わらないので、 F は $(\bar{\alpha}^1, \dots, \bar{\alpha}^m)$ において極小値をとる。

また(27)式の成り立たない閉路があると、その閉路のフロー値を変化させると、総通過時間は減少する。ゆえに $\bar{\alpha}^i$ は必ず(27)式を満たさねばならない。(証明終)

一般には道路には容量が存在する。そしてOD交通量が道路網の最大容量を越えると(27)式を満たす配分は存在しなくなる。また $W_k(\alpha_k)$ は次の関係を満たしていると考えられる。

$$\lim_{\alpha_k \rightarrow C(e_k)} W_k(\alpha_k) = \infty$$

しかし $W_k(C(e_k)) < \infty$ と仮定したときについて考える。このとき容量一杯に流れる枝が存在する。

「閉路 P_a^i に Δ 変位を与える」とは P_a^i の各枝の G_i フロー値を閉路の右向きに Δ だけ増加させることを意味することとする。 G の枝フロー値を

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_b)$$

とする。閉路 P_a^i に Δ 変位を与えると、 G のフロー値、 G の枝フロー値は次のようになる。

$$\begin{aligned} & (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^i + \Delta P_a^i, \dots, \alpha^m) \\ & \alpha + \Delta P_a^i = (\alpha_1 + \Delta \delta(P_a^i, 1), \dots, \alpha_b + \Delta \delta(P_a^i, b)) \end{aligned}$$

また閉路 P_a^i の Δ 変位の可能性について、次のように分類できる。

(1) Δ 変位の不可能な状態

P_a^i に含まれる枝 e_j, e_k において次の関係が成り立てば、 Δ 変位は不可能である。

$$\alpha_j^i = C(e_j), \alpha_k^i = C(e_k)$$

$$\delta(P_a^i, j) \cdot \delta(P_a^i, k) = -1$$

(2) P_a^i の枝 e_k において、 $\alpha_k^i = C(e_k)$ ならば、 Δ 変位可能な方向は枝 e_k と逆方向となる。

(3) P_a^i の枝 e_j, e_k において

$$\alpha_j^i = C(e_j), \alpha_k = C(e_k), \alpha_k^i < C(e_k)$$

$$\delta(P_a^i, j) \cdot \delta(P_a^i, k) = -1$$

なら, P_a^i で Δ 変位可能な方向は e_j と逆方向である。

$$\alpha_k = \alpha_k^b + \alpha_k^c + \dots + \alpha_k^d + \alpha_k^i$$

とすると, Δ 変位により $\alpha_k^i \rightarrow \alpha_k^i + \Delta (\Delta > 0)$ となる。すると $\alpha_k^b, \alpha_k^c, \dots, \alpha_k^d$ のどれかが Δ だけ減って, 例えば, $\alpha_k^d \rightarrow \alpha_k^d - \Delta$ とならねばならない。これを「 P_a^i の Δ 変位によって, 枝 e_k から G_d に Δ 変位を与える」とよぶ。

(4) P_a^i の枝 e_j, e_k において

$$\alpha_j^i < C(e_j), \alpha_j = C(e_j)$$

$$\alpha_k^i < C(e_k), \alpha_k = C(e_k)$$

$$\delta(P_a^i, j) \cdot \delta(P_a^i, k) = -1$$

なら, P_a^i に Δ 変位を与えると, 変位量の正負によって, e_j または e_k から他の単向グラフに Δ 変位を与える。

(5) P_a^i の枝 e_k で, $\alpha_k = C(e_k), \alpha_k^i < C(e_k)$ なら, 変位量 Δ の正負によって, 他の単向グラフに Δ 変位を与える場合と, 与えない場合とがある。

(6) P_a^i の枝で $\alpha_k = C(e_k)$ なる枝がないとき, 「 P_a^i は独立に変位する」とよぶ。

(2)~(5)においても, Δ 変位によって, 他の単向グラフに Δ 変位を与えないとき, 独立に Δ 変位するとよぶ。

(定理 6) 総通過時間を最小にする G のフロー値 $(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2, \bar{\alpha}^3, \dots, \bar{\alpha}^m)$ はすべての単向グラフの独立な閉路に対して, (2) 式を満たしている。

$$\sum_{k=1}^b \delta(P_a^i, k) \cdot t_k(\bar{\alpha}_k) = 0 \quad (2)$$

$t_k(\alpha_k)$ は次式で与えられる関数である。

$$t_k(\alpha_k) = \begin{cases} W_k(\alpha_k) & \alpha_k < C(e_k) \\ W_k(C(e_k)) + \omega_k & \alpha_k = C(e_k) \end{cases}$$

ただし ω_k は非負の定数とする。

(証明) 閉路 P_a^i において, 独立に Δ 変位可能なら, 定理 5 と等しくなる。ゆえに P_a^i に Δ 変位を与えるとき, e_k から G_j の閉路 P_a^j に Δ 変位を与えるときについてのみに考察する。その関係を $P_a^i \xrightarrow{e_k} P_a^j$ とあらわす。一般にある閉路 P_a^i の Δ 変位によって次々に別の単向グ

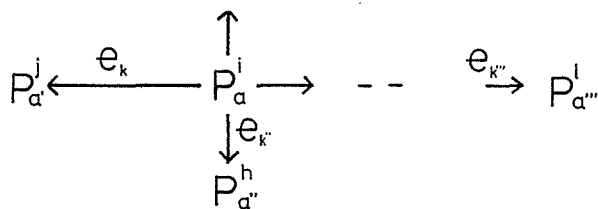


図 1 Δ 変位の例

ラフの閉路に Δ 変位が与えられる。その関係を図 1 の如くあらわす。図 1 において枝 e_k

には P_a^i と P_a^j により逆方向に Δ 変位が与えられるので、 e_k のフロー値は変化しない。したがって他の単向グラフに Δ 変位を与える枝を除いた枝について(28)式を最小にすることを示せば十分である。

G_i で $\bar{\alpha}_k = C(e_k)$ なる枝の集合を \bar{S} とする。そのとき次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} dF &= F(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2 \dots \bar{\alpha}^i + \Delta P_a^i, \dots \bar{\alpha}^m) - F(\bar{\alpha}^1, \dots \bar{\alpha}^m) \\ &= \sum_{k=1}^b W_k(\bar{\alpha}_k) \cdot \Delta \cdot \delta(P_a^i, k) \\ &= - \sum_{k \in \bar{S}} \omega_k \cdot \Delta \cdot \delta(P_a^i, k) \end{aligned}$$

dF のうち他の単向グラフに Δ 変位を与える枝と他の単向グラフから Δ 変位を受ける枝を除く。これらの枝の集合を \bar{S}' とすると、総通過時間の変化は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} dF + \sum_{e_k \in \bar{S}'} \omega_k \cdot \Delta \cdot \delta(P_a^i, k) \\ = - \sum_{\substack{e_k \in \bar{S} \\ e_k \notin \bar{S}'}} \omega_k \cdot \Delta \cdot \delta(P_a^i, k) \end{aligned}$$

$e_k \in \bar{S}$ であつ $e_k \notin \bar{S}'$ なる枝では、枝の方向は Δ 変位する方向に逆になっている。よつて上式は常に正になる。よつて総通過時間を最小にする G のフロー値 $(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2 \dots \bar{\alpha}^m)$ は(28)式を満たしている。（証明終）

4. 最適配分の例題

例 1

各枝の交通量一通過時間特性に線形な関係を与えた場合の例を示す。 $T_k(\alpha_k)$ を次式で与える。

$$T_k(\alpha_k) = R_k \alpha_k + \beta_k \quad 0 \leq \alpha_k \leq C(e_k) \quad (29)$$

枝のフロー値が $\alpha_k = C(e_k)$ になると、 $2T_k(0) = T_k(C(e_k))$ が成り立つと仮定する。定理6を用いてとくと、 $t_k(\alpha_k)$ が(29)式を満たせばよい。 $t_k(\alpha_k)$ は次式で与えられる。

$$t_k(\alpha_k) = \begin{cases} 2R_k \alpha_k + \beta_k & 0 \leq \alpha_k < C(e_k) \\ 2R_k C(e_k) + \omega_k & \alpha_k = C(e_k) \end{cases}$$

例題に用いた R_k , β_k , $C(e_k)$ の値を図2に示した。図4には各起点に対する単向グラフを定めた。図5に解を示す。O(1), O(3)に対する配分は同一のグラフ上で与えた。付録に計算法を述べる。

図2において、OD フロー値を $f^1 = 300K$, $f^2 = 200K$, $f^{31} = 50K$, $f^{32} = 100K$ とする。図5において、 $K = 1, 2 \dots 5$ に対する配分量を示めした。

最首：道路網における交通配分

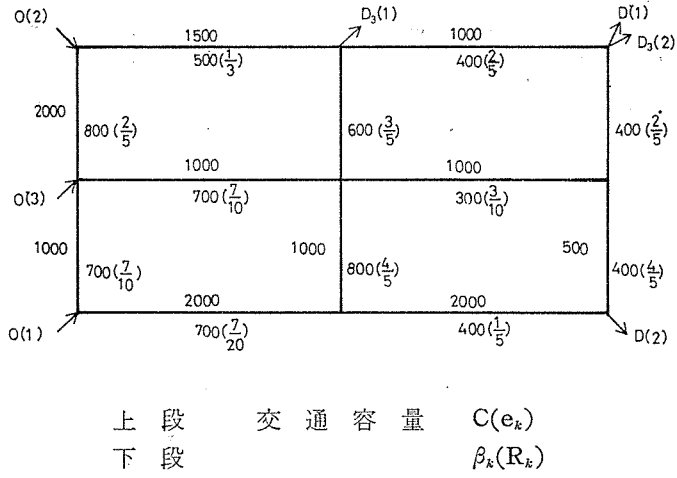


図2 例1の道路網

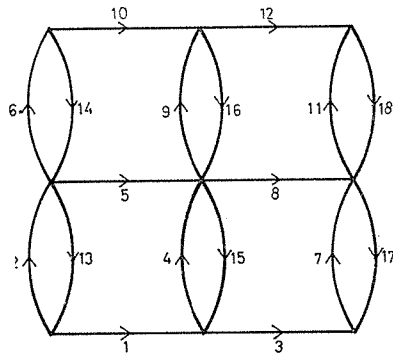


図3 例1の枝番号

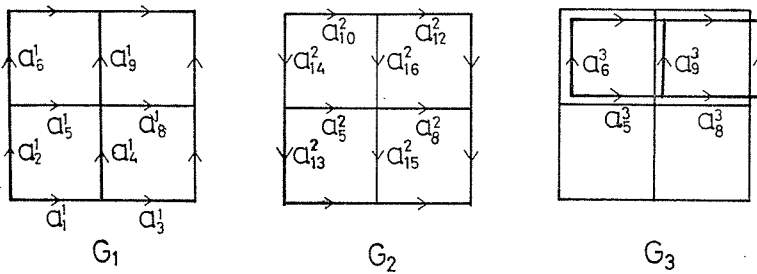


図4 例1の単向グラフ

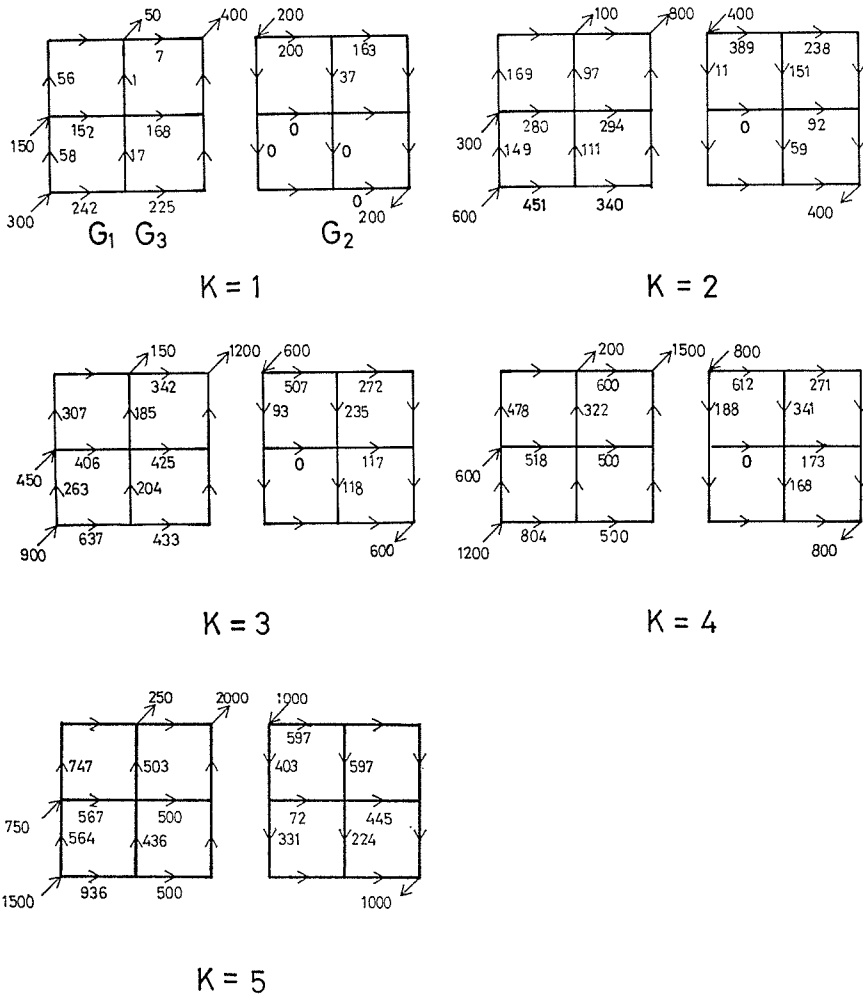


図 5 $K = 1 \sim 5$ についての計算結果

例 2

図 6 の道路網の例を用いて、交通流配分において、一般に解がある領域にあることを示す。すなわち等時間原則に従う流れにおいても、最適配分に従う流れにおいても、解は一意に定まらない。例えば定理 6 より求まる方程式について考察する。図 6 の如く単向グラフを G_1, G_2, G_3, G_4 とする。節点 i に入る枝を e_{4i+2}, e_{4i+4} 、節点 i から出る枝を e_{4i+1}, e_{4i+3} とする。各単向グラフの枝のフロー値は

$$\alpha_{4i+2}^1, \quad \alpha_{4i+3}^1, \quad \alpha_{4i+2}^2, \quad \alpha_{4i+4}^2, \\ \alpha_{4i+1}^3, \quad \alpha_{4i+3}^3, \quad \alpha_{4i+1}^4, \quad \alpha_{4i+4}^4$$

である。各単向グラフのたて、横の節点数を p, q とする。全部の節点数は pq である。枝の数は道路網全体で $2(2pq - p - q)$ である。単向グラフの独立な閉路の数は

($pq - p - q - 1$) である。これらを m, b, l とおく。

$$m = pq$$

$$b = 2(2pq - p - q)$$

$$l = (pq - p - q + 1)$$

G_i の閉路行列を B_i とする。 B_i は $l \times b$ の行列である。接続行列 Q_i は $(m-b) \times b$ の行列である。

f_1, f_2, f_3, f_4 を各単向グラフの OD フロー値より定まる行列とする。 $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ を次式で定める。

$$\alpha^1 = (\alpha_2^1, \alpha_3^1, \alpha_b^1, \dots, \alpha_{i+2}^1, \alpha_{i+3}^1, \dots)^T$$

\vdots

$$\alpha^4 = (\alpha_1^4, \alpha_4^4, \alpha_b^4, \dots, \alpha_{i+1}^4, \alpha_{i+4}^4, \dots)^T$$

このとき(15)式より次式が成り立つ。

$$Q_i \alpha^i = f_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{30}$$

また(26)式より

$$B_i W = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{31}$$

ただし「0」は零行列、 W は

$$W = (W_1(\alpha_1), W_2(\alpha_2), \dots, W_b(\alpha_b))^T$$

をあらわす。(T: 転置行列)

このとき、(31)式は独立な方程式ではない。 B_1, B_2, B_3 の関数として B_4 は定まる。

$$B_4 = f(B_1, B_2, B_3)$$

したがって $W_i(\alpha_i)$ が線形な関数なら、解は α^i をパラメーターとして連立方程式を解くこととなる。

解の性質について付録 2 に述べた。

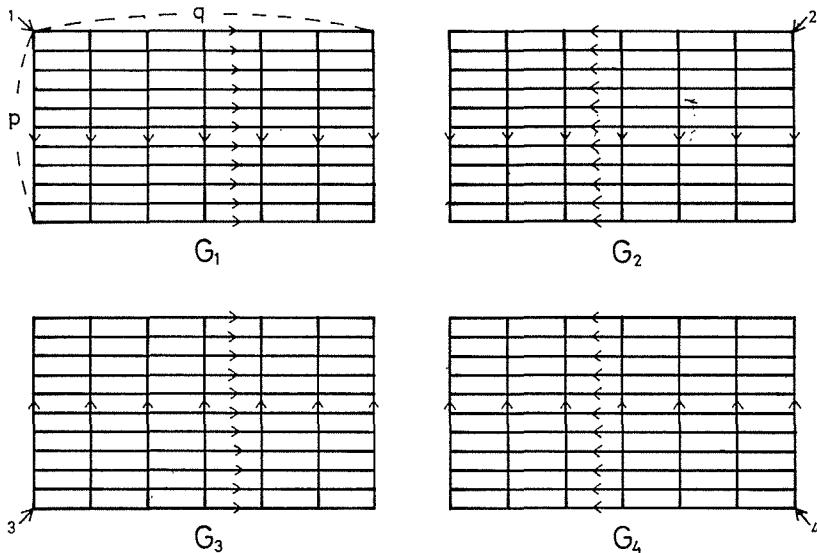


図6-a 例 2 の単向グラフ

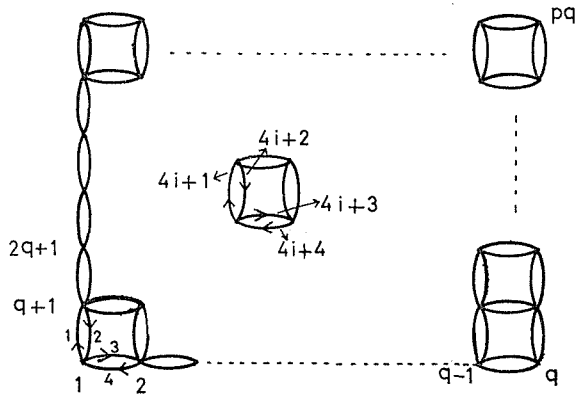


図6—b 例2の道路網

5. おわりに

これまで述べた如く「等時間原則に従う流れ」と「最適配分に従う流れ」は非常に関係が深い。交通量が多くなると、最短経路になっている道路には車が集中して待時間が長くなる。すると交通情報により、交通流はその道路をさける。そしてしばらくすると、逆に最短経路の交通量は減り、道路網が十分に利用されない状態になる。このことは各運転者が時間の最短な経路をえらぶという性質から生ずる。これらの点を改善して、道路網の最大容量近くまで、利用するためには一部のOD交通には時間の最短でない経路をとるように指示などしなければならない。そのためには、最適配分を考慮した交通情報の出し方についてなお検討する必要がある。

実際の道路網は非常に複雑なので、実際に計算する場合は、いろいろ問題が残されている。問題点として次のことがあげられる。

A 単向グラフの定め方

B 一般の多重フローにおける解法

道路網のすべての可能なチェーンの集合からできるすべての単向グラフの数は非常に多くなるので、それぞれについて配分計算することはできない。配分計算するときには距離の短いチェーンの集合から、単向グラフをえらぶのだが、単向グラフのえらび方の定義が不十分であり、また一般の多重フローにおいては解の存在する領域をも考慮しなければならない。

おわりに適切な御助言をいただいた東京大学工学部森脇義雄教授、高羽禎雄助教授、斎藤正男助教授に感謝する。

付録 1, 例 1 の解法

図 4 より枝は次の部分集合となる。

$$D(1) = \{e_2, e_4, e_7\}$$

$$D(2) = \{e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\}$$

$$D(3) = \phi \text{ (空集合)}, D(1, 2) = \{e_1, e_3\}$$

$$D(2, 3) = \phi, D(1, 3) = \{e_6, e_9, e_{11}\}$$

$$D(1, 2, 3) = \{e_5, e_8, e_{10}, e_{12}\}$$

α_k は次のようになる。

$$\alpha_1 = \alpha_1^1 + \alpha_1^2, \quad \alpha_2 = \alpha_2^1, \quad \alpha_3 = \alpha_3^1 + \alpha_3^2$$

$$\alpha_4 = \alpha_4^1, \quad \alpha_5 = \alpha_5^1 + \alpha_5^2 + \alpha_5^3$$

$$\alpha_6 = \alpha_6^1 + \alpha_6^2, \quad \alpha_7 = \alpha_7^1, \quad \alpha_8 = \alpha_8^1 + \alpha_8^2 + \alpha_8^3$$

$$\alpha_9 = \alpha_9^1 + \alpha_9^2, \quad \alpha_{10} = \alpha_{10}^1 + \alpha_{10}^2 + \alpha_{10}^3$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{11}^1 + \alpha_{11}^3, \quad \alpha_{12} = \alpha_{12}^1 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{12}^3, \quad \alpha_{13} = \alpha_{13}^1$$

$$\alpha_{14} = \alpha_{14}^1, \quad \alpha_{15} = \alpha_{15}^1, \quad \alpha_{16} = \alpha_{16}^1, \quad \alpha_{17} = \alpha_{17}^1, \quad \alpha_{18} = \alpha_{18}^1$$

これらの変数を求める。(2)式の連立方程式より求まる解が $\alpha_k^i < 0$ なる枝, $0 \leq \alpha_k \leq C(e_k)$ なる枝, $\alpha_k > C(e_k)$ なる枝によって, それぞれの枝の集合を \bar{S}_-, S, \bar{S}_+ なる部分集合とする。そして次式を満たす枝 e_{k_0} を求める。

$$\alpha_{k_0} = \max \left\{ \max_{e_k \in \bar{S}_-} |\alpha_k^i|, \max_{e_k \in \bar{S}_+} (\alpha_k - C(e_k)) \right\} \quad (2)$$

e_{k_0} のフロー値を次式で与える。

$$= \begin{cases} \alpha_{k_0}^i = 0 & e_{k_0} \in \bar{S}_- \\ \alpha_{k_0} = C(e_{k_0}) & e_{k_0} \in \bar{S}_+ \end{cases} \quad (3)$$

そして $\alpha_k^i < 0$, $\alpha_k > C(e_k)$ なる枝がなくなり, (2)式の ω_k が非負になる配分が求まるまで繰り返す。繰返し演算で, ω_k が負になったときは (3)式の条件は枝 e_k については解消される。

付録 2 例 2 における解の自由度について

変数と連立方程式の数の差を解の自由度とよぶこととする。例 2 では自由度は 1 である。自由度が生ずる場合はいろいろ考えられる。例えば単向グラフの部分グラフをみると, 図 7 の如く 4 個の節点と隣りあう節点を結んでできる道路網では有向閉路を除くと, 14 種類の単向グラフの部分グラフが作りうる。これらの有向グラフを 2 進コードで図 7 の如くあらわす。1100 のコードのグラフでは e_1, e_2 は閉路と同方向, e_3, e_4 は閉路と逆方向の枝からなるものである。解に自由度が存在するとは, 各単向グラフから部分グラフをいくつかとったとき, 部分グラフのコードの和が mod 2 において, 0000 の形になるときである。

部分グラフのコードの和が mod 2 において 0000 となる異なる単向グラフの独立な閉路 (部分グラフ) の組の数が配分における自由度となる。

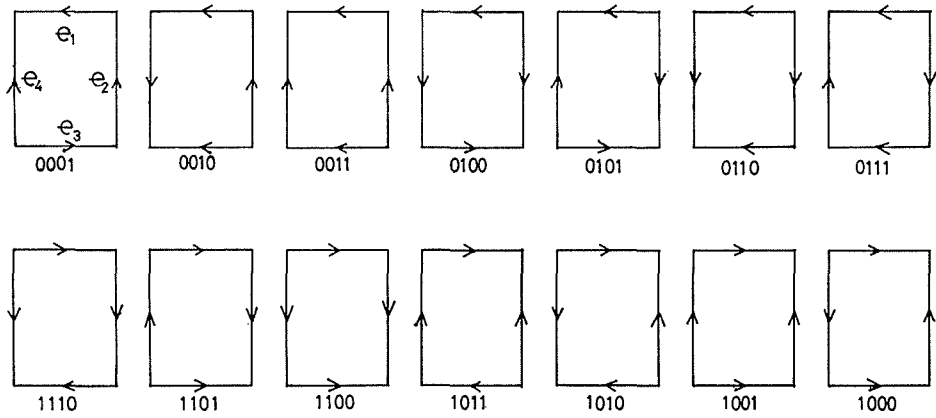


図7 閉路とコード

文 献

- (1) 浜田：東大生研電気談話会報告 vol.20 No.8 (昭和45—3)
- (2) 飯田：交通工学 vol.5 No.6 p.26—55 (昭和45—11)
- (3) 最首：東大生研電気談話会報告 vol.20 No.32 (昭和45—11)
- (4) 森脇，最首：信学会回路とシステム理論研究会資料 CT70—42 (昭和45—12)
- (5) C. Pinnell, G. T. Satterly：ASCE vol.89, EM6 P.67~P.95 (1963—12)
- (6) R. R. Snell, T. C. Young：Proc. ASCE HW2 P.1~P.14 (1966—10)

Traffic Assignment in the Highway Networks

Kazuo SAISHU

Department of Basic Technology, Faculty of Engineering

When a traffic assignment minimizes total travel time, O-D flows are assigned optimum in the networks. It is reported how to minimize total travel time. The highway networks are represented by a directed graph, $G(V, E, T)$, where V , E and T represent sets of nodes, branches and functions of travel time of the branches respectively. The travel time of a branch e_k is a function of the traffic volume, so it is given by $T_k(\alpha_k)$. The capacity of e_k is $C(e_k)$. If we assume $W_k(\alpha_k)$ as follows ;

$$W_k(\alpha_k) = d(T_k(\alpha_k) \cdot \alpha_k) / d\alpha_k,$$

then $dW_k(\alpha_k) / d\alpha_k$ is obtained to be positive in $0 < \alpha_k < C(e_k)$.

If $V = \{v_i\}$, $E = \{e_k\}$, then $e_k = (v_i, v_j)$ is a directed branch from v_i to v_j , where v_i represents initial node and v_j terminal node respectively. G_i is a subgraph of G . If there is no directed cycle and only one node which is not a terminal node for all branches in the subgraph, then G_i is defined a unidirectional graph. The author studies the elegant solution to minimize total travel time in G_i when a unidirectional graph is selected suitably. When some unidirectional graphs are obtained from the set of chains which have shorter travel time, the traffic assignments are computed for some of G_i , and the optimum assignment is selected so a traffic assignment that have minimum total travel time among them.