論　説

「ベイズの定理」再考

河　村　新　蔵
（山形大学名誉教授）

概要　PCR 検査等、社会現象の解析に用いられている「ベイズの定理」の適用について再検討を行う。その結果を踏まえて長年論争が続いていた「弘前大学医学部教授夫人殺人事件」における血液鑑定について筆者の見解を述べる。

Abstract　We reconsider Bayes' Theorem used in social phenomena and give our opinion on Blood Test in the trial murder case of a wife of Professor of Hirosaki University School of Medicine.

はじめに

2021 年、数学の個別の定理としては珍しく、確率論の「ベイズの定理」が話題になった。科学雑誌「Newton」では 2 度にわたって特集が組まれていた ([N1] [N2])。また、2019 年に発生した新型コロナ感染症は我が国においても社会に深刻な影響を与え、PCR 検査の有効性について様々な議論がなされている。その中でも医学の立場からは「ベイズの定理」が引用されることが多い。この「ベイズの定理」について筆者には長い間「気にかかること」があった。1949 年、戦後まもない頃起こった「弘前大学教医学部授夫人殺人事件」の裁判における血液鑑定のことである。この事件の被告は一貫して無罪を主張していたが、裁判において「ベイズの定理」を用いた血液鑑定が証拠として採用され無期懲役の判決となった。しかし、その後、真犯人が名乗り出、再審では元被告は無罪であるとの判決が下った。一方、事件は時効のため真犯人は裁判にかけられることはなかった ([I][Ka])。裁判は終わったが、再審無罪判決において「ベイズの定理」については何の言及もなく、この定理の裁判における位置付けは曖昧なものとなり、法学者、数学者による議論が続いていた ([Han][H-K][Ki][O][Ta])。筆者はこの論争はどうなっていたのだろうかとネットの Wikipedia で検索したところ、驚くべきことに、2021 年そしてこの原稿を執筆中の 2022 年現在においても、この裁判における「ベイズの定理」の位置付けがはっきりされていない、未だ意見あるいは解説を求めていることが分かった ([W2])。Wikipedia は社会的影響も大きく ([M])、数学の立場からこの問題について意見を述べておくことは重要であると考え本論説を記すことにした。

「ベイズの定理」自体は易しく、高校で習う集合論の初歩的知識 ([Tsu]) さえあれば証明も意味も理解できる。何が問題なのだろうか。数学の定理は社会、自然の理屈から超越し 100％正

しい。しかし、数学の理論が社会、自然の世界にモデルとして適用されるとき、少なからず数値の誤差あるいは概念の解釈のずれが生ずる。特に確率論の応用については問題が多い。現実の社会に確率論（数学）を適用するときには、しばしば人の希望的観測が入り込み論争の的になる。この論説では「ベイズの定理」に限定し、確率論を現実の世界に適用するとき、どのような問題が起こるのか、社会でよく知られている現象について述べ、そして最後に「弘前大学教授夫人殺人事件」における筆者の見解を示す。

1. 確率空間

まず、確率の数学的枠組みを正確に定義する。「定義を正確にする」ことが数学の生命であるが、そのことが議論をわざわざ複雑にするという批判もあることは事実である。しかし、議論を正確に進めるためには定義から出発しなければならない。ただし、ここで使う定義、定理は高校数学のレベルであり、殆どの啓蒙書と同じように、大学数学で用いる専門用語は必要最小限にとどめる。

一般に、さいころや硬貨を投げるときのように、あるいは人の出産、死亡のように何回も起こり、その結果が偶然によって決まるような実験、観察、事例を試行、試行の結果として起こる事柄を事象という。事象の起こる確率を研究することが確率論である。高校数学、啓蒙的な確率の議論では表面上は現れない数学的確率論の枠組み「コルモゴルフの公理系」は、「ベイズの定理」について正確な議論をしていく上で必須の公理系であるので本論説では明記する。この公理系を記す前に、統計・確率論の概念と数学の基礎である集合の概念との対応について述べる。

標本空間は集合 Ω、事象は Ω の部分集合 A、事象 A の確率は $P(A)$ $(0 \leqq P(\mathrm{A}) \leqq 1)$ で表す。事象 A が起こらないことも 1 つの事象であり、これを A の補集合 $A^C = \Omega \setminus A$ で表し、$P(A^C) = 1 - P(A)$ である。この論説では標本空間は全て有限であるので Ω は有限集合に限るとする。事象については通常、Ω が有限集合のとき、Ω の部分集合全てを対応させるが、この論説ではある部分集合は事象に対応しない場合も考える。事象の集合全体として $\mathcal{F}$ で表し事象空間という。Ω の部分集合全ての集合を $\mathcal{P}(\Omega)$ で表し、Ω の全ての部分集合が事象である場合は $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ である。事象空間 $\mathcal{F}$ は Ω の部分集合 A の中で確率 $\mathrm{P}(A)$ が決定可能な A の集まりである。この論説においては与えられた問題に対し、事象空間 $\mathcal{F}$ として何が適切な集合族であるか考察する。集合 Ω は有限と仮定しているので Ω の部分集合 A も有限であり、A の個数を $\#(A)$ と記す。特に Ω は Ω の特別な部分集合であり、$\mathrm{n} = \#(\Omega)$ とすれば

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{\mathrm{n}} \}$$

と記すことができる。なお、$\mathcal{P}(\Omega)$ は有限集合であり個数は 2^n である。以下に $\mathcal{P}$、$\mathcal{F}$ および P に関する確率の基本となるコルモゴルフの公理系を示す。

1.1［コルモゴルフの公理系］

集合 Ω に対して、Ω の部分集合の集合（族）$\mathcal{F}$、$\mathcal{F}$上の集合関数 P が次の (1)、(2) の公理をみたしているとき、3 つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間という。

(1) 部分集合の族 $\mathcal{F}$ について

(1-1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(1-2) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^C \in \mathcal{F}$

(1-3) $A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{F}$ ならば $\cup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F}$ に対する実数値対応 $P(A)$ について

(2-1) $0 \leqq P(A) \leqq 1$

(2-2) $P(\Omega) = 1$

(2-3) $A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{F}$ かつ $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$ ならば $P(\cup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

このとき、数学用語として $\mathcal{F}$ を加法族、P を確率といい、3 つ組 $(\Omega. \mathcal{F}, P)$ を確率空間という（加法族は正確には有限加法族であるが本論説では有限集合にみ扱うのでこのようにいう）。

［注 1］(1-1) と (1-2) から空集合 $\emptyset = \Omega \cap \Omega^C$ は $\mathcal{F}$ の元であり、(2-2) と (2-3) より $P(\emptyset) = 0$ であることがわかる。すなわち、何も起こらない事象の確率は当然ながら 0 であることを示している。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ のとき、Ω の元 ω_i 1 個からなる部分集合 $\{\omega_i\}$ は事象であり、確率 $P(\{\omega_i\})$ が存在する。この事象 $\{\omega_i\}$ を根元事象という。Ω の元 ω_i と $\{\omega_i\}$ を同一視する場合が多いが、この論説では標本 ω_i と事象 $\{\omega_i\}$ は意味合いが異なることを考え、異なる記号を用いる。

コルモゴルフの公理系による確率空間は、一般的には Ω の有限性は仮定されないで定義され、社会あるいは自然界において起こる現象の確率を求めるために数学モデルとして用いられる。また、現代数学では「測度論の公理系」として長さ、面積、体積の概念が一般化されている。ここで重要なことは、3 つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ がコルモゴルフの公理系（測度論の公理系）を満たしていれば、一般の人々が確率、面積等にもつイメージとかけ離れていても、それらは数学的には確率論、測度論といわれ抽象化された数学的対象として議論されている、ということになる。

確率論は測度論の特殊な場合と考えられる。このような観点から、以下にのべる議論の対象について現実の社会現象と確率モデル空間の関係を考えたい。また、社会現象の対象となる確率モデルの信頼性はこのモデルにより求めた確率計算と現実社会における統計的確率が一致するか否かに関わっていることも考えたい。

数学としては「コルモゴルフの公理系」から出発すればよいのであるが、それは数学の論理、

現実社会からみれば架空の理論であり、実際には確率 $P(A)$ とは具体的にどういう数値なのかを確認しなければならない。一般的な確率論の教科書 [Hat] には以下の 2 つが挙げられている。このとき、標本の元 1 個からなる集合 $\{\omega_i\}$ は事象であること、すなわち $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ であることが大前提となっている。

1.2 定義［算術的確率（あるいは数学的確率)］

標本 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ に対し、各事象 $\{\omega_i\}$ の起こりやすさが同程度であるとき、$\{\omega_i\}$ の確率を$\frac{1}{n}$、すなわち$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$ と定める。

1.3 定義［統計的確率］

ある事象 A が起こるか否かの試行を繰り返すとき、試行回数 k のうち事象 A の起こる回数 $k(A)$ とする。k が大きいとき、A の頻度$\frac{k(A)}{k}$ がほぼ一定値 α であれば事象 A の確率を α 、すなわち $P(A) = \alpha$ と定める。

上記 2 つの確率の定義は数学的には曖昧な言葉が含まれており、数学的定義としては成り立たない。すなわち､1.1 の定義における「起こりやすさが同程度」あるいは 1.2 の定義にける「頻度がほぼ一定値」とはどういうことか。よく考えると明確ではない。しかし、現実の社会において確率を議論する上で上記の定義を用いざるを得ない。

1.4 定義［等確率空間］

標本空間 Ω に対し、$\#(\Omega) = n, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), P(\{w_i\}) = \frac{1}{n} \ (i = 1, 2, \cdots n)$ のとき、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は等確率空間（古典的確率空間）とよばれる。なお、Ω の部分集合 A に対しては$P(A) = \frac{\#(A)}{n}$ である。

高校数学で扱う確率の議論は全て等確率空間を前提に行われており、等確率は次にように記されている。

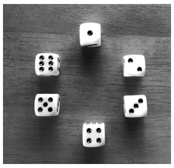
「すべての根源事象は同様に確からしい。すなわち、どの根源事象が起こることも同じ程度に期待されるものとする」

［注］一般社会ではこの前提の下で確率を考えていることになる。このことについて内田 [U] 上ヶ谷、石橋、迫田 [U-I-S] により現場の状況を踏まえて深く鋭い指摘がなされている。本論説においてもこの無意識の前提について検討を加えていくことになる。

等確率空間は一般の確率空間の特別な場合である。ここで、等確率空間と非等確率空間の典型的な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の例をあげる。

1.5［サイコロの目］

1 個のサイコロを投げるとき 1 から 6 までのそれぞれの目がでる確率は $\frac{1}{6}$ である。この現象を確率空間の枠組みで表してみよう。標本空間は次のようになる。



ω_1 = [1 の目], ω_2 = [2 の目], ω_3 = [3 の目]、

ω_4 = [4 の目], ω_5 = [5 の目], ω_6 = [6 の目]

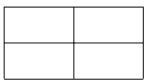
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

標本 $\omega_i(\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, 6)$ に対して、$\{\omega_i\}$ は「i の目が出る事象」であり、この現象が起こる確率は $\frac{1}{6}$、すなわち $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$) である。また、当然ながら $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ である。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は等確率空間であり、事象 $A(\subset \Omega)$ は「集合 A に属する目のいずれかが出ること」であり、$P(A) = \frac{\#(A)}{6}$ となる。

［注］確率 $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$ が正しいことは「サイコロが完璧な正六面体である」ことが前提になっている。

1.6［2 地点間の経路］

ある町の地点 G から地点 H までの経路が右の図のようになっている。このとき、最短経路とその経路を通る確率を求めてみよう。ただし、分岐点で右に行くか上に行くかの確率はそれぞれ 50% とする。このとき、標本空間の要素は次の 6 個である。ただし、右と上は格子点から次の格子点への移動方向を表す。



ω_1 =［右右上上］, ω_2 =［右上右上］, ω_3 =［右上上右］

ω_4 =［上右右上］, ω_5 =［上右右上］, ω_6 =［上右右上］

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

当然ながら、$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ であり、各事象 $\{\omega_i\}$ の起こる確率は

$P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$,　$P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{8}$,　$P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{8}$,　$P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{8}$,　$P(\{\omega_5\}) = \frac{1}{8}$,　$P(\{\omega_6\}) = \frac{1}{4}$

となり、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は非等確率空間である。なお、事象 $A\ (\subset \Omega)$ は「集合 A のいずれかに属する経路を通る」ことであり、$P(A) = \sum_{i \in A} P(\{\omega_i\})$ となる。

［注］「分岐点で右に行くか上に行くかの確率はそれぞれ 50%」となることは方向の選択はコンピュータ操作などによる完全無作為の行為であることが前提になっている。また $P(\{\omega_i\})$ は経路 $\{\omega_i\}$ における各分岐点で右か上かを選択する 4 つの確率の積である。この場合、高校

の数学教科書確率分野においては「等確率空間」のみを扱うことになっているのでAからBへの経路の場合の数、それぞれの経路を選択する確率を求めることはあっても、確率空間の中の一事象と取り扱うことはない。

1.7［ルーレットゲーム］

あるカジノでルーレットゲームが行われている。ルーレットはヨーロピアン・スタイルで円盤には37個のポケット Q_0, Q_1, ⋯, Q_{36} があり、あるゲームではプレーヤー達はチップを1個100円で購入し、回転する円盤にディーラーが投げ込んだ球が落ちるポケットを予想し、ルーレット上のポケットにチップをビットする（賭ける）。ただし、プレーヤーは Q_0 のポケットにチップを賭けることができない。ビットしたチップの全個数は M 個であった。ここで2つの配当還元方法について、Q_i にビットした1つのチップに対する獲得賞金の獲得率 R_i とプレーヤー全体の賞金獲得率を R を計算してみよう。

初めに確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を次のように考える。

$$\omega_i = [\text{ポケット } Q_i]\ (i = 0, 1, \cdots, 36), \quad \Omega = \{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{36}\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega),\ P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{37}\ (i = 0, 1, 2, \cdots, 36)$$

このとき、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は等確率空間である。次に

$$m(Q_i) = [Q_i \text{ にビットされたチップの個数}]\ (i = 0, 1, \cdots, 36)$$

$$M = m(Q_0) + m(Q_1) \cdots + m(Q_{36})$$

とする。ゲームのルールより $m(Q_0) = 0$ であることに注意しなければならない。ここで、次の2つ配当方式についてプレーヤーの賞金獲得率を計算してみよう。

［配当方式1 : M 個のチップに購入代金が全て配当として還元される場合］

ポケット Q_i が当たった場合、ポケット Q_i に配当される金額は $M \times 100$、Q_i が当たる確率は $\frac{1}{37}$ であるから $R_i = \frac{M \times 100}{m(Q_i) \times 100}\frac{1}{37}$ 。したがって $R_i > 1$ である条件を求めると

$$R_i > 1 \Leftrightarrow \frac{M}{m(Q_i)} \times \frac{1}{37} > 1 \Leftrightarrow m(Q_i) < \frac{M}{37}$$

ゆえに、プレーヤーはいつも $m(Q_i) < \frac{M}{37}$ となっているポケットにビットすれば（すなわち、ビット個数が平均より少ないポケットにビットする）、このゲームに長期的に勝てるということになる。また、全てのプレーヤーの賞金獲得率を R とすると

$$R = \left(\sum_{i=1}^{36} M \times 100 \times \frac{1}{37}\right) \times \frac{1}{M \times 100} = \frac{1}{37}\sum_{i=1}^{36} 1 = \frac{36}{37}$$

であるから$1-R=1-\frac{36}{37}=\frac{1}{37}$ が胴元の取り分となる。

［配当方式 2：当たりチップ Q_i には 36 倍の配当がされる場合］

ポケット Q_i が当たった場合、Q_i に配当される金額は $n(Q_i)\times 36\times 100$、$Q_i$ が当たる確率は$\frac{1}{37}$ であるから$R_i=\frac{n(Q_i)\times 36\times 100}{37}\times\frac{1}{n(Q_i)\times 100}=\frac{36}{37}<1$。この場合 , プレーヤーは長期的には負けるということになる。また、全てのプレーヤーの賞金獲得率 R は

$$R = \left(\sum_{i=1}^{36} m(Q_i) \times 100 \times 36 \times \frac{1}{37}\right) \times \frac{1}{M \times 100} = \frac{36}{37}$$

であるから$1-R=1-\frac{36}{37}=\frac{1}{37}$が胴元の取り分となる。

［注］ディーラーが投げ込んだ球が落ちるポケットは 37 個のポケットに均等に落ちることが大前提である。プレーヤーは算術的確率を信じているが、統計的確率をもってゲームに使われている円盤が正常なものであるか否かが検証されていくことになる。

3 つの例 1.5、6、7 における確率空間はそれぞれの現象を説明するための数学モデルである。その数学モデルが適切であるかどうかは多くの試行による検証によって決まる。

2. ベイズの定理

2.1［ベイズの定理の説明］

ベイズの定理はある事象 A について別の事象 B が起こったとき、事象 A が起こる確率を求める公式のことをいう。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において、2 つの事象 A、B について、事象 B が起こったとき、事象 A が起こる確率は $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ である ($P(B)\neq 0$ の場合のみを考える)。この確率を条件付き確率といい、$P(A|B)$ と記す。抽象的に数学として定義すると

2 つの部分集合 $A, B\in\mathcal{F}$について、$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

である。ベイズの定理は $P(A\cap B)$ あるいは $P(B)$ が分からない（測定できない）場合に、分かっている確率を用いて条件率確率 $P(A|B)$ を求める公式である。ベイズの定理を説明するためには、次の集合族の完全形の定義が必要である。

2.2 定義［完全集合系］

$\{A_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 完全形をなすとは、次の条件 (1)、(2) を満たすことである。

(1) $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$

(2) $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$

2.3［ベイズの定理 (一般形)］

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ おいて完全形をなす事象の族$\{A_i\}_{i=1}^{k}$と事象 $B \in \mathcal{F}$ に対し、条件付き確率 $P(A_i|B)$ は次の公式で表される。

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k)}$$

なお、統計学では $P(A_i)$ を事前確率、$P(A_i|B)$ を事後確率という。

ここで $B_1 = B, B_2 = \Omega \setminus B$ とする。このとき $\{B_1, B_2\}$ はもう 1 つの完全形をなす事象の族である。ベイズの定理を理解するために、各種の $2 \times k$ 分割表（クロス表）が有益である。その中で最も重要な分割表は下記のクロス確率表である。

(2.3-1) 2 × k クロス確率表

	A_1	$\cdots$	A_k	計
B_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$\cdots$	$P(A_k \cap B_1)$	$P(B_1)$
B_2	$P(A_1 \cap B_1)$	$\cdots$	$P(A_k \cap B_2)$	$P(B_2)$
計	$P(A_1)$	$\cdots$	$P(A_k)$	1

ここで記述を簡単にするために $k = 2$ の場合についてクロス確率表（= 4 分表）を考えてみよう。2 つの完全系をなす族を改めて $\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}$ とする。クロス確率表における中心の 4 つの確率を

$$\alpha = P(A_1 \cap B_1), \beta = P(A_2 \cap B_1)\ \ \gamma = P(A_1 \cap B_2), \delta = P(A_2 \cap B_2)$$

と記すと

$$P(A_1) = \alpha + \gamma, P(A_2) = \beta + \delta, P(B_1) = \alpha + \beta, P(B_2) = \gamma + \delta$$

である。このとき次の 2 × 2 クロス確率表が議論を進めていく上で中心的役割を果たす。

(2.3-2) 2 × 2 クロス確率表

	A_1	A_2	計
B_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(B_1)$
B_2	$P(A_1 \cap B_2)$	$P(A_2 \cap B_2)$	$P(B_2)$
計	$P(A_1)$	$P(A_2)$	1

=

(2.3-2) 2 × 2 クロス確率表（数値）

	A_1	A_2	計
B_1	α	β	$\alpha + \beta$
B_2	γ	δ	$\gamma + \delta$
計	$\alpha + \gamma$	$\beta + \delta$	1

上記クロス確率表（数値）を用いるとベイズの定理に簡単な証明を与えることができる。

2.4［ベイズの定理 (k = 2) の場合］

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2)}$$

［証明］条件付き確率の定義とそれぞれの確率の数値を確認するのみである。すなわち

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$P(A_1)P(B_1|A_1) = P(A_1)\frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = P(A_1 \cap B_1) = \alpha$$

$$P(A_2)P(B_1|A_2) = P(A_2)\frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)} = P(A_2 \cap B_1) = \beta$$

したがって　$$P(A_1|B_1) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2)}$$

［注］一般の k の場合も　$k = 2$ の場合と同じような計算で容易に証明されることがわかる。

上記の計算からわかるようにベイズの定理は数学として定義された 1 つの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の中での命題である。この事を明確にしないとベイズの定理が正しく適用されたか否かを判定することはできない。一般の統計学の教科書ではベイズの定理は「事前確率 $P(A_1)$ から事後確率 $P(A_1 \mid B_1)$ を求める公式」であるとされている。統計学では n 個の標本に対して、以下の 2 × 2 クロス数値表（あるいはクロス集計表、クロス度数表）が議論の出発点となる。

(2.4-1) 2 × 2 クロス集計

	A_1	A_2	計
B_1	$\#(A_1 \cap B_1)$	$\#(A_2 \cap B_1)$	$\#(B_1)$
B_2	$\#(A_1 \cap B_2)$	$\#(A_2 \cap B_2)$	$\#(B_2)$
計	$\#(A_1)$	$\#(A_2)$	$\#(\Omega)$

=

	A_1	A_2	計
B_1	a	b	$a + b$
B_2	c	d	$c + d$
計	$a + c$	$b + d$	n

確率空間が等確率空間であるときはクロス集計表は確率換算は以下のようになる。

(2.4-2) 2 × 2 クロス確率表

［2 × 2 クロス集計表］⇒

	A_1	A_2	計
B_1	a/n	b/n	$(a + b)/n$
B_2	c/n	d/n	$(c + d)/n$
計	$(a + c)/n$	$(b + d)/n$	1

このとき、A_i に対する B_j の条件付き確率は次のようになる。

$$P(A_1|B_1) = \frac{a}{a+b} \qquad P(A_1|B_2) = \frac{c}{c+d} \qquad P(A_2|B_1) = \frac{b}{a+b} \qquad P(A_2|B_2) = \frac{d}{c+d}$$

3. 予測［ベイズの定理を用いて］

初めに、社会生活において経験したり話題になったりするくじ引き等について、当たる確率をベイズの定理を用いて求めてみよう。

3.1［宝くじ (1)：10 枚の札を 10 人の人が 1 枚ずつ順番に引く］

［問題］10 枚の札があり、1 から 10 まで数字が書かれている。当たり札は 1 と 2 である。10 人が順に 1 枚ずつ札を引いていく。このとき、次の確率を求めてみよう。

(1) 1 番目が当たりのとき 2 番目が当たる確率

(2) 1 番目が外れのとき 2 番目が当たる確率

［解］高校生ならば即座に以下のように答えるだろう。

(1) 1 番目が当たりのとき、2 番目に引くくじは 9 枚中 1 枚が当たりだから求める確率は$\frac{1}{9}$。

(2) 1 番目が外れのとき、2 番目に引くくじは 9 枚中 2 枚が当たりだから求める確率は$\frac{2}{9}$。

ここでは、モデルとなる確率空間を示し、根元事象とその確率を考えながら解を得ることにする。そのようにすることにより、この確率空間の中の様々な事象の確率を求めることができる。まず確率空間を示す。10 人全員が引き得る番号の列は 10! 通りあり、1 つ 1 つの列が標本であり事象である。これらを順番をつけて次のように記す。$i = 1, 2, \cdots 10!$ に対し、

$$\omega_i = n(i,1)n(i,2)n(i,3)n(i,4)n(i,5)n(i,6)n(i,7)n(\mathrm{i},8)n(i,9)n(i,10)$$

とする。ここで $n(i, k)$ は i 番目の標本において 10 人のうち k 番目の人が引く札の番号を示し、$k \neq \ell$ ならば $n(i,k) \neq n(i,\ell)$ である。確率空間を考えると $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_{10!}\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ であり、事象 $\{\omega_i\}$ が起こる確率 $P(\{\omega_i\})$ は全て等しく$\frac{1}{10!}$でなるので確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は等確率空間である。ここで

$$A_1 = \{\omega_i \in \Omega | n(i,2) = 1 \text{ または } 2\} \; A_2 = \Omega \setminus A_1$$

$$B_1 = \{\omega_i \in \Omega | n(i,1) = 1 \text{ または } 2\} \; B_2 = \Omega \setminus B_1$$

とすると、場合の個数を表すクロス度数表は次のようになる。

(3.1-1) 2 × 2 クロス度数表

	A_1	A_2	計
B_1	$\#(A_1 \cap B_1)$	$\#(A_2 \cap B_1)$	$\#(B_1)$
B_2	$\#(A_1 \cap B_2)$	$\#(A_2 \cap B_2)$	$\#(B_2)$
計	$\#(A_1)$	$\#(A_2)$	$\#(\Omega)$

=

		2 番目		計
		当たり	外れ	
1 番目	当たり	$2 \times 1 \times 8!$	$2 \times 8 \times 8!$	$2 \times 9!$
	外れ	$2 \times 8 \times 8!$	$2 \times 7 \times 8!$	$8 \times 9!$
計		$2 \times 9!$	$8 \times 9!$	$10!$

したがって (1) (2) の解は次のようになる。

(1) 事前確率 $P(A_1) = \frac{2\times 9!}{10!} = \frac{1}{5}$、事後確率 $P(A_1|B_1) = \frac{2\times 8!}{2\times 9!} = \frac{1}{9}$

(2) 事前確率 $P(A_1) = \frac{1}{5}$、事後確率 $P(A_1|B_2) = \frac{8\times 2\times 8!}{8\times 9!} = \frac{2}{9}$

ちなみに、クロス確率は以下のようになっている。

(3.1-2) 2 × 2 クロス確率表

	$A1$	$A2$	計
$B1$	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(B_1)$
$B2$	$P(A_1 \cap B_2)$	$P(A_2 \cap B_2)$	$P(B_2)$
計	$P(A_1)$	$P(A_2)$	1

=

	A_1	A_2	計
B_1	1/45	8/45	1/5
B_2	8/45	28/45	4/5
計	1/5	4/5	1

［注 1］上記と同様の議論より、この問題において「2 番目に引く人の当たる確率」の代わりに「k $(3 \leqq k \leqq 10)$ 番目に引く人の当たる確率」としても確率の値は同じであることがわかる。また、$P(A_1)$ は常に一定であることは、くじを引いた人が当たりか外れかの結果を直後に明らかにしようが、最後に全員で明らかにしようが確率は同じであることを意味する。しかし、人間の心理は感情が優先するので、プロ野球のドラフト会議のように普通は全員がくじを引き終えた後、一斉に結果を明らかにする。また、くじを引く順番をくじで決めたりする場合もある。

［注 2］この確率空間において , どのような事象 $A \subset \Omega$ に対しても $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\#(A)}{10!}$ であり、根元事象の確率 $P(\omega_i) = \frac{1}{10!}$ は殆ど 0 であるが 0 とすることはできない。

鈴木 [S] は数学カリキュラムにおける確率教育について現状分析と有益な提言を行っている。次の例は論説 [S: pp.325-327] において紹介された山本・熊倉 [Y-K] による興味深い例を考察する。

3.2［宝くじ (2)： 2 つの袋に入ったくじから当たりくじを引く］

［問題］10 個のくじがあり、そのうち 3 本が当たりくじである。10 本のくじを 2 個の袋 G, H に分けて入れる。G の袋には 1 つの当たりくじを、H の袋には残りの 9 本を入れる。初めに G, H の袋のどちらかを選び、次に選んだ袋から 1 本のくじを引く。このとき、次の確率を求めてみよう。

(1) くじが当たる確率

(1-1) G の袋を選んだとき、くじが当たる確率

(1-2) H の袋を選んだとき、くじが当たる確率

(2) 選んだ袋を当てる確率

(2-1) 当たりくじを選んだとき、G の袋を選んだ確率

(2-2) 当たりくじを選んだとき、H の袋を選んだ確率

［解］ベイズの定理を適用するために、10 本のくじを 1 から 10 までの番号をつける。1, 2, 3 番のくじが当たりくじであるとする。このとき、

$$\omega_i = [\text{番号 i のくじ}]\ (i = 1, 2, \cdots, 10)、\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_{10}\}$$

とする。Ω の各要素に対応する根元事象 $\{\omega_i\}$ は「番号 i のくじを引く」こととなり、$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ である。根元事象の確率 $P(\{\omega_i\})$ は次のようになる。

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2},\quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}\ (i = 2, 3, \cdots, 10)$$

ゆえに、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は非等確率空間である。ここでベイズの定理を適用するために

A_1 =［当たりくじの集合］$=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

A_2 =［外れくじの集合］$=\{\omega_4, \omega_5, \cdots, \omega_{10}\}$

B_1 =［G の袋に入っているくじの集合］$=\{\omega_1\}$

B_2 =［H の袋に入っているくじの集合］$=\{\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{10}\}$

とする。このとき、クロス集合表およびクロス確率表は次のようになる。

(3.2-1) 2 × 2 クロス集合表

	A_1	A_2	和
B_1	$\{\omega_1\}$	$\emptyset$	$\{\omega_1\}$
B_2	$\{\omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_4, \omega_5, \cdots, \omega_{10}\}$	$\{\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{10}\}$
和	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_4, \omega_5, \cdots, \omega_{10}\}$	Ω

⇒

(3.2-2) 2 × 2 クロス確率表

	A_1	A_2	計
B_1	1/2	0	1/2
B_2	1/9	7/18	1/2
計	11/18	7/18	1

したがって (1) (2) の解を次のように得る。

(1-1) 事前確率 $P(A_1) = \frac{11}{18}$、事後確率 $P(A_1|B_1) = \frac{1/2}{1/2} = 1$

(1-2) 事前確率 $P(A_1) = \frac{11}{18}$、事後確率 $P(A_1|B_2) = \frac{1/9}{1/2} = \frac{2}{9}$

(2-1) 事前確率 $P(B_1) = \frac{1}{2}$、事後確率 $P(B_1|A_1) = \frac{1/2}{11/18} = \frac{9}{11}$

(2-2) 事前確率 $P(B_2) = \frac{1}{2}$、事後確率 $P(B_2|A_1) = \frac{1/9}{11/18} = \frac{2}{11}$

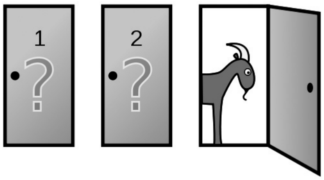
［注 1］「G の袋か H の袋を選択する確率はそれぞれ 50%」である事と「一本のくじを引く確率はそれぞれの袋において同じ」である事は保障されているとする。

［注 2］ベイズの定理の特徴は (2) のように、結果（くじの当たり外れ）から原因（袋の選択）の確率を求めることもできることである。数学の定理自体に時間の概念は存在しないが、現実の現象に適用する場合、時間の前後関係についても解析している例である ([N2: pp.68-69])。

3.3［モンティ・ホール問題］

ベイズの定理を用いて議論された世界的に有名な「モンティ・ホール問題」を確率空間を用いて解説する。これはアメリカのテレビショウ番組の中で行われたゲームに関する論争で司会者の名前に由来する ([W2], [N2: pp.22-25])。日本では「３囚人問題」として知られている (［N2: pp.70-93])。

［問題］3 つの大きな箱があり、その中の 1 つに新車が、残りの 2 つには羊が入っている。プレーヤーが 1 つの箱を選択しドアを閉めたままにしておく。選択しなかった 2 つの箱の少なくともどちらかには羊が入っている。司会者は羊が入った箱のドアを 1 つ開ける。その後、プレーヤーは自分が最初に選択した箱かドアが閉まっている別の箱を選択し、ドアを開き中に入っている賞品を獲得できる。プレーヤーはどちらの箱を選択した方が新車を獲得する確率が大きいか。



［解］モデル確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を次のように定める。3 個の大きな箱のうち , プレーヤーが選択した箱を H_1 とし、その他の箱を H_2、H_3 とする。したがって司会者がドアを開く箱は H_2 か H_3 のどちらかである。残りの 1 個の箱は閉じたままで、プレーヤーが 2 回目にドアを開ける選択肢は最初にプレーヤーが選択した H_1 と司会者がドアを閉じたままにした箱の 2 つである。右上図は [W2] 掲載図で司会者が H_3 の箱を開けた状態を表しているが、司会者そしてプレーヤーのとり得る行為は 4 通りであり、標本空間 Ω は、次の 4 個の要素として記述される。

$\omega_1 (H_1 H_2 \to H_1)$　=［司会者は H_2 の箱のドアを閉じたままにし、プレーヤーは最初の選択を替えないで H_1 を選ぶ］

$\omega_2 (H_1 H_2 \to H_2)$　=［司会者は H_2 の箱のドアを閉じたままにし、プレーヤーは最初の選択を替えて H_2 を選ぶ］

$\omega_3 (H_1 H_3 \to H_1)$　=［司会者は H_3 の箱のドアを閉じたままにし、プレーヤーは最初の選択を替えないで H_1 を選ぶ］

$\omega_4 (H_1 H_3 \to H_3)$　=［司会者は H_3 の箱のドアを閉じたままにし、プレーヤーは最初の選択を替えて H_3 を選ぶ］

右上図では、この後、プレーヤーが最終的に 1 のドアを開ければ根元事象 ω_1、2 のドアを開

ければ 根元事象 ω_2 となる。標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ に対し、$\mathcal{F} = P(\Omega)$、確率 P を事象 $A \subset \Omega$ に対し、

$$P(A) = [\text{事象 A が起こったとき、新車を獲得する確率}]$$

とする。このとき、根元事象 $\{\omega_i\}$ の確率は即座には分からない。ここで Ω の部分集合 A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 を以下のように定める。これらの部分集合の確率を求めることにより、根元事象の確率 $P(\{\omega_i\})$ を求める。

A_i ＝［プレーヤーが最終的に箱 H_i を選択した事象］$(i = 1, 2, 3)$

B_j ＝［司会者が箱 H_j のドアを閉じたままにした事象］＝［司会者が箱 H_j 以外のドアを開けた事象］

＝［H_i と H_j のどちらかに新車が入っている事象］$(j = 2, 3)$

このとき A_i, B_j はつぎのようになる。

$$(*)\ A_1 = \{\omega_1, \omega_3\}、A_2 = \{\omega_2\}、A_3 = \{\omega_4\}、B_2 = \{\omega_1, \omega_2\}、B_3 = \{\omega_3, \omega_4\}$$

まず、新車が3つの箱のどの箱に入っているかという確率は同じであると仮定してよいから $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$、である。ここで

$$P(B_j) = [B_j \text{ の事象が起こる確率}]$$

であることを確認し、$P(B_2) = P(B_3)$ であることを次のように場合分けをすることによって示す。

（場合1）［新車が H_1 の箱に入っていたとき］

司会者が H_2 か H_3 のどちらかを閉じたままにする確率はで同じで1である（と仮定してよい）。

（場合2）［新車が H_2 の箱に入っていたとき］

司会者が H_2 を閉じたままにする確率は0、H_3 を閉じたままにする確率は1。

（場合3）［新車が H_3 の箱に入っていたとき］

司会者が H_2 を閉じたままにする確率は1、H_3 を閉じたままにする確率は0。

したがって

$P(B_2)$ ＝［司会者が H_2 のドアを閉じたままにする確率］$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{2}$

$P(B_3)$ ＝［司会者が H_3 のドアを閉じたままにする確率］$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{2}$

である。 ゆえに (*) より

$$P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_3\})=\frac{1}{3},\quad P(\{\omega_2\})=\frac{1}{3},\quad P(\{\omega_4\})=\frac{1}{3}$$
$$P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})=\frac{1}{2},\quad P(\{\omega_3\})+P(\{\omega_4\})=\frac{1}{2}$$

上記連立方程式を解くと $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_3\})=\frac{1}{6}$, $P(\{\omega_2\})=P(\{\omega_4\})=\frac{1}{3}$ となる。根元事象の確率を整理すると

$$P(\{\omega_1\})=\frac{1}{6}\quad P(\{\omega_2\})=\frac{1}{3},\quad P(\{\omega_3\})=\frac{1}{6}\quad P(\{\omega_4\})=\frac{1}{3}$$

である。これにより、非等確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が確定し、クロス集合表とクロス確率表は以下のようになる。

(3.3-1) 2 × 3 クロス集合表

	A_1	A_2	A_3	和
B_2	ω_1	ω_2	$\emptyset$	$\{\omega_1, \omega_2\}$
B_3	ω_3	$\emptyset$	ω_4	$\{\omega_3, \omega_4\}$
和	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_4\}$	Ω

$\Rightarrow$

(3.3-2) 2 × 3 クロス確率表

	A_1	A_2	A_3	計
B_2	1/6	1/3	0	1/2
B_3	1/6	0	1/3	1/2
計	1/3	1/3	1/3	1

事前確率と事後確率は次のようになる。

事前確率　$P(A_1)=\frac{1}{3}, P(A_2)=\frac{1}{3}, P(A_3)=\frac{1}{3}$

事後確率 (1) 司会者が H_2 のドアを閉じたままにした (H_3 を開けた) 場合

$$P(A_1|B_2)=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}\quad P(A_2|B_2)=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$

(2) 司会者が H_3 のドアを閉じたままにした場合

$$P(A_1|B_3)=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}\quad P(A_3|B_3)=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$

したがって新車を獲得する事後確率は司会者がどちらの箱を残した場合でも

$$\begin{cases}\text{選択を変更しなかった場合が}\frac{1}{3}\\ \text{選択を変更した場合が}\frac{2}{3}\end{cases}$$

となり、結論として、プレーヤーは最初に自分自身が選択した箱より、司会者がドアを閉じたままに残した箱に選択変更した方が新車を獲得する確率が大きいということがわかる。

この問題を次のように一般化して考えてみよう。

[一般化されたモンティ・ホール問題]

k 個の大きな箱があり、その中の 1 つに新車が、残り $k-1$ 個には羊が入っている。プレーヤーが 1 つの箱を選択し、ドアを閉めたままにしておく。選択しなかった $k-1$ 個のうち、全

部あるいは $k-2$ 個の箱に羊が入っている。司会者は羊が入った箱のドアを $k-2$ 個開ける。残りの 1 個には新車か羊が入っている。その後、プレーヤーは自分が最初に選択した箱かドアが閉まっている別の箱を選択し、ドアを開き中に入っている賞品を獲得できる。プレーヤーはどちらの箱を選択した方が新車を獲得する 確率が大きいか。

この問題は k 個の箱を $H_1, H_2, \cdots, H_k$、プレーヤーが選択した箱を H_1 とすると , 司会者がドアを閉じたままにした箱は $\{H_j\}_{j=2}^{k}$ のうちいずれか 1 個の箱となり。プレーヤーはドアが閉られたままになっている 2 個の箱から 1 個を選択する。$2\times k$ クロス確率表によるベイズの定理を用いて、上記（$k=3$ の場合）と同じ考え方で解を求めることができ、新車を獲得する確率は

$$\begin{cases} \text{選択を変更しなかった場合が } \frac{1}{k} \\ \text{選択を変更した場合が } \frac{k-1}{k} \end{cases}$$

であることがわかる、$k=3$ の場合がオリジナルのモンティ・ホール問題であり、k を大きくすると、プレーヤーは司会者が選択しなかった箱に変更した方が新車を獲得する確率は限りなく 1 に近づくことがわかる。

［注 1］上記ゲームショウがアメリカのテレビ番組で放映されて当時、自動車を獲得するためにはどのような選択をしたら良いのか、数学者達が感情的になって喧々諤々の議論をしたそうである [W2]。通常、数学者達は解は「正しい」「間違い」「未解決」のいずれかであることが分かっており、定理などの価値について論争が起こっても解の正否について論争が起こることはない。この論争の原因は確率の議論を確率空間を正確に設定しないことに起因すると思われる。

［注 2］雑誌 Newton では「モンティ・ホール問題」（[N1: pp22-25]）として「ベイズの定理」を用いないで、そして「3 囚人問題」（[N2: pp.70-93]）としてベイズの定理を用いて解説されている。これら解説記事と本論説にはそれぞれ解法へのアプローチの違いがあることを記しておく。

3.4［新型コロナ PCR 検査］

2020 年より 2022 年現在まで世界は新型コロナ感染のパンデミックに襲われている。日本では PCR 検査の陽性者数が例外なく毎日テレビニュースで報道され、我々の生活に大きな影響を与えてきた。PCR 検査の結果は多くの科学者達による解析がなされ、感染拡大防止の中心的役割を担っている ([T-T])。ここでは検査の精度について検討する。少し専門的な解説においては 2 × 2 クロス集計表（医学界では四分表とよんでいる）と「ベーズの定理」が用いられて

いる。ここでは確率空間の議論をするまえに、通常の議論をたどってみよう。まず、PCR 検査のクロス集計表および各分割された集合の全体に占める人数比に対する呼称を確認する。

(3.4-1) 2 × 2 クロス集計表

		感染		計
		あり	なし	
検査	陽性	a（真陽性）	b（偽陽性）	$a+b$
	陰性	c（偽陰性）	d（真陰性）	$c+d$
計		$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

感染事前確率 $=\frac{a+c}{n}$ [＝感染率]、感染事後確率 $=\frac{a}{a+b}$ [＝陽性的中率]、陽性率 $=\frac{a+b}{n}$
感度（感染者に対する陽性者の割合）$=\frac{a}{a+c}$、特異度（非感染者に対する陰性者の割合）$=\frac{d}{b+d}$
偽陽性率（非感染者に対する陽性者の割合）$=\frac{b}{b+d}$
偽陰性率（感染者に対する陰性者の割合）$=\frac{c}{a+c}$

PCR 検査体制が同じでれば検査人数によって感度、特異度は変わらない。したがって偽陰性率、偽陽性率も変わらない。しかし事後確率（陽性的中率）は検査人数によって大きく異なる。事後確率（陽性的中率）が小さいと社会問題が起きる。すなわち、多くの非感染者が陽性と判定されて隔離されてしまうからである。この問題は再検査によって大幅に解消されることを以下に示す。

感度 =70%、特異度 =99% のとき、α= 感染率、β= 陽性率、とすると表 (3.4-1) 以下のクロス確率表に変換される。

(3.4-2) 2 × 2 クロス確率表

		感染		計
		あり	なし	
検査	陽性	0.7α	$0.01(1-\alpha)$	β
	陰性	0.3α	$0.99(1-\alpha)$	$1-\beta$
計		α	$1-\alpha$	1

α と β の関係は $0.7\alpha+0.01(1-\alpha)=\beta$ の等式より $\beta=0.69\alpha+0.01$ ($\Leftrightarrow \alpha=1.45\beta+0.015$) となり互いに独立ではないことがわかる。すなわち、陽性率が分かれば感度（事前確率）は決まる。

［検査 1：2021 年 5 月東京 PCR 検査（東京都新型コロナ対策ウイルス感染症対策サイト）をモデルとして事後確率、偽陰性率、偽陽性率を計算する］

検査人数＝ 8,000 人、感度＝ 70%、得意度＝ 99%、陽性率＝ 5.8%、事前確率（＝感染率 (α)）＝ 7%

(3.4-3) 2 × 2 クロス集計表

		感染		計
		あり	なし	
検査	陽性	392	74	466
	陰性	168	7,366	7,534
計		560	7,440	8,000

事後確率（＝陽性的中率）＝$\frac{392}{466}$＝ 84.1%、偽陰性率＝$\frac{168}{560}$＝ 30%、偽陽性率＝$\frac{74}{7440}$＝ 0.99%

［検査 2：感度と特異度を検査 1 と同じとして検査人数を大幅に増加させた場合のシミュレーション］

検査人数＝ 100,000 人、感度＝ 70%、得意度＝ 99%、事前確率（＝感染率 (α)）＝ 1%

(3.4-4) 2 × 2 クロス集計表

		感染		計
		あり	なし	
検査	陽性	700	990	1,690
	陰性	300	98,010	98,310
計		1,000	99,000	100,000

事後確率（＝陽性的中率）＝$\frac{700}{1,690}$＝ 41.4%、偽陰性率＝$\frac{300}{1,000}$＝30.0%、偽陽性率＝$\frac{990}{99,000}$＝ 1.0%

［注］感度、特異度が同じ場合、検査人数が増えると陽性的中率が低くなることがわかる。

［検査 3：感度と特異度を同じとして、陽性者を再検査した場合のシミュレーション］

検査人数＝ 1,690 人、感度＝ 70%、特異率＝ 99%、事前確率（＝感染率 (α)）＝ 41.4%

(3.4-5)2 × 2 クロス集計表

		感染		計
		あり	なし	
検査	陽性	490	10	500
	陰性	210	980	1,190
計		700	990	1,690

事後確率（＝陽性的中率）＝$\frac{490}{500}$＝ 98.0%、偽陰性率＝$\frac{210}{700}$＝ 30.0%、偽陽性率＝$\frac{10}{990}$＝ 1.0%

［注］陽性者を再検査すると陽性的中率が格段に高くなることがわかる。

［PCR 検査における確率空間］

PCR 検査におけるベイズの定理を用いての陽性率等の議論はどのような確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が前提となっているのかを考えてみよう。まず標本空間 Ω は n 人の検査対象者 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ である。次に Ω の部分集合と集合の個数を次のように記す。

$A_1 = \{\omega_i \mid \omega_i$ は感染者 $\}$、$A_2 = \{\omega_i \mid \omega_i$ は非感染者 $\}$、$B_1 = \{\omega_i \mid \omega_i$ は検査陽性者 $\}$、$B_2 = \{\omega_i \mid \omega_i$ は検査陰性者 $\}$

$$a = \#(A_1 \cap B_1)、b = \#(A_2 \cap B_1)、c = \#(A_2 \cap B_1), 、d = \#(A_2 \cap B_2)$$

事象空間 $\mathcal{F}$ として次の 2 つの場合 (1)、(2) が考えられる。確率はいずれの $\mathcal{F}$ の場合も $P(A) = \frac{\#(A)}{n}$ $(A \in \mathbf{F})$ とする。

(1) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$。

(2) $\mathcal{F}$＝［4 個の集合 $A_1 \cap B_1$、$A_2 \cap B_1$、$A_1 \cap B_2$、$A_2 \cap B_2$ とこれらの和集合および空集合からなる加法集合体］

(1)、(2) の場合ともクロス集計表およびクロス確率表は (3.4-1) (3.4-2) となり。これに基づいて陽性率等の各比率が計算されている。ここで根元事象について考えてみよう。(1) の場合は確率空間は等確率空間であり、各 $\{\omega_i\}$ 自身が根元事象となり $P(\{\omega_i\}) = 1/n$ である。このことは何を意味するのだろうか。1.5［サイコロの目］の確率 $P(\{\omega_i\}) = 1/6$、1.7［ルーレットゲーム］の確率 $P(\{\omega_i\}) = 1/37$、3.2［宝くじ (1)］の確率 $P(\{\omega_i\}) = 1/10!$ はそれぞれ誰でも認めることができる「同等に確からしい根元事象の確率」である。PCR 確率空間において定義した根元事象の確率 P ({ ω i } = 1/n の意味は曖昧であり「同等に確からしい」とは言えるだろうか。また、PCR 検査人数が大きければ確率 $P(\{\omega_i\}) = 1/\mathrm{n}$ はゼロに近くなっていく意味は何だろうか。宝くじ (1) の根元事象の確率 $P(\{\omega_i\}) = 1/10!$ は「各個人平等に限りなくゼロに近いがこの確率で

この事象が起こることは科学的事実」であるが、PCR 検査の確率 $P(\{\omega_i\}) = 1/n$ の場合は集団の中の個人の比率という意味しかもたない。個人 ω_i としては集団の PCR 検査による集計表より計算された感染率を、人によって抵抗力は異なることを考慮しつつ、標準的な感染率と捉えるということではないだろうか。感染する確率は個々によって異なっており 3 つの例 3.1、3.2、3.3 における「当たる確率」が厳密であることに比べ「感染確率」は曖昧さを伴っている。この意味において事象空間 $\mathcal{F}$ として場合 (2) を考える方が適切であると考えられる。この場合、多人数の PCR 検査においては 1 個の標本 ωi からなる集合 $\{\omega_i\}$ は $\mathcal{F}$ に属さない ($\{\omega_i\}$ は事象ではないので根元事象とはならない。根元事象とは事象空間の中で分割できない極小の集合と考えれば (2) の 4 個の集合が根元事象となる。PCR 検査における確率論の議論としては自然な感覚ではないだろうか。また、この PCR 検査の議論で、確率という言葉を用いたが、PCR 検査は先に 3 つの例 3.1、3.2、3.3 で見てきたような繰り返される現象ではなく、各種の確率は場所、時期によって大きく異なる統計結果が出ることになるので、本来の確率の概念とは異なると考えた方が良い。

4. 弘前大学教授夫人殺害事件

最初に事件と裁判について概要を述べる。1949 年（昭和 24 年）8 月 6 日青森県弘前市で弘前大学医学部教授夫人松永すず子さん（以下、S さん記す）が刺殺された。2 週間ほど後、弘前市警は近隣住民の無職の男性、那須隆さん（以下、N さんと記す）を逮捕した。N さんは無実を主張したが検察は「N さんの衣服に被害者の血液の付着」を物的証拠として、那須さんを青森地裁弘前支部へ起訴した。検察側は血液学の権威である東京大学医学部法医学教室教授古畑種基氏による「数学を援用しての那須の衣服の鑑定」の支援を得た。一審判決では那須さんは殺人罪について無罪とされたが、仙台高裁において 1952 年（昭和 27 年）の控訴審判決は古畑の鑑定を始めとしてほぼ全面的に検察側の主張を容れ、N さんは懲役 15 年の有罪判決を受けた。N さんの弁護人は即座に最高裁へ上告したが棄却され、N さんの刑は確定し 10 年間服役することになった。そして、この事件は法医学の力が有罪判決に寄与したモデルケースとして知られるようになった。しかし､事件から 20 年以上が経過した 1971 年（昭和 46 年）になって､事件当時は弘前在住で N さんの知人であった男が､自らが事件の真犯人であると名乗り出､1976 年（昭和 51 年）再審の開始が決定された。そして事件から 28 年が経過した 1977 年（昭和 52 年）、仙台高裁は物証の捏造を強く示唆して N さんに対する殺人の罪を撤回し、事件は冤罪と認められた。だが、その後の国家賠償請求訴訟では国側の過失責任は否定され、N さんの全面敗訴となった ([Ka] [Ki])。

裁判を通しての最大の論点は次の 2 つであった。

(I) N さんが着ていたシャツに付着した血痕が被害者 S さんのものであると認定するか否か。

(II) 捜査が妥当であったか否か。

再審判決は無罪となったが、その理由は (II) ついて「捜査は妥当ではない」ということであり、(I) については何も言及されなかった。ゆえに (I) の問題について法的、数学的判断が残された状態となり、「はじめに」で述べたように現在に至るまで決着がついたとは言えない状況である。ここでは高裁判決で証拠として認められた古畑血液判定について数学者の見解 ([O] [Han]) および筆者の意見を述べる。

4.1［古畑鑑定］

裁判を通じて (I) についての数学を用いた古畑鑑定の内容は以下 (1) ～ (4) である ([Ta] [F:VI の 6])。

(1) 被害者 S さんの血液型は ABO 方式で A 型、Q 式で Q 型、E 式で E 型である。（総称して BMQE 型とよぶ）

(2) N さんが着ていたシャツに付着した血痕の血液型は BMQE 型である。

(3) BMQE 型の出現する頻度はわが国では 1.5% である。

(4) X を「N さんのシャツに付着した血液が S さんのものと一致する率」、Y を「一般人の間に BMQE 型が出現する頻度」。W_1 を「同一人であったときの一致率」、W_2 を「異なる人間の血液である頻度」とするとき、数学者小松勇作氏の教示によりベイズの原因の確率を計算すると

$$W_1 = \frac{X}{X+Y} = \frac{1}{1+\frac{Y}{X}} \cdots \text{(4-1)} \qquad W_2 = \frac{Y}{X+Y} = \frac{1}{1+\frac{X}{Y}} \cdots \text{(4-2)}$$

である。

(5) 上記 (4-1)、(4-2) を解くと、$W_1 = 0.985$、$W_2 = 0.015$ である。

裁判記録から

W_1 =［N さんのシャツに付着した血痕は S さんの血液である確率］

であり、この確率は［N さんが真犯人である確率］と等しいという前提の下、裁判の審理は進められていった。筆者は W_1、W_2 の求め方について疑問を呈し、確率の理論を現実の社会現象へ適用する場合の問題点を検証していく。

4.2［古畑鑑定の検証］

［検証 1］裁判記録 において（古畑の著書 [F] においても）、(4) の方程式に代入したと思われる X の値は明示されていない。しかし (2)、(3) で言及していることから、$Y = 0.015$ であることがわかる。$W_1 = 0.985$、$W_2 = 0.015$ を (4) の式に正確に代入すると次のようになる。

$$0.985 = \frac{X}{X + 0.015} \cdots (4\text{-}1) \qquad 0.0115 = \frac{0.015}{X + 0.015} \cdots (4\text{-}2)$$

となる。この2つの方程式の解はいずれも $X = 0.985$ となり $X = W_1$ である。数学として誤差なしで方程式を解くとこうなるが、果たして X の値は何だったのか疑問が残る。

検証1は数学としては整合性があるが公式の意味がわからない。岡安 [O] は古畑氏がベイズの定理に言及していることより、数学的にも公式にも意味があると思われる次の推論をしている（[Han] [H-K] もこの推論に原則従っている）。

［検証2］ベーズの定理をより正確に議論するためのモデルとしての確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を定義する。Ω をNさんのシャツに血痕を残した可能性がある人全員とし、人数は n 人とする。すなわち

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

である。事件の性質からSさんとNさんは Ω に属し、ω_1 をSさん、ω_2 をNさんとする。Ω の部分集合は全て事象、すなわち $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ とする。Ω の部分集合（ある集団）A に対して

$P(A)$ = ［集団 A の誰かの血液がNさんのシャツに付着したものである確率］

とすることが妥当である。ここで

$$A_1 = \{\omega_1\}, A_2 = \Omega \setminus A_1, \quad B_1 = \{\omega_i \in \Omega : \omega_i \text{ の血液型が BMQE 型である }\}, B_2 = \Omega \setminus B_1$$

とする。このとき、$\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$ は共に完全集合系である。Sさんの血液型はBMQE型であるので $\omega_1 \in B_1$ である。Nさんの血液型はBMQE型ではないので $\omega_2 \notin B_1$ である。さらに $A_1 \cap B_1 = \{\omega_1\} = A_1$、$A_1 \cap B_2 = \emptyset$ より $P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)$ であり $P(A_1 \cap B_2) = 0$ である。また、$P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_2) = P(B_2)$ より $P(A_2 \cap B_2) = P(B_2)$。さらに $P(B_1) = 0.015$、$P(B_2) = 0.985$ であるからクロス確率表は以下のようになる。

(4.2-1) 2 × 2 クロス確率表 (1)

	A_1	A_2	計
B_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(B_1)$
B_2	$P(A_1 \cap B_2)$	$P(A_2 \cap B_2)$	$P(B_2)$
計	$P(A_1)$	$P(A_2)$	1

=

(4.2-1) 2 × 2 クロス確率表 (2)

	A_1	A_2	計
B_1	$P(A_1)$	$P(A_2 \cap B_1)$	0.015
B_2	0	$P(A_2 \cap B_2)$	0.985
計	$P(A_1)$	$P(A_2)$	1

$W_1 = P(A_1|B_1)$, $W_2 = P(A_2|B_1)$ であるからベイズの定理を用いると

$$W_1 = P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2)} \cdots (*)$$

となる。ここで $X = P(B_1|A_1)$, $Y = P(B_1|A_2)$ とする。さらに「N さんが犯人である可能性」を中立的に考えて、事前確率 $P(A_1)$ は 1/2 とする。したがって $P(A_1) + P(A_2) = 1$ より $P(A_2) = 1/2$ となり

$$(*) = \frac{(1/2)X}{(1/2)X + (1/2)Y} = \frac{X}{X+Y} \cdots (**)$$

である。S さんの血液型は BMQE 型であるから $X = P(B_1 | A_1) = 1$。また、血液型 BMQE の出現する頻度は Ω と $A_2 = \Omega \setminus \{\omega_1\}$ の中では、ほぼ同じであるから $Y = P(B_1|A_2) = P(B_1) = 0.015$ とすると

$$(**) = \frac{1}{1+0.015} = 0.9852216\ (≒ 98.5\%)$$

すなわち、事前確率 $P(A_1) = 0.5\ (=50\%)$ に対して事後確率は $W_1 = P(A_1|B_1) = 0.985(=98.5\%)$ となる。また、W_2 については

$$W_2 = P(A_2|B_1) = \frac{P(A_2)P(B_1|A_2)}{P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2)} = \frac{Y}{X+Y} = \frac{0.015}{1+0.015} = 0.0147783(≒ 1.5\%)$$

上記の議論では事象の族 $\mathcal{F}$ は当初の設定 $\mathcal{F}(\Omega)$ ではなく、4 個の集合 $A_1 \cap B_1 = \{\omega_1\}$、$A_1 \cap B_2 = \emptyset$、$A_2 \cap B_1$、$A_2 \cap B_2$ を含む最小の加法族で充分である。$A \in \mathcal{F}$ に対して $P(A)$ は 2×2 クロス確率表 (1) の確率とコルモゴルフの公理に従って決まる。根元事象は $A_1 \cap B_1 = \{\omega_1\}$、$A_2 \cap B_1$、$A_2 \cap B_2$ の 3 個である。ここで、全体（標本空間）Ω と上記議論で対象とした確率の意味を確認する。Ω ＝［N さんのシャツに血痕を残した人の全体］

$P(A_1)$ =［N さんのシャツに残された血痕が S さんのものである確率］

$P(A_2)$ =［N さんのシャツに残された血痕が S さんのものではない確率］

$P(B_1)$ =［N さんのシャツに残された血痕の血液型が BMQE 型である確率］

$P(B_2)$ =［N さんのシャツに残された血痕の血液型が BMQE 型ではない確率］

$P(A_1|B_1)$ =［血痕の血液型が BMQE 型である人の中でそれが S さんの血痕である確率］

$P(A_2 | B_1)$ ＝［血痕の血液型が BMQE 型である人の中でそれが S さんの血痕でない確率］

$P(B_1 | A_1)$ ＝［S さんの血液型が BMQE 型である確率］

$P(B_1 | A_2)$ ＝［S さんの血液でないとき、その人の血液型が BMQE 型である確率］

これら確率の意味を踏まえて、検証 2 で用いた 3 つの仮定を検証してみよう。

$P(B_1 | A_1) = 1\cdots$［仮定 1］ $P(A_1) = 1/2\cdots$［仮定 2］ $P(B_1 | A_2) = P(B_1) = 0.015\cdots$［仮定 3］

［仮定 1］は当然であるが、［仮定 2］については大きな問題があると [O][Han] で述べている。この論説では、より明確に、この仮定を置くことは不可能であること、そしてベイズの定理を数学的に正確に適用するとどのようになるかを示す。ここで

$$\alpha = P(A_1 \cap B_1), \quad \beta = P(A_2 \cap B_1), \quad \delta = P(A_2 \cap B_2)$$

とすると上記 (4.2-1) クロス確率表 (2) は以下のように表 (3) となる。表 (3) に［仮定 2］$P(A_1) = \frac{1}{2} = 0.5$ を代入すると表 (4) となり、［仮定 3］$P(B_1 | A_2) = P(B_1) = 0.015$ を代入すると表 (5) となる。

(4.2-1）2 × 2 クロス確率表

表 (4)

	A_1	A_2	計
B_1	0.5	β	0.015
B_2	0	δ	0.985
計	0.5	0.5	1

＝

表 (3)

	A_1	A_2	計
B_1	α	β	0.015
B_2	0	δ	0.985
計	α	$1-\alpha$	1

＝

表 (5)

	$A1$	$A2$	計
$B1$	α	$0.015 \times (1-\alpha)$	0.015
$B2$	0	$0.985 \times (1-\alpha)$	0.985
計	α	$1-\alpha$	1

まず、表 (4) B_1 の行から $\beta = 0.015 - 0.5 = -0.485$ という現実の世界ではあり得ない確率が出現する。現実の世界では $\beta > 0$ であるから［仮定 2］は $P(B_1) > 0.5$ の場合にのみ設定できる。また、表 (5) A_1 の列からは $a = 0$ すなわち N さんが犯人である確率は 0 であるという結果となる。いずれの場合においても古畑鑑定の矛盾が明らかになる。ここで、β がを 0.015 に近い値で $\beta - 0.015 > 0$ であれば表 (3) は重要な意味をもつことを以下に示す。

半沢は [Han: p.264] において、次のように述べている。「$P(B_1 | A_2) = 0.015$ は単独では不自然な仮定ではないが、仮定 $P(A_1) = 1/2$ と連立させるとき、非常に奇妙なことにを要請していることになる、というのは BMQE 型の人が全体の 1.5% ということは被害者を含めたことのはずであるのに、ここでは被害者は、1.5% のうちに入らない超別格の存在とされている」。上記の

表 (4) と表 (5) はこのことをクロス確率表で表していることになる。

4.3［ベイズの定理の自然な適用］

ベーズの定理を血痕一致の確率計算へ適用することは荒唐無稽なのだろうか、この論説ではそうではなく適用は可能であることを示そう。まず、標本空間 Ω、事象空間 $\mathcal{F}$ を 4.2［検証 2］で定義した通り

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\},\ \ \mathcal{F} = P(\Omega)$$

とする。また、事象 A についての対応する値 $P(A)$ を

$$P(A) = \frac{\#(A)}{n}$$

とする。このとき $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間となり、クロス数値表およびクロス確率表が次のように得ら れる。

(4.3-1) 2 × 2 クロス数値表

	A_1	A_2	計
B_1	1	$n \times 0.015 - 1$	$n \times 0.015$
B_2	0	$n \times 0.985$	$n \times 0.985$
計	1	$n - 1$	n

⇒

(4.3-2) 2 × 2 クロス確率表

	A_1	A_2	計
B_1	$1/n$	$0.015 - (1/n)$	0.015
B_2	0	0.985	0.985
計	$1/n$	$1 - (1/n)$	1

事前確率 $P(A_1) = \frac{1}{n}$、事後確率 $P(A_1|B_1) = \frac{1}{n \times 0.015}$

上記事後確率 $P(A_1 \mid B_1)$ の計算は [Han : pp.267-268] にも記されている。なお、古畑鑑定における事前確率の仮定 $P(A_1) = 1/2$ を上記クロス確率表に適用すると $n = 2$ でなければならず、このとき $P(A_2 \cap B_1) = 0.015 - 0.5 = -0.485$ となり論理は破綻する。

現実的な問題として Ω はどのような集合（集団）と考えれば良いのだろうか。一審判決における N さんの弁護人は「古畑教授鑑定の結果、98.5% の確率があることをもって実際上は同一人の血痕であると考えらえるが、これを逆にみると、弘前市の人口を 6 万人（事件の起きた 1949 年当時）として市内だけで 900 人の同一型があることとなり、不確率は無視できない ([Ta: p.112])。確率 $P(A_1 \mid B_1) = \frac{1}{900}$ はゼロに近いではないか)」と主張している。この主張を Ω =［弘前市民全員］とすればクロス数値表とクロス確率表は以下のようになる。

$$\Omega = [\text{弘前市民全員}]\ (n = 60,000)$$

(4.3-3) 2 × 2 クロス数値表

	A_1	A_2	計
B_1	1	899	900
B_2	0	59,100	59,100
計	1	59,999	60,000

⇒

(4.3-4) 2 × 2 クロス確率表

	A_1	A_2	計
B_1	0.000017	0.014983	0.015
B_2	0	0.985	0.985
計	0.000017	0.9999983	1

事前確率 $P(A_1)=\frac{1}{60{,}000}=0.000017$、事後確率 $P(A_1|B_1)=\frac{1}{900}=0.001$

弁護団に対する古畑鑑定人の主張「弘前市民全員がNさんのシャツに血痕をつける可能性があるわけではない」([F: p.129]) にも一理あるのでより現実的に確率を計算してみよう。

$\Omega=$［Nさんが事件前一定期間に接触する可能性がある人々］

として、$n=\#(\Omega)=67$ とする（$n=67$ は$P(A_2|B_1)=\frac{n\times0.015\quad1}{n\times0.015}>0$ を満たす最小の値）。このときのクロス数値表およびクロス確率表は以下のようになる。

(4.3-5) 2 × 2 クロス数値表

	A_1	A_2	計
B_1	1	0.005	1.005(= 67 × 0.015)
B_2	0	65.995	65.995(= 67 × 0.985)
計	1	66	67

⇒

(4.3-6) 2 × 2 クロス確率表

	A_1	A_2	計
B_1	0.0149	0.0001	0.015
B_2	0	0.985	0.985
計	0.0149	0.9851	1

事前確率 $P(A_1)=\frac{1}{67}=0.0149$ 、事後確率 $P(A_1|B_1)=\frac{0.0149}{0.015}=0.993$

この事後確率計算は、事前確率を $P(A_1)=1/2=0.5$ とする仮定よりは自然な推理であり「Nさんの服に付着した血液が被害者の血液である確率は99.3%」という主張は数学的には正しい。ただ、標本空間Ωをどのようにして確定するか、を考えるとき数学理論を適用するにはあまりにも曖昧な状況であったといわざるを得ない。

［注］上記確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は3.4［新型コロナPCR検査］における確率空間の考察「(1) の場合」と同様に等確率空間となり、根元事象はそれぞれの個人 $\{\omega_i\}$ であり [Nさんのシャツに残された血痕が ω_i のものである確率] $=\frac{1}{n}$となる。各個人の事象によりこの確率には違いがあることが容易に察しられ同程度確からしいとは考えられない。事象空間 $\mathcal{F}$としてはPCR検査確率空間の考察「(2) の場合」と同様に

$\mathcal{F}=$［4個の集合 $A_1\cap B_1, A_2\cap B_1, A_1\cap B_2, A_2\cap B_2$ を含む最小の加法集合体］

とし、確率 $P(A)$ ($A \in \mathcal{F}$) はそのままとすることが妥当ではないだろうか。この場合、(4.3) で計算したクロス表の値は変わらない。

4.4 血液鑑定と確率論

再審判決は「白シャツが押収された当時 , 血痕はもともと付着していなかったのではないかという推察が可能」という裁定で無罪判決が下された。そして , 当然ではあるが確率計算の前段の「血痕付着」が否定され確率計算の是非については言及がなかった。このことが、古畑鑑定の「確率計算自体は正しかったのではないか」という疑問が残った。これに対して前述の通り [O] [Han] [H-K] 等のベイズ理論による古畑鑑定批判が示された。しかしながら、今もなお「確率理論は正しかった」と主張する人は絶えない [W1]。この論説では数学の定理であるベイズの定理を数学として議論する前提である確率空間の構造を示し「等確率空間と非等確率空間の違い、そして事象の確率の値は現実社会において何を意味するか」を考察し、問題の所在を明確にしようと試みた。裁判における血液鑑定に確率を用いることに関し、筆者の所見を以下に記す。

(a) 容疑者に対し、真犯人である確率を中立的に考え、事前確率 $P(A_1)$ を 1/2（主観確率）とし、それに基づいて事後確率 $P(A_1 \mid B_1)$ を求めるという方法は、少なくともベイズの定理を用いる限りモデルとする確率空間は非等確率空間でなければならず、事後確率を計算するための $P(B_1 \mid A_1)$, $P(B_1 \mid A_2)$ の値に意識的か無意識に恣意的な値を代入する可能性がある。したがって岡安 [O: p.123] 同様、少なくとも裁判の中で「主観確率を持ち込むベイズの定理」を用いることはできないと言わざるを得ない。主観確率についての最近の考察について [Har: 2.6] に述べられている。

(b) ベイズの定理自体は (4.3) で計算したように真犯人を推測する限り、捜査の方向を考える上において一定の効果はあるように思える。とは言え、この計算はベイズの定理を使わずとも普通の犯人捜査で無意識に使われていると思われる。事前確率、事後確率はあくまで捜査の参考であり、裁判の証拠とするにはあまりにも危険性が大きすぎる。

(c) 裁判において証言者が数学の理論、公式を数学者の権威に頼って結果のみを証言することは非常に危険である。このことについては [Ki] において詳しく述べられている。

おわりに

確率論の議論は純粋数学の話題と異なり、上記の例で示したように社会の様々な状況の中で起こる。社会人が確率の議論を行うとき、知識、考え方のバックグランドとなっているのは多くの人の場合、中学校、高等学校における授業内容（教科書内容）であろう。本論の中でも述

べたように現行教育では「同様に確からしい根元事象の確率」が基礎になっている。これらのことについて教育現場からの報告、および考察 [S] [Y-K] [U] [U-I-S] が大変有益であったことをことに記しておく。

参考文献

[F] 古畑種基「法医学の話」岩波新書［323］1958 年 9 月（現在は絶版）。

[Han] 半沢英一「数学と冤罪－弘前事件における確率論誤用の解析」被告最高裁（庭山英雄編）技術と人間、1995 年、pp.252-273、ISBN 978-4764501010。（初出は『技術と人間』第 22 巻第 5 号、pp. 64-73、(NAID 40000631304)。

[Har] 原啓介「確率論の誘惑－世俗からの確率論入門」数学通信（日本数学会）第 26 巻第 2 号、2021 年、pp. 5-25。

[Hat] 服部哲也「理工系の確率・統計入門」（第 4 版）学術図書出版社、2019 年 2 月。

[H-K] 浜上則雄、加賀山茂「法医学者による血液型に基づく証明方法に対する批判と提案（上）」ジュリスト（有斐閣）第 650 号、1977 年 10 月、pp. 95-101、ISSN 04480791、NAID 40001751696。

[I] 井上安正「免罪の軌跡 - 弘前大学教授夫人殺害事件」新潮文庫、2011 年 1 月。

[Ka] 鎌田慧「弘前大学教授夫人殺人事件」講談社文庫、1990 年 1 月。

[Ki] 木下信男「裁判と数学－弘前事件にみる冤罪の軌跡」明治大学教養論集第 240 号、1991 年、自然科学、明治大学教養論。

[M] 村山恵一「20 歳の Wiki に映る『格差』」Deep Insight、日本経済新聞 Opinion 欄、2021 年 5 月 1 日。

[N1] 別冊ニュートン「数学の世界現代編」（データを正しく読み解く「統計学」ベイズ統計学）、ニュートンプレス、2021 年 4 月。

[N2] 別冊ニュートン「ゼロからわかる統計と確率－ベイズ統計編」、ニュートンプレス、2021 年 5 月。

[O] 岡安隆照「弘前事件・古畑鑑定における確率の計算について」東北学院大学論集－法律学 第 16 号、東北学院大学文経法学会、1980 年 3 月、pp.122-131。ISSN 03854094、NAID 40002640862。

[S] 鈴木将史「確率概念の誤認識と数学カリキュラムに関する一考察」教育学論集第 70 号、2018 年 3 月、pp. 323-339。

[Ta] 田中輝和「弘前事件・古畑鑑定における確率の計算をめぐって」東北学院大学論集－法律学第 16 号、東北学院大学文経法学会、1980 年 3 月、pp.95-121。

[Tsu] 坪井俊（ほか 13 名）『数学 A』数研出版、2019 年 1 月発行。

[T-T] 田中真生、辻省次「COVID-19 に対する PCR 検査体制」COVID-19 有識者会議ホームページ、2020 年 (2020-08-07)。

[U] 内田靖「同様に確からしいということ」数研通信（数研出版）81 号、2014 年 12 月特集。

[U-I-S] 上ヶ谷友佑、石橋一昴、迫田彩「学校教育における［根元事象］と［同様に確からしい］の概念規定」、全国数学教育学会第 53 回研究発表会発表資料、2020 年 12 月。

[W1] Wikipedia:「査読依頼 / 弘前大学教授夫人殺人事件」2019 年 4 月 18 日。

[W2] Wikipedia: モンテ・ホール問題。

[Y-K] 山本達也、熊倉啓之「発展的な考え方の育成を重視した確率の教材開発」日本数学教育学会誌第 99 巻第 3 号、2017 年、pp. 4-12。