接続系の自由振動
（主として高橋の方法と固有関数について）

平野芳太郎

工学部機械工学科

1 まえがき

多数の部材を接続してつくられる構造の振動問題は，一つの微分方程式でその全体を支配することができず，各単位系についての運動方程式を接続して解く連成問題となる。各系の微分方程式の一般解に，境界条件および接続点における連続条件を用いて，その任意定数を決定する手続きは，曲げモーメント，せん断力のように二階，三階の微係数をふくみ接続段数の増加につれ加速度的に繁雑化する。またこの方法は個々の場合はともかく一般論の展開には不便である。

高橋はこの繁雑さをできるだけ簡易化する一つの一般的方法を提示し〔第5章参照〕，多くの例解を示している〔第9章参照〕。

一般に接続系では，単一棒のように，規準振動が縦，曲げ，ねじり振動に分離してあらわれず，これらの連成振動となるから，単位系の振動を支配する変位は縦，曲げ，ねじりの各変位を成分とする一般に四次元のベクトルで表わされる。単一棒の規準振動の固有関数は完全直交系をつくるなどの性質をもつが，接続系の規準振動の変位を示す固有関数ベクトルも，系全体を領域として，これらの性質を拡張した形でみたすはずである。

本研究は接続系の振動を変分問題としてあつかい，境界条件および連続条件が変位条件と力学的条件に必然的に分類されることを示し〔第4章〕，高橋の方法の力学的意味〔第5章〕および固有関数ベクトル系の予想される性質〔第6章〕を一般的に明らかにすることを目的としている。

2 記号

添字 n は n 番目の棒をあらわす。

x，y，z：直交座標系（第3章参照）

u，v，w，ϕ：縦，曲げ，ねじり変位（第3章参照）

$U_{\lambda 1}$，$U_{\lambda 2}$，$U_{\lambda 3}$，$\Psi_{\lambda 1}$，$\Psi_{\lambda 2}$，$\Psi_{\lambda 3}$：未定境界値〔(15)式参照〕

ES，EI，EI'，C：縦，曲げ，ねじり剛性

γS：単位長さ当りの重量

I_p：断面二次極モーメント

l　：棒の長さ

σ　：単位長さ当りの質量 $\sigma = \gamma S/g$

κ　：$\kappa^2 = I_p/S$

W/g，J：集中質量，集中質量の慣性モーメント

ω：円振動数

ζ，α，α'，β：無次元振動数〔(5)式参照〕

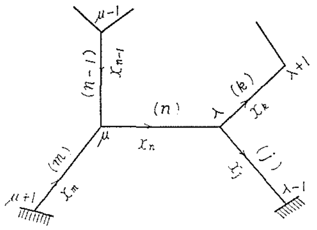
p，q，r，t，p_1，q_1，p'，q'，r'，t'，p_1'，q_1'：(19)式参照

a_1，a_2，b_1，b_2，b_3，b_4，b_1'，b_2'，b_3'，b_4'，c_1，c_2：任意定数〔(4)式参照〕

L'，L，$\overline{L}$，L^*，L_1：ラグランジュアン関数

3　運動方程式

任意個の一様断面棒を接続した系の振動の変位として，伸縮，曲げ，ねじり変形によるものを考える。振動中の変形は微小で，各棒の細長比は十分大きく，初等的な近似理論が成立するものとする。また棒の断面形はせん断中心が断面の中心と一致するものに限ることにする。



第1図

この系の任意の1本の棒をとり，その長さを l_n とし，一端を原点として x_n 軸を棒の中心軸にとり右手系の直交座標系（x_n，y_n，z_n）を定める。ただし，y_n 軸，z_n 軸は断面の中心を通りたがいに直交する二つの断面の主軸にとる。棒の軸変位を x_n 軸にそい u_n'（x_n,t），中心軸上の点の横（曲げ）変位を y_n 軸にそい v_n'（x_n,t），z_n 軸にそい w_n'（x_n,t），x_n 軸まわりのねじり変位を右ねじまわりを正とし $\psi_n'(x_n,t)$ とする。

境界条件はすべて同次で，境界においてエネルギの授受がなければ，この系のラグランジュアン L' は次式で示される。

$$
\begin{aligned}
L' = {} & \sum_n \int_0^{l_n} \left[\frac{\gamma_n S_n}{2g}\left(\frac{\partial u_n'}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_n S_n}{2}\left(\frac{\partial u_n'}{\partial x_n}\right)^2 \right] dx_n \\
& + \sum_n \int_0^{nl} \left[\frac{\gamma_n S_n}{2g}\left(\frac{\partial v_n'}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_n I_n}{2}\left(\frac{\partial^2 v_n'}{\partial x_n^2}\right)^2 \right] dx_n \\
& + \sum_n \int_0^{l_n} \left[\frac{\gamma_n S_n}{2g}\left(\frac{\partial w_n'}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_n I_n'}{2}\left(\frac{\partial^2 w_n'}{\partial x_n^2}\right)^2 \right] dx_n \\
& + \sum_n \int_0^{l_n} \left[\frac{\gamma_n I_{pn}}{2g}\left(\frac{\partial \psi_n'}{\partial t}\right)^2 - \frac{C_n}{2}\left(\frac{\partial \psi_n'}{\partial x_n}\right)^2 \right] dx_n \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここに $\sum_n$ は系のすべての棒についての総和を示す。ハミルトンの原理

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L'\, dt = 0$$

から次の変分式が求まる。

$$-\sum_n \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l_n} \left(\frac{\gamma_n S_n}{g} \frac{\partial^2 u_n'}{\partial t^2} - E_n S_n \frac{\partial^2 u_n'}{\partial x_n^2} \right) \delta u_n'\, dx_n$$

$$- \sum_n \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l_n} \left(\frac{\gamma_n S_n}{g} \frac{\partial^2 v_n'}{\partial t^2} + E_n I_n \frac{\partial^4 v_n'}{\partial x_n^4} \right) \delta v_n' \, dx_n$$

$$- \sum_n \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l_n} \left(\frac{\gamma_n S_n}{g} \frac{\partial^2 w_n'}{\partial t^2} + E_n I_n' \frac{\partial^4 w_n'}{\partial x_n^4} \right) \delta w_n' \, dx_n$$

$$- \sum_n \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l_n} \left(\frac{\gamma_n I_{pn}}{g} \frac{\partial^2 \psi_n'}{\partial t^2} - C_n \frac{\partial^2 \psi_n'}{\partial x_n^2} \right) \delta \psi_n' \, dx_n$$

$$+ \sum_n \int_0^{l_n} \left[\frac{\gamma_n S_n}{g} \left(\frac{\partial u_n'}{\partial t} \delta u_n' + \frac{\partial v_n'}{\partial t} \delta v_n' + \frac{\partial w_n'}{\partial t} \delta w_n' \right) + \frac{\gamma_n I_{pn}}{g} \frac{\partial \psi_n'}{\partial t} \delta \psi_n' \right] \Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} dx_n$$

$$- \sum_n \int_{t_0}^{t_1} \left(E_n S_n \frac{\partial u_n'}{\partial x_n} \delta u_n' - E_n I_n \frac{\partial^3 v_n'}{\partial x_n^3} \delta v_n' - E_n I_n' \frac{\partial^3 w_n'}{\partial x_n^3} \delta w_n' \right) \Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n} dt$$

$$- \sum_n \int_{t_0}^{t_1} \left[C_n \frac{\partial \psi_n'}{\partial x_n} \delta \psi_n' + E_n I_n \frac{\partial^2 v_n'}{\partial x_n^2} \delta \left(\frac{\partial v_n'}{\partial x_n} \right) \right.$$

$$\left. + E_n I_n' \frac{\partial^2 w_n'}{\partial x_n^2} \delta \left(\frac{\partial w_n'}{\partial x_n} \right) \right] \Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n} dt = 0$$

上式のはじめの4項からこの変分問題のオイラー方程式として 次の周知の運動方程式が求まる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\gamma_n S_n}{g} \frac{\partial^2 u_n'}{\partial t^2} - E_n S_n \frac{\partial^2 u_n'}{\partial x_n^2} = 0, \quad \frac{\gamma_n S_n}{g} \frac{\partial^2 v_n'}{\partial t^2} + E_n I_n \frac{\partial^4 v_n'}{\partial x_n^4} = 0 \\ &\frac{\gamma_n S_n}{g} \frac{\partial^2 w_n'}{\partial t^2} + E_n I_n' \frac{\partial^4 w_n'}{\partial x_n^4} = 0, \quad \frac{\gamma_n I_{pn}}{g} \frac{\partial^2 \varphi_n'}{\partial t^2} - C_n \frac{\partial^2 \psi_n'}{\partial x_n^2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$t = t_0$, t_1 における変分 $\delta u_n'$, $\delta v_n'$, $\delta w_n'$, $\delta \psi_n'$ は零であるから第五項は消失する。第六，第七項は境界端の条件および接続点における連続条件を示す境界項である。

この系の規準振動を求めるため

$$u_n'(x_n, t) = u_n(x_n) \cos(\omega t + \varepsilon), \quad v_n'(x_n, t) = v_n(x_n) \cos(\omega t + \varepsilon),$$

$$w_n'(x_n, t) = w_n(x_n) \cos(\omega t + \varepsilon), \quad \psi_n'(x_n, t) = \psi_n(x_n) \cos(\omega t + \varepsilon)$$

とおき，方程式 (2) に代入すると，$u_n(x_n)$, $v_n(x_n)$, $w_n(x_n)$, $\psi_n(x_n)$ に関する方程式

$$\left.\begin{aligned} &E_n S_n \frac{d^2 u_n}{d x_n^2} + \frac{\gamma_n S_n}{g} \omega^2 u_n = 0, \quad E_n I_n \frac{d^4 v_n}{d x_n^4} - \frac{\gamma_n S_n}{g} \omega^2 v_n = 0, \\ &E_n I_n' \frac{d^4 w_n}{d x_n^4} - \frac{\gamma_n S_n}{g} \omega^2 w_n = 0, \quad C_n \frac{d^2 \psi_n}{d x_n^2} + \frac{\gamma_n I_{pn}}{g} \omega^2 \psi_n = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

が求まり，これらの解は次式で示される。

$$\left.\begin{aligned}
u_n &= a_{n1}\sin\frac{\zeta_n}{l_n}x_n + a_{n2}\cos\frac{\zeta_n}{l_n}x_n,\\
v_n &= b_{n1}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l_n}x_n+\sinh\frac{\alpha_n}{l_n}x_n\right)+b_{n2}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l_n}x_n-\sinh\frac{\alpha_n}{l_n}x_n\right)\\
&\quad + b_{n3}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l_n}x_n+\cosh\frac{\alpha_n}{l_n}x_n\right)+b_{n4}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l_n}x_n-\cosh\frac{\alpha_n}{l_n}x_n\right),\\
w_n &= b_{n1}'\left(\sin\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n+\sinh\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n\right)+b_{n2}'\left(\sin\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n-\sinh\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n\right)\\
&\quad + b_{n3}'\left(\cos\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n+\cosh\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n\right)+b_{n4}'\left(\cos\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n-\cosh\frac{\alpha_n'}{l_n}x_n\right)\\
\phi_n &= c_{n1}\sin\frac{\beta_n}{l_n}x_n + c_{n2}\cos\frac{\beta_n}{l_n}x_n
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

ζ_n, α_n, α_n', β_n は無次元振動数で次式による。

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_n^2 &= \frac{\gamma_n S_n l_n^2}{g S_n E_n}\omega^2, & \alpha_n^4 &= \frac{\gamma_n S_n l_n^4}{g E_n I_n}\omega^2,\\
\alpha_n'^4 &= \frac{\gamma_n S_n l_n^4}{g E_n I_n'}\omega^2, & \beta_n^2 &= \frac{\gamma_n I_{pn} l_n^2}{g C_n}\omega^2
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

また，a_{n1}，a_{n2}，b_{n1}，……，$b_n'^4$，c_{n1}，c_{n2} は任意定数で，境界条件および接続点における連続条件から一般に1個の任意定数比を除いて定まる。

4　境界条件と連続条件

方程式（3）の解（4）の任意定数を決定するため，境界条件および接続点における連続条件を調べてみる。このため，ふたたび変分問題にもどし，次の汎関数

$$\begin{aligned}
L &= \sum_n\int_0^{l_n}\left[\frac{\gamma_n S_n'}{2g}\omega^2u_n^2-\frac{E_nS_n}{2}\left(\frac{du_n}{dx_n}\right)^2\right]dx_n\\
&\qquad+\sum_n\int_0^{l_n}\left[\frac{\gamma_n S_n'}{2g}\omega^2v_n^2-\frac{E_nI_n}{2}\left(\frac{d^2v_n}{dx_n^2}\right)^2\right]dx_n\\
&\quad+\sum_n\int_0^{l_n}\left[\frac{\gamma_n S_n}{2g}\omega^2w_n^2-\frac{E_nI_n'}{2}\left(\frac{d^2w_n}{dx_n^2}\right)^2\right]dx_n\\
&\qquad+\sum_n\int_0^{l_n}\left[\frac{\gamma_n I_{pn}}{2g}\omega^2\phi_n^2-\frac{C_n}{2}\left(\frac{d\phi_n}{dx_n}\right)^2\right]dx_n\\
&=\sum_n\frac{E_nS_n}{2}\int_0^{l_n}\left[\left(\frac{\zeta_n}{l_n}\right)^2u_n^2-\left(\frac{du_n}{dx_n}\right)^2\right]dx_n\\
&\qquad+\sum_n\frac{E_nI_n}{2}\int_0^{l_n}\left[\left(\frac{\alpha_n}{l_n}\right)^4v_n^2-\left(\frac{d^2v_n}{dx_n^2}\right)^2\right]dx_n
\end{aligned}$$

$$+\sum_n \frac{E_nI_n'}{2}\int_0^{l_n}\left[\left(\frac{\alpha_n'}{l_n}\right)^4 w_n{}^2-\left(\frac{d^2w_n}{dx_n{}^2}\right)^2\right]dx_n$$

$$+\sum_n \frac{C_n}{2}\int_0^{l_n}\left[\left(\frac{\beta_n}{l_n}\right)^2\phi_n{}^2-\left(\frac{d\phi_n}{dx_n}\right)^2\right]dx_n \tag{6}$$

を停留にする問題を考察する。この関数 L もラグランジュアン（関数）と言うことにする。さて，必要条件 $\delta L = 0$ は次式となる。

$$\sum_n E_nS_n\int_0^{l_n}\left[\frac{d^2u_n}{dx_n{}^2}+\left(\frac{\zeta_n}{l_n}\right)^2u_n\right]\delta u_n\,dx_n$$

$$-\sum_n E_n\,I_n\int_0^{l_n}\left[\frac{d^4v_n}{dx_n{}^4}-\left(\frac{\alpha_n}{l_n}\right)^4v_n\right]\delta v_n\,dx_n$$

$$-\sum_n E_nI_n'\int_0^{l_n}\left[\left(\frac{d^4w_n}{dx_n{}^4}\right)-\left(\frac{\alpha_n'}{l_n}\right)^4w_n\right]\delta w_n\,dx_n$$

$$+\sum_n C_n\int_0^{l_n}\left[\frac{d^2\phi_n}{dx_n{}^2}+\left(\frac{\beta_n}{l_n}\right)^2\phi_n\right]\delta\phi_n\,dx_n$$

$$-\sum_n\left(E_nS_n\frac{du_n}{dx_n}\delta u_n-E_nI_n\frac{d^3v_n}{dx_n{}^3}\delta v_n-E_nI_n'\frac{d^3w_n}{dx_n{}^3}\delta w_n\right)\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}$$

$$-\sum_n\left[C_n\frac{d\phi_n}{dx_n}\delta\phi_n+E_nI_n\frac{d^2v_n}{dx_n{}^2}\delta\left(\frac{dv_n}{dx_n}\right)+E_nI_n'\frac{d^2w_n}{dx_n{}^2}\delta\left(\frac{dw_n}{dx_n}\right)\right]\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}=0 \tag{7}$$

このはじめの4項から方程式（3）あるいは次の方程式が求まる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u_n}{dx_n{}^2}+\left(\frac{\zeta_n}{l_n}\right)^2u_n=0, &&\frac{d^4v_n}{dx_n{}^4}-\left(\frac{\alpha_n}{l_n}\right)^4u_n=0\\ &&&\qquad\qquad\qquad ,\\ &\frac{d^4w_n}{dx_n{}^4}-\left(\frac{\alpha_n'}{l_n}\right)^4w_n=0, &&\frac{d^2\phi_n}{dx_n{}^2}+\left(\frac{\beta_n}{l_n}\right)^2\phi_n=0\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

また，おわりの2項は境界項であるが，棒の両端 $x_n = 0$，$x_n = l_n$ の条件に応じて必要な検討を加えてみる。

4·1 <u>$x_n = 0$ あるいは $x_n = l_n$ が境界端である場合</u>　境界端の変位が拘束されるならば，その変分もこの拘束条件をみたすべきである。いまこの境界端を $x_n = l_n$ として，固定支持ならば

$$u_n(l_n) = 0,\quad v_n(l_n) = 0,\quad w_n(l_n) = 0 \tag{8}$$

$$\phi_n(l_n) = 0,\quad dv_n(l_n)/dx_n = 0,\ dw_n(l_n)/dx_n = 0 \tag{9}$$

であるから，これらの変分

$$\delta u_n(l_n),\ \delta v_n(l_n),\ \delta w_n(l_n),\ \delta\phi_n(l_n),\ \delta(dv_n(l_n)/dx_n),\ \delta(dw_n(l_n)/dx_n) \tag{10}$$

も零であるべきで，境界項のうちこれに対応する部分は消失する。

自由端ならば，変位はすべて自由であるから，(10) 式の変分もすべて任意となり，(7) 式の境界項においてこれらの変分の係数が零でなければならない。すなわち次の条件が求まる。

$$E_n S_n \frac{du_n(l_n)}{dx_n} = 0, \quad E_n I_n \frac{d^3 v_n(l_n)}{dx_n{}^3} = 0, \quad E_n I_n' \frac{d^3 w_n(l_n)}{dx_n{}^3} = 0, \tag{11}$$

$$C_n \frac{d\psi_n(l_n)}{dx_n} = 0, \quad E_n I_n \frac{d^2 v_n(l_n)}{dx_n{}^2} = 0, \quad E_n I_n' \frac{d^2 w_n(l_n)}{dx_n{}^2} = 0, \tag{12}$$

単純支持ならば，変位の拘束条件として (8) 式があり，変分 $\delta u_n\ (l_n)$，$\delta v_n\ (l_n)$，$\delta w_n\ (l_n)$ は零となるから，対応する項は消失する。変位 $\psi_n\ (l_n)$，$dv_n\ (l_n)/dx_n$，$dw_n\ (l_n)/dx_n$ がともに自由とすれば，こちらからは自由端のときと同様にして必要な条件 (12) 式が求まる。

同次な境界条件の代表的なものにふれたが，(8) および (9) 式のように，変位を拘束する拘束条件に対し，変位が自由な場合，オイラーの方程式同様変分問題の自然条件としてえられる (11)，(12) 式を自然境界条件とよんで拘束条件と区別する。また，この種の問題では，(11)式は軸力，せん断力が零となる条件を，(12)式はねじりモーメント，曲げモーメントが零となる条件を示すから力学的条件とも言われる。これに対し拘束条件は変位に対する条件であるから変位条件とよばれる。

4·2　<u>$x_n = 0$ あるいは $x_n = l_n$ が他の棒との接続点である場合</u>　このときには，いくらかこみいった考察が必要である。

ここでは接続点は剛接されており，振動中の微小な変形に対し，この点の微小な近傍は幾何学的な形状を保存すると仮定する。

いま棒 (n) の一端 $x_n = l_n$ と棒 (k) の一端 $x_k = 0$ が接続している場合，棒 (n) の座標系 $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ に対する棒 (k) の座標軸 x_k，y_k，z_k の方向余弦を m_{1j}，m_{2j}，m_{3j} $(j = 1,\ 2,\ 3)$ とすると，変位はすべて微小として，次の関係式が成立する

$$\left.\begin{aligned} u_k(0) &= m_{11}\, u_n(l_n) + m_{12}\, v_n(l_n) + m_{13}\, w_n(l_n), \\ v_k(0) &= m_{21}\, u_n(l_n) + m_{22}\, v_n(l_n) + m_{23}\, w_n(l_n), \\ w_k(0) &= m_{31}\, u_n(l_n) + m_{32}\, v_n(l_n) + m_{33}\, w_n(l_n), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_k(0) &= m_{11}\psi_n(l_n) + m_{12}(-dw_n(l_n)/dx_n) + m_{13}du_n(l_n)/dx_n, \\ -dw_k(0)/dx_k &= m_{21}\psi_n(l_n) + m_{22}(-dw_n(l_n)/dx_n) + m_{23}dv_n(l_n)/dx_n, \\ dv_k(0)/dx_k &= m_{31}\psi_n(l_n) + m_{32}(-dw_n(l_n)/dx_n) + m_{33}dv_n(l_n)/dx_n \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

これらは接続点における変位条件を示す。棒の両端の変位をすべて境界値と呼ぶことにし，(13) および (14) 式を接続点における境界値の連続条件と言うことにする。

この接続点において，(7) 式の境界項にふくまれる境界値の変分は上の境界値の連続条件をみたすべきであるから (13)，(14) 式の境界値をその変分でおきかたものが，この変分の連続条件となる。この接続点で，棒 (k) 以外に棒 (n) に連結するものがなければ，

(7) 式の境界項の中から，この接続点に対応する項のみを集め，連続条件を用いて棒 (n) の境界値の変分について整理するとそれぞれ次式となる。

$$\left[-E_nS_n\frac{du_n(l_n)}{dx_n}+m_{11}E_kS_k\frac{du_k(0)}{dx_k}-m_{21}E_kI_k\frac{d^3u_k(0)}{dx_k^3}\right.$$
$$\left.-m_{31}E_kI_k'\frac{d^3w_k(0)}{dx_k^3}\right]\delta u_n(l_n),$$

$$\left[E_nI_n\frac{d^3v_n(l_n)}{dx_n^3}+m_{12}E_kS_k\frac{du_k(0)}{dx_a}-m_{22}E_kI_k\frac{d^3v_k(0)}{dx_k^3}\right.$$
$$\left.-m_{32}E_kI_k'\frac{d^3w_k(0)}{dx_k^3}\right]\delta v_n(l_n),$$

$$\left[E_nI_n'\frac{d^3w_n(l_n)}{dx_n^3}+m_{13}E_kS_k\frac{du_k(0)}{dx_k}-m_{23}E_kI_k\frac{d^3v_k(0)}{dx_k^3}\right.$$
$$\left.-m_{33}E_kI_k'\frac{d^3w_k(0)}{dx_k^3}\right]\delta w_n(l_n),$$

$$\left[-C_n\frac{d\psi_n(l_n)}{dx_n}+m_{11}C_k\frac{d\psi_n(0)}{dx_k}-m_{21}E_kI_k'\frac{d^2w_k(0)}{dx_k^2}\right.$$
$$\left.+m_{31}E_kI_k\frac{d^2v_k(0)}{dx_k^2}\right]\delta\psi(l_n),$$

$$\left[E_nI_n'\frac{d^2w_n(l_n)}{dx_n^2}+m_{12}C_k\frac{d\psi_k(0)}{dx_k}-m_{22}E_kI_k'\frac{d^2w_k(0)}{dx_k^2}\right.$$
$$\left.+m_{32}E_kI_k\frac{d^2v_k(0)}{dx_k^2}\right]\delta\left(-\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}\right),$$

$$\left[-E_nI_n\frac{d^2v_n(l_n)}{dx_n^2}+m_{13}C_k\frac{d\psi_k(0)}{dx_k}-m_{23}E_kI_k'\frac{d^2w_k(0)}{dx_k^2}\right.$$
$$\left.+m_{33}E_kI_k\frac{d^2v_k(0)}{dx_k^2}\right]\delta\left(\frac{dv_n(l_n)}{dx_n}\right)$$

このようにして求めた上式の境界値の変分は，もはや任意であるから，それぞれの係数を零とおいたものが，必要な自然条件となる。はじめの３式は力（せん断力と軸力）の連続を，あとの３式はモーメント（ねじりと曲げモーメント）の連続を示すもので，力学的連続条件と呼ぶことにする。

さらに，この接続点に他の任意個の棒が連結する場合も，それらのこの点の境界値は (13)，(14) 式と同種の連続条件により，棒 (n) の６個の境界値で表わすことができる。他の接続点においても，同様にして，連結している棒のうちから１本をえらび，その境界値を用いて，他の棒の境界値を表わすことができる。このようにして，各接続点に一組６個の代表境界値を定めることができる。この各接続点における代表境界値と境界端における自由な境界値とをふくめ，この系の未定境界値と呼ぶことにし，境界端および接続点にあらたに番号付 (λ) を行い，未定境界値を記号

$$U_{\lambda1},\ U_{\lambda2},\ U_{\lambda3},\ \Psi_{\lambda1},\ \Psi_{\lambda2},\ \Psi_{\lambda3} \tag{15}$$

で示すことにする。ただし，接続点 (λ) は $x_n=l_n$ に対応するものとすれば，(15) 式の記号は境界値

$$u_n(l_n),\ v_n(l_n),\ w_n(l_n),\ \psi_n(l_n),\ -dw_n(l_n)/dx_n,\ dv_n(l_n)/dx_n$$

の順に対応するよう定める。また境界端においては，変位条件により消失するものがあるから，そのときはその境界値を除く。

境界条件がすべて同次であるから，境界値の変分に対しても，境界値に対する上述のことはすべて成立すべきである。ゆえに，(7) 式の境界項は未定境界値の変分について整理され，次式のようにまとめることができる。

$$\sum(F_{\lambda 1}\delta U_{\lambda 1}+F_{\lambda 2}\delta U_{\lambda 2}+F_{\lambda 3}\delta U_{\lambda 3}+G_{\lambda 1}\delta\Psi_{\lambda 1}+G_{\lambda 2}\delta\Psi_{\lambda 2}+G_{\lambda 3}\delta\Psi_{\lambda 3}) \tag{16}$$

未定境界値の変分は任意であるから，自然条件

$$\left.\begin{aligned} &F_{\lambda 1}=0,\quad F_{\lambda 2}=0,\quad F_{\lambda 3}=0,\\ &G_{\lambda 1}=0,\quad G_{\lambda 2}=0,\quad G_{\lambda 3}=0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

が求まり，これらは境界端における力学的条件，接続点における力学的連続条件を表わす。

5　未定境界値の決定と振動数方程式

変位条件（境界端の拘束条件と接続点の境界値の連続条件）および (17) 式で示される力学的条件（境界端の力学的条件と接続点の力学的連続条件）に方程式 (3) の一般解 (4) を直接代入すると，任意定数 a_{n1}，a_{n2}，b_{n1}，……，C_{n1}，C_{n2} に関する連立一次方程式が求まる。境界条件がすべて同次であれば，この連立方程式も同次となるから，任意定数は一つの定数比を除いて一般に定まる。しかし系が複雑になると，多数の連続条件式をあらかじめ求め，これに (4) 式を代入して処理するのは手数がかかり困難となる。

高橋はこれらの定数を簡単な手続きで求める一般的な方法を公表している[(1),(2)]。その力学的な意味をあきらかにするため，はじめにその方法の要約を述べる。

一般に棒 (n) がその両端の境界値がすべて零となる両端固定支持の単一棒あるいはこれと同一の振動数方程式をもつ両端自由の単一棒でなければ，(4) 式の任意定数はその両端の境界値により次のように表わすことができる〔文献(1)参照〕。

$$\left.\begin{aligned} a_{n1}&=\frac{u_n(l_n)-u_n(0)\cos\zeta_n}{\sin\zeta_n},\qquad a_{n2}=u_n(0),\\ b_{n1}&=\frac{l_n}{2\alpha_n}\frac{dv_n(0)}{dx_n},\qquad b_{n3}=\frac{1}{2}v_n(0),\\ b_{n2}&=-\frac{1}{2}p_nv_n(0)-\frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n}r_n\frac{dv_n(0)}{dx_n}-\frac{1}{2}p_{1n}v_n(l_n)\\ &\qquad+\frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n}q_{1n}\frac{dv_n(l_n)}{dx_n},\\ b_{n4}&=\frac{1}{2}r_nv_n(0)+\frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n}q_n\frac{dv_n(0)}{dx_n}+\frac{1}{2}t_nv_n(l_n)\\ &\qquad+\frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n}q_{1n}\frac{dv_n(l_n)}{dx_n}, \end{aligned}\right| \tag{18}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& b_{n\,1}' = \frac{l_n}{2\alpha_n'}\frac{dw_n(0)}{dx_n}, \qquad b_{n\,3}' = \frac{1}{2}w_n(0), \\
& b_{n\,2}' = -\frac{1}{2}p_n'w_n(0) - \frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n'}r_n'\frac{dw_n(0)}{dx_n} - \frac{1}{2}p_1{}'_n w_n(l_n) \\
& \qquad\qquad + \frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n'}t_n'\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}, \\
& b'_{n4} = \frac{1}{2}r_n'w_n(0) - \frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n'}q_n'\frac{dw_n(0)}{dx_n} + \frac{1}{2}t_n'w_n(l_n) \\
& \qquad\qquad + \frac{1}{2}\frac{l_n}{\alpha_n'}q'_{1n}\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}, \\
& c_{n1} = \frac{\psi_n(l_n) - \psi_n(0)\cos\beta_n}{\cos\beta_n}, \qquad c_{n2} = \psi_n(0)
\end{aligned}
\right\}
$$

ただし

$$
\left.
\begin{aligned}
& p_n = \frac{\sin\alpha_n\cosh\alpha_n + \cos\alpha_n\sinh\alpha_n}{1-\cos\alpha_n\alpha_n\cosh\alpha_n}, \quad q_n = \frac{\sin\alpha_n\cosh\alpha_n - \cos\alpha_n\sinh\alpha_n}{1-\cos\alpha_n\cosh\alpha_n} \\
& r_n = \frac{\sin\alpha_n\ \sinh\alpha_n}{1-\cos\alpha_n\cosh\alpha_n}, \qquad t_n = \frac{\cos\alpha_n - \cosh\alpha_n}{1-\cos\alpha_n\cosh\alpha_n} \\
& p_{1n} = \frac{-(\sin\alpha_n + \sinh\alpha_n)}{1-\cos\alpha_n\cosh\alpha_n}, \quad q_{1n} = \frac{-(\sin\alpha_n - \sinh\alpha_n)}{1-\cos\alpha_n\cosh\alpha_n} \\
& p_n',\ q_n',\ r_n',\ t_n',\ p'_{1n},\ q'_{1n}\text{は}p_n,\ q_n,\ r_n,\ t_n,\ p_{1n},\ q_{1n}\text{において} \\
& \alpha_n\text{を}\alpha_n'\text{におきかえる}
\end{aligned}
\right\} \quad (19)
$$

このようにして棒 (n) に関係した12個の任意定数を両端の12個の境界値で表わすことができるから，系全体の任意定数が対応する境界値により表わすことができる。したがって任意定数のかわりに，これらの境界値を決定すればよい。

さて，(4) 式を (6) 式のラグランジュアン L に代入し，直接積分を行い，(18) 式により任意定数を境界値におきかえると次式となる。

$$
\begin{aligned}
\bar{L} = & -\sum_n \frac{1}{2}E_nS_n\frac{\zeta_n}{l_n\sin\zeta_n}\Big[\{u_n(0)^2+u_n(l_n)^2\}\cos\zeta_n - 2u_n(0)u_n(l_n)\Big] \\
& - \sum_n \frac{1}{2}C_n\frac{\beta_n}{l_n\sin\beta_n}\Big[\{\psi_n(0)^2+\psi_n(l_n)^2\}\cos\beta_n - 2\psi_n(0)\psi_n(l_n)\Big] \\
& - \sum_n \frac{1}{2}E_nI_n\left(\frac{\alpha_n}{l_n}\right)^3\Big[\{v_n(0)^2+v_n(l_n)^2\}p_n + \left(\frac{l_n}{\alpha_n}\right)^2\left\{\left(\frac{dv_n(0)}{dx_n}\right)^2+\left(\frac{dv_n(l_n)}{dx_n}\right)^2\right\}q_n \\
& + 2\frac{l_n}{\alpha_n}\left\{v_n(0)\frac{dv_n(0)}{dx_n} - v_n(l_n)\frac{dv_n(l_n)}{dx_n}\right\}r_n \\
& \qquad + 2\frac{l_n}{\alpha_n}\left\{v_n(l_n)\frac{dv_n(0)}{dx_n} - v_n(0)\frac{dv_n(l_n)}{dx_n}\right\}t_n
\end{aligned}
$$

$$+\ 2v_n(0)v_n(l_n)p_{1n}+2\left(\frac{l_n}{\alpha_n}\right)^2\frac{dv_n(0)}{dx_n}\frac{dv_n(l_n)}{dx_n}\ q_{1n}\ \Bigg]$$

$$-\sum_n\frac{1}{2}E_nI_n'\left(\frac{\alpha_n'}{l_n}\right)^3\Bigg[\{w_n(0)^2+w_n(l_n)^2\}p_n'$$

$$+\left(\frac{l_n}{\alpha_n'}\right)^2\left\{\left(\frac{dw_n(0)}{dx_n}\right)^2+\left(\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}\right)^2\right\}q_n'$$

$$+2\frac{l_n}{\alpha_n'}\left\{w_n(0)\frac{dw_n(0)}{dx_n}-w_n(l_n)\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}\right\}r_n'$$

$$+2\ \frac{l_n}{\alpha_n'}\left\{w_n(l_n)\frac{dw_n(0)}{dx_n}-w_n(0)\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}\right\}t_n'$$

$$+2w_n(0)w_n(l_n)p_{1n}'+2\left(\frac{l_n}{\alpha_n'}\right)^2\frac{dw_n(0)}{dx_n}\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}q_{1n}'\Bigg] \tag{20}$$

方程式（3′）の解（4）を代入して求めたこの L を区別し $\overline{L}$ で示した。

前章でのべたように，境界値は，境界端および接続点における変位条件から，未定境界値のみで表わすことができる。したがって，境界値のかわりに未定境界値を決定すればよい。(20) 式の境界値を未定境界値のみで表わしたものを L^* とし

$$L^* = L^*(U_{\lambda1},\ U_{\lambda2},\ U_{\lambda3},\ \Psi_{\lambda1},\ \Psi_{\lambda2},\ \Psi_{\lambda3}) \tag{21}$$

で示す。この L^* を停留にする条件

$$\delta L^* = \sum_\lambda\left(\frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda1}}\delta U_{\lambda1}+\frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda2}}\delta U_{\lambda2}+\frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda3}}\delta U_{\lambda3}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda1}}\delta\Psi_{\lambda1}+\frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda2}}\delta\Psi_{\lambda2}+\frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda3}}\delta\Psi_{\lambda3}\right) = 0 \tag{22}$$

から，未定境界値を決定する方程式を次のように求める。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda1}}=0,\quad \frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda2}}=0,\quad \frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda3}}=0,\\&\frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda1}}=0,\quad \frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda2}}=0,\quad \frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda3}}=0\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

以上が高橋の示した方法の要約であるが，この方法の，特に方程式（23）の力学的意味をあきらかにするため，$\delta L = 0$ を示す（7）式にたちかえって考察する。

方程式（3′）の解（4）を（7）式に直接代入すると，はじめの4項は消失し，境界項のみがのこる。このさい，(4) 式の任意定数を（18）式により境界値で表わしておけば，この境界項は（20）式 の $\overline{L}$ の境界値を変関数とする変分に一致すると考えてよい。したがってこれを $\delta\overline{L}$ で示すと (7)式は次式となる。

$$\delta\overline{L}=\sum_n\left[E_nS_n\frac{du_n(0)}{dx_n}\delta u_n(0)-E_nI_n\frac{d^3v_n(0)}{dx_n{}^3}\delta v_n(0)-E_nI_n{}'\frac{d^3w_n(0)}{dx_n{}^3}\delta w_n(0)\right]$$

$$+\sum_n\left[C_n\frac{d\psi_n(0)}{dx_n}\delta\psi_n(0)+E_nI_n\frac{d^2v_n(0)}{dx_n{}^2}\delta\left(\frac{dv_n(0)}{dx_n}\right)\right.$$

$$\left.+E_nI_n{}'\frac{d^2w_n(0)}{dx_n{}^2}\delta\left(\frac{dw_n(0)}{dx_n}\right)\right]$$

$$-\sum_n\left[E_nS_n\frac{du_n(l_n)}{dx_n}\delta u_n(l_n)-E_nI_n\frac{d^3v_n(l_n)}{dx_n{}^3}\delta v_n(l_n)-E_nI_n{}'\frac{d^3w_n(l_n)}{dx_n{}^3}\delta w_n(l_n)\right]$$

$$-\sum_n\left[C_n\frac{d\psi_n(l_n)}{dx_n}\delta\psi_n(l_n)+E_nI_n\frac{d^2v_n(l_n)}{dx_n{}^2}\delta\left(\frac{dv_n(l_n)}{dx_n}\right)\right.$$

$$\left.+E_nI_n{}'\frac{d^2w_n(l_n)}{dx_n{}^2}\delta\left(\frac{dw_n(l_n)}{dx_n}\right)\right]=0 \qquad (24)$$

(20) 式の $\overline{L}$ は $\delta L=0$ の領域内の必要条件式 (3′) をみたす関数 (4) を代入して求めた L であるから，上式の $\delta\overline{L}=0$ はそれらの関数のうちから，境界端および接続点における条件をみたす停留関数を定める変分式とみなしてよい。

ここで，境界値に対する変位条件により，境界値の変分を未定境界値の変分のみで表わし，(24) 式を前章の (16) 式の形にまとめることができる。すなわち

$$\delta L^*=\sum_\lambda(F_{\lambda 1}{}^*\,\delta U_{\lambda 1}+F_{\lambda 2}{}^*\,\delta U_{\lambda 2}+F_{\lambda 3}{}^*\,\delta U_{\lambda 3}$$
$$+G_{\lambda 1}{}^*\,\delta\Psi_{\lambda 1}+G_{\lambda 2}{}^*\,\delta\Psi_{\lambda 2}+G_{\lambda 3}{}^*\,\delta U_{\lambda 3})=0 \qquad (25)$$

ここに，$F_{\lambda 1}{}^*$, …, $G_{\lambda 3}{}^*$ のように記し (16) 式の記号と区別したのは，(16) 式 の $F_{\lambda 1}$, …, $G_{\lambda 3}$ に (4) 式を代入し，(18) 式と変位条件とから未定境界値のみで表わしたものを示す意味からである。また (25) 式は $\delta\overline{L}=0$ の (24) 式から上述のようにして求めたものであるから，(21) 式の変分式 (22) 式と一致するので δL^* と記した。(25) 式は未定境界値がみたすべき条件式

$$\left.\begin{array}{lll} F_{\lambda 1}{}^*=0, & F_{\lambda 2}{}^*=0, & F_{\lambda 3}{}^*=0, \\ G_{\lambda 1}{}^*=0, & G_{\lambda 2}{}^*=0, & G_{\lambda 3}{}^*=0 \end{array}\right\} \qquad (26)$$

を示し，また (22) 式との比較から

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda 1}}=F_{\lambda 1}{}^*, & \dfrac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda 2}}=F_{\lambda 2}{}^*, & \dfrac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda 3}}=F_{\lambda 3}{}^*, \\ \dfrac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda 1}}=G_{\lambda 1}{}^*, & \dfrac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda 2}}=G_{\lambda 2}{}^*, & \dfrac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda 3}}=G_{\lambda 3}{}^* \end{array}\right\} \qquad (27)$$

となり，(23) 式と (26) 式は一致する。

前章でのべたことから。(26) 式は未定境界値が力学的条件をみたすべきことを示すもので，これから未定境界値を定めれば，(4) 式の任意定数を変位条件と力学的条件により決定したことになる。高橋の方法は，この(26) 式を (21) 式の L^* の停留条件から直接 (23) 式としてみちびくことを示す。これは，(22) 式の $\delta L^*=0$ が前章でのべた $\delta L=0$ に対するオイラー方程式 (3′) と変位条件をみたす関数のうちから必要なのこり

の条件すなわち力学的条件をみたす停留関数を定める変分式とみなされるから，ほとんど自明の結論であらう。

あきらかに（23）式は未定境界値について連立一次同次方程式となるから，一般に一個の任意常比を除いて定まる。

またこれらの未定境界値が同時に零とならない条件から振動数 $\omega/2\pi$ を決定する方程式が求まる。この振動数方程式は一般に超越方程式となり可付番無限個の根をもつ。これらの根を ω_1，ω_2，……とすると，振動数 $\omega_k/2\pi$ の規準振動は次式で示される。

$$\left.\begin{aligned} u'_{nk} &= D_k u_{nk} \cos(\omega_k t+\varepsilon) = u_{nk}(A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t), \\ v'_{nk} &= D_k v_{nk} \cos(\omega_k t+\varepsilon) = v_{nk}(A_k \cos\omega^k t + B_k \sin\omega_k t), \\ w'_{nk} &= D_k w_{nk} \cos(\omega_k t+\varepsilon) = w_{nk}(A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t), \\ \psi'_{nk} &= D_k \psi_{nk} \cos(\omega_y t+\varepsilon) = \psi_{nk}(A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

D_k，A_k，B_k は任意定数で，u_{nk}，v_{nk}，w_{nk}，ψ_{nk} は固有関数あるいは正規関数と呼ばれる。

6　固有関数の直交性とそれによる展開

この系の振動の一般解は

$$\left.\begin{aligned} &u_n'(x_n,t) = \sum_k u_{nk}(x_n)\phi_k(t),\quad v_n'(x_n,t) = \sum_k v_{nk}(x_n)\phi_k(t), \\ &w_n'(x_n,t) = \sum_k w_{nk}(x_n)\phi_k(t),\quad \psi_n'(x_n,t) = \sum_k \psi_{nk}(x_n)\phi_k(t), \\ &\qquad \phi_k(t) = A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

の形におくことができる。和は有限項でも無限項でもよい。ただし無限項の場合，級数が一様収束することと，さらに二つの変数 x_n，t のどちらについても項別に必要回数の微分，積分が可能であると仮定する。

$$\frac{\gamma_n S_n}{g} = \sigma_n\ ,\qquad \sqrt{\frac{I_{pn}}{S_n}} = \kappa_n \tag{30}$$

とおき，4次元の関数ベクトル $\Phi_{nk}(x_n)$ 、$\Phi'_{nk}(x_n,t)$ を次に示すようなおもりつきの固有関数あるいは関数を成分として定める。

$$\Phi_{nk}\ \left(\sqrt{\sigma_n}\,u_{nk},\ \sqrt{\sigma_n}\,v_{nk},\ \sqrt{\sigma_n}\,w_{nk},\ \sqrt{\sigma_n}\,\kappa_n\psi_{nk}\right)$$

$$\Phi'_{nk}\ \left(\sqrt{\sigma_n}\,u'_{nk},\ \sqrt{\sigma_n}\,v'_{nk},\ \sqrt{\sigma_n}\,w'_{nk},\ \sqrt{\sigma_n}\,\kappa_n\psi'_{nk}\right)$$

また一般解を示す同様なベクトルを $\Phi'_n(x_n,t)$ とし，これらを用いて，(28)，(29) 式を一括し

$$\Phi'_{nk} = \Phi_{nk}\phi_k(t) = \Phi_{nk}(A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t) \tag{28'}$$

$$\Phi'_n = \sum_k \Phi'_{nk} = \sum_k \Phi_{nk}\phi_k(t) \tag{29'}$$

で表わすことができる。内積 $\Phi_{nk}\,\Phi_{ni}$ を次式

$$\Phi_{nk}\,\Phi_{ni} = \sigma_n\,(u_{nk}\,u_n + v_{nik}\,v_{ni} + w_{nk}\,w_{ni} + \kappa_n{}^2\,\psi_{nk}\,\psi_{ni})$$

で定義すると，のちに証明するが，次の関係が成立する。

$$\left.\begin{aligned} &\sum_n \int_0^{l_n} \Phi_{nk}\,\Phi_{ni}\,dx_n = 0 \qquad (i \neq k) \\ &\sum_n \int_0^{l_n} \Phi^2{}_{nk}\,dx_n > 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

これはベクトル固有関数系の直交性を示すものとみてよい。

これにより，係数 A_k，B_k を適当にとって，$\Phi'_n(x_n,t)$，$\partial\Phi'_n(x_n,t)/\partial t$ の初期状態

$$\Phi'_n(x_n,0) = \mathbf{H}_n(x_n) = \sum_k A_k\,\Phi_{nk}$$

$$\frac{\partial\Phi'_n(x_n,0)}{\partial t} = \mathbf{K}_n(x_n) = \sum_k \omega_k\,B_k\,\Phi_{nk}$$

をみたすようにできる。すなわち (31) 式を用いて A_k，B_k は次のように定まる。

$$A_k = \sum_n \int_0^{l_n} \mathbf{H}_n\,\Phi_{nk}\,dx_n \Big/ \sum_n \int_0^{l_n} \Phi_{nk}{}^2\,dx_n$$

$$\omega_k B_k = \sum_n \int_0^{l_n} \mathbf{K}_n\,\Phi_{nk}\,dx_n \Big/ \sum_n \int_0^{l_n} \Phi_{nk}{}^2\,dx_n$$

さて (31) 式の第二式の成立は明らかであるから，第一式の証明をのべる。固有関数 u_{nk}，v_{nk}，w_{nk}，ψ_{nk} は方程式 (3) の解であるから次式が成立する。

$$\omega_k{}^2\,\sigma_n\,u_{nk} = -\,E_n\,S_n\,\frac{d^2u_{nk}}{dx_n{}^2}\,, \qquad \omega_k{}^2\,\sigma_n\,v_{nk} = E_n\,I_n\,\frac{d^4v_{nk}}{dx_n{}^4}\,,$$

$$\omega_k{}^2\,\sigma_n\,w_{nk} = E_n\,I_n{}'\,\frac{d^4w_{nk}}{dx_n{}^4}\,, \qquad \omega_k{}^2\sigma_n\kappa_n{}^2\psi_{nk} = -C_n\,\frac{d^2\psi_{nk}}{dx_n{}^2}$$

これらの両辺にそれぞれ u_{ni}，v_{ni}，w_{ni}，ψ_{ni} を乗じ，その式で示標 k, i を交換した式をつくり，両者の差をとり x_n について積分を行い，n について総和をとると，次式が求まる。

$$(\omega_k{}^2 - \omega_i{}^2)\sum_n \int_0^{l_n} \sigma_n\,(u_{nk}\,u_{ni} + v_{nk}v_{ni} + w_{nk}w_{ni} + \kappa_n{}^2\,\psi_{ni})dx_n$$

$$= -\sum_n \left(E_nS_n\,\frac{du_{nk}}{dx_n}\cdot v_{ni} - E_nI_n\,\frac{d_3v_{nk}}{dx_n{}^3}\cdot v_{ni} - E_nI_n{}'\,\frac{d^3\,w_{nk}}{dx_n{}^3}\cdot w_{ni}\right)\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}$$

$$-\sum_n \left(C_n\,\frac{d\psi_{nk}}{dx_n}\cdot\psi_{ni} + E_nI_n\,\frac{d^2v_{nk}}{dx_n{}^2}\,\frac{dv_{ni}}{dx_n} + E_nI_n{}'\,\frac{d^2w_{nk}}{dx_n{}^2}\cdot\frac{dw_{ni}}{dx_n}\right)\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}$$

$$+\sum_n\left(E_nS_n\frac{du_{ni}}{dx_n}\cdot u_{nk}-E_nI_n\frac{d^3v_{ni}}{dx_n{}^3}\cdot v_{nk}-E_nI_n{}'\frac{d^3w_{ni}}{dx_n{}^3}\cdot w_{nk}\right)\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}$$

$$+\sum_n\left(C_n\frac{d\psi_{ni}}{dx_n}\cdot\psi_{nk}+E_nI_n\frac{d^2v_{ni}}{dx_n}\frac{dv_{nk}}{dx_n}+E_nI_n{}'\frac{d^2w_{nk}}{dx_n{}^2}\cdot\frac{dw_{ni}}{dx_n}\right)\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}$$

さて，固有関数から求まる境界値 $u_{ni}(0)$，$u_{nk}(0)$，$v_{ni}(0)$，…… $dw_{ni}(0)/dx_n$，$dw_{nk}(0)/dx_n$，$u_{ni}(l_n)$，……，$dw_{nk}(l_n)/dx_n$ は変位条件をみたすから，(24) 式の境界値の変分を任意の固有関数の境界値におきかえることが許される。ところで固有関数は (24) 式をみたすものであるから，上式の右辺は明らかに零となる。k が異なり $\omega_i\neq\omega_k$ ならば左辺から

$$\sum_n\int_0^{l_n}\sigma_n(u_{nk}u_{ni}+v_{nk}v_{ni}+w_{nk}w_{ni}+\kappa_n{}^2\psi_{nk}\psi_{ni})\,dx_n=0$$

となり，(31) 式の直交性の成立が示される。

また次の関係式

$$\omega_k{}^2\sum_n\int_0^{l_n}\sigma_n(u_{nk}{}^2+v_{nk}{}^2+w_{nk}{}^2+\kappa_n{}^2\psi_{nk}{}^2)\,dx_n$$

$$=\sum_n\int_0^{l_n}\left[E_nS_n\left(\frac{du_{nk}}{dx_n}\right)^2+E_nI_n\left(\frac{d^2v_{nk}}{dx_n{}^2}\right)^2+E_nI_n{}'\left(\frac{d^2w_{nk}}{dx_n{}^2}\right)^2\right.$$

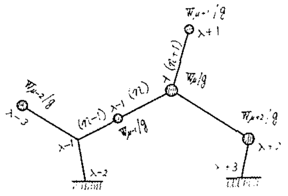
$$\left.+C_n\left(\frac{d\psi_{nk}}{dx_n}\right)^2\right]dx_n$$

$$-\sum_n\left(E_nS_n\frac{du_{nk}}{dx_n}u_{nk}-E_nI_n\frac{dv_{nk}}{dx_n{}^3}v_{nk}-E_nI_n{}'\left(\frac{d^3w_{nk}}{dx_{n2}}w_{nk}\right)\right)\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}$$

$$-\sum_n\left(C_n\frac{d\psi_{nk}}{dx_n}\psi_{nk}+E_nI_n\frac{d^2v_{nk}}{dx_n{}^2}\frac{dv_{nk}}{dx_n}+E_nI_n{}'\frac{d^2w_{nk}}{dx_n{}^2}\frac{dw_{nk}}{dx_n}\right)\Bigg|_{x_n=0}^{x_n=l_n}$$

が求まるが，右辺の第二，三項は同様にして消失するから，右辺は一般に正なる。したがって左辺から $\omega_k{}^2$ は正となる。このことはすべての固有関数に現実の振動が対応するために必要な条件である。

7　集中質量をもつ場合



第2図

集中質量がふくまれる場合，個々の質量を示標 μ で示し，その質量を W_μ/g，また解析を簡単にするため球状とし直径に関する慣性モーメントを J_μ とする。この質量 (μ) に連結している棒の長さにくらべ質量の径が十分小さく，棒の中心軸上の点に質量の中心が一致し，その点に集中していると仮定する。この点が直線棒の中間であってもその点を接続点として棒をわけてあつかえば，質量の集中点は棒の境界端

が接続点となる。いまこの集中点に接続する棒の１本を（n）とし，この点を棒（n）の座標で $x_n = l_n$ とすると，質量（μ）の変位は棒（n）の境界値

$u_n(l_n)$，$v_n(l_n)$，$w_n(l_n)$，$\psi_n(l_n)$，$-dw_n(l_n)/dx_n$，$dv_n(l_n)/dx_n$

で示される。各質量に対し，その変位を定める１本の棒の境界値をえらぶことができる。境界値の変位条件は第４章と同様にあつかえるから，これらの質量の変位を示す境界値をその点の未定境界値にえらぶことができる。それでこれらを第４章の記号にしたがい

$U_{\mu 1}$，$U_{\mu 2}$，$U_{\mu 3}$，$\Psi_{\mu 1}$，$\Psi_{\mu 2}$，$\Psi_{\mu 3}$

で示す。(15) 式の示標 λ の中に μ に対応するものがすべてふくまれることになる。

集中質量により (6) 式の L に追加される量を L_1 で示すと，集中質量のポテンシャルエネルギは規準振動のみを問題とする場合のぞいてよいから，運動のエネルギによるものだけを考えて次式となる。

$$L_1 = \sum_{\mu} \frac{W_\mu}{g} \omega^2 (U_{\mu 1}{}^2 + U_{\mu 2}{}^2 + U_{\mu 3}{}^2) + \sum_{\mu} \frac{J_\mu}{2} \omega^2 (\Psi_{\mu 1}{}^2 + \Psi_{\mu 2}{}^2 + \Psi_{\mu 3}{}^2)$$

これから

$$\delta L_1 = \sum_{\mu} \frac{W_\mu}{g} \omega^2 (U_{\mu 1}\,\delta U_{\mu 1} + U_{\mu 2}\,\delta U_{\mu 2} + U_{\mu 3}\,\delta U_{\mu 3})$$

$$+ \sum_{\mu} J_\mu \omega^2 (\Psi_{\mu 1}\,\delta\Psi_{\mu 1} + \Psi_{\mu 2}\,\delta\Psi_{\mu 2} + \Psi_{\mu 3}\delta\Psi_{\mu 3})$$

となる。これが (7) 式の境界項，したがって (16) 式の対応する項に追加される。すなわち上式の変分の係数が (17) 式の中の対応する力学的条件式の追加項を示す。

第５章の (20) 式の $\bar{L}$，(21) 式の L^* にも L_1 を追加すればよく，そこでのべたことはそのまま成立する。

さらに第６章の直交性については，次の様な追加項をふくめた形式で成立することを容易にたしかめることができる。

$$\sum_{n} \int_0^{l_n} \sigma_n (u_{nk} u_{ni} + v_{nk} v_{ni} + w_{nk} w_{ni} + \kappa_n{}^2 \psi_{nk} \psi_{ni})\, dx_n$$

$$+ \sum_{\mu} \frac{W_\mu}{g} (U_{\mu 1k} U_{\mu 1i} + U_{\mu 2k} U_{\mu 2i} + U_{\mu 3k} U_{\mu 3i})$$

$$+ \sum_{\mu} J_\mu (\Psi_{\mu 1k} \Psi_{\mu 1i} + \Psi_{\mu 2k} \Psi_{\mu 2i} + \Psi_{\mu 3k} \Psi_{\mu 3i})$$

$$= 0 \qquad (i \neq k)$$

ここに $U_{\mu 1k}$，……，$\Psi_{\mu 3k}$，$U_{\mu 1i}$，……，$\Psi_{\mu 3i}$ は対応する固有関数により定まる境界値を示す。

8　平面接続系の振動

系を構成する直線棒の中心軸がすべて一平面内にふくまれ，各棒の曲げ主面がこの平面に重なる場合，y_n 軸をこの面内にえらび，z_n 軸をこれと直交する主軸に定めると，接続点における境界値の連続条件（13），（14）式は

$$m_{13} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0, \quad m_{33} = \pm 1$$

により，次のように2組に整理される。

$$\left.\begin{aligned} u_k(0) &= m_{11}\, u_n(l_n) + m_{12}\, u_n(l_n) \\ v_k(0) &= m_{21}\, u_n(l_n) + m_{22}\, v_n(l_n) \\ dv_k(0)/dx_k &= \pm\, dv_n(l_n)/dx_n \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_k(0) &= m_{11}\, \psi_n(l_n) + m_{12}(-\,dw_n(l_n)/dx_n) \\ -dw_k(0)/dx_k &= m_{21}\, \psi_n(l_n) + m_{22}(-\,dw_n(l_n)/dx_n) \\ w_k(0) &= \pm\, w_n(l_n) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

（32）式の境界値は系の各棒の中心軸をふくむ平面内の変位によるもののみで，それらの連続条件を，（33）式はその面外（面に垂直な）境界値の連続条件を示す。同様な連続条件がすべての接続点で成立するから，これらの境界値で指定される棒の変位も $u_n(x_n)$，$v_n(x_n)$，$dv_n(x_n)/dx_n$ と $\psi_n(x_n)$，$-\,dw_n(x_n)/dx_n$，$w_n(x)$ の2組に分離してとりあつかうことができる。これは，周知の面内振動と面外振動の分離を示すもので[3][4]，変位の種別から，面内振動は縦および曲げ振動を，面外振動はねじりおよび曲げ振動を考慮すればよいことがわかる。

これは未定境界値のみで表わした（21）式の L^* が2組の未定境界値群 $U_{\lambda1}$，$U_{\lambda2}$，$\Psi_{\lambda3}$ と $\Psi_{\lambda1}$，$\Psi_{\lambda2}$，$U_{\lambda3}$ に完全に分離した二つの部分の和となることを示し，未定境界値を決定する方程式（23）も次の2組に分離する

$$\frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda1}} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda2}} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda3}} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda1}} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \Psi_{\lambda2}} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial U_{\lambda3}} = 0 \tag{35}$$

（34）式および（35）式から，それぞれ面内振動および面外振動の振動数方程式が求まる。

一般には，はじめから面内振動あるいは面外振動に対応するラグランジュアン関数 L あるいは L^* のみを考慮すればよい。なお第7章でのべた集中質量をもつ場合についても，あきらかに上述のことはすべて成立する。

9　諸例解について

従来，わく組の振動解析には，主として，実用的な *Rayleigh－Ritz* の方法と，各系を支配する微分方程式の一般解から，境界条件と連続条件を用いて未定定数を消法し振動数

方程式を求める方法とが用いられてきた。前者は精度をあげるのに手数を要し，高次の振動数を求めるのは困難である。また後者は接続段数の増加につれ，繁雑となる。

第5章でのべた高橋の方法は，結果的には後者を遂行したことになる。各単位系の方程式の解を代入したラグランジュアンの積分が，第5章の直線棒の場合のように，あらかじめ求まれば，その停留条件から境界値ならびに振動数を決定する方程式を容易に求めることができる。この方法による具体的な例題の解は文献 (1)，(2)，(4) のほかにも相当数公表されている[(5),(6)]。本紀要中の「H形棒わく組の振動」[(7)] もその一例に相当する。

文献 (1) の L 形棒の振動とまったく同種の問題を，*Ritz* の方法で解いた太田，浜田，他の解[(8)]と直接境界条件，連続条件から微分方程式を解いた佐藤の解[(9)]があり，これらを比較検討すれば，高橋の方法が，振動数方程式を求める手続きの容易さのみでなく，この程度の接続段数では実際の数値計算もふくめて十分実用的であることがわかる。

さらに佐藤は T 形はりについて，各部材を一つの質量・ばね系に変換して，それらを組合せて「質量・ばね連成系」を作り，実用的な近似解を示し，同時に高橋の方法による理論解も求め比較している[(10)]。全般にわたって近似解の精度を十分に期待するための手数は，高橋の方法による理論解に要する手数とあまりちがいがないように思う。なおこの種の実用解の難点は，個々の具体例についてそのつど相当綿密な考察を要し，さらに精度について一般的な見通しをたてにくいことにある。

高橋は直線棒わく組系にとどまらず，円弧形棒[(11)]および円弧形棒をふくむわく組[(12)]も同一手法で解析している。一般に曲線棒をふくむ系についても，ラグランジュアンの積分があらかじめ求まれば，同一方法により解くことができる。この場合にも停留条件から定まる方程式の力学的な意味にかわりはない。

10　む す び

直線棒わく組の自由振動の固有関数系について予想される諸性質を明らかにした。これらは1本の棒の固有関数の性質が，接続系の連成振動の定める固有関数ベクトル系に拡張されたもので，数学の一般論としては自明であらうが，この種の具体的な工学問題の連成系にそくした記述には接していないように思う。

また高橋の示した，未定境界値のみで表わしたラグランジュアン L^* の停留条件から定まる方程式の力学的意味も，一般論としては明らかでなかったように思う〔文献 (2) の付録2参照〕。

一応，不十分な記述ながら，これらのことを，さほど一般性をそこなわずに示すことができたと考える。

接続系の固有関数系の性質は，本年4月の機械学会第42期通常総会において，一部講演発表した，系の対称性にもとづく規準振動型の必然的な分類〔文献(6) 参照〕の一般論の基礎となるものである。

おわりに，本論文は日頃御指導をあおぐ高橋伸教授に御討論いただいたことをまとめたもので，ここに厚く謝意を表します。

文　　献

(1) 高橋，機械学会論文集，**27**，182（昭36—10），1489.

(2) 高橋，機械学会論文集，**31**，223（昭40—3），397.

(3) H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4 th ed., (1927), 447—453, Cambridge U. P.

(4) 平野，機械学会論文集，**31**，231（昭40—11），1630.

(5) 高橋，機械学会論文集，**27**，176（昭36—4），480. 高橋，機械学会論文集，**28**，185（昭37—1），65.

(6) 平野，機械学会第42期通常総会講演会前刷集，No.132（昭40—4），67.

(7) 平野，高橋，山形大学紀要（工学）**9**，1（1965），199.

(8) 太田，浜田，他3名，機械学会論文集，**27**，176（昭36—4），487.

(9) 佐藤，機械学会第38期通常総会講演前刷集，No.10（昭36—4），9.

(10) 佐藤，機械学会第40期通常総会講演前刷集，No. 88.（昭38—4），5.
佐藤，他3名，機械学会第41期通常総会講演前刷集，No.107（昭39—4），21.

(11) 高橋，機械学会論文集，**29**，197（昭38—1），179.
高橋，機械学会論文集，**29**，197（昭38—1），187.

(12) 高橋，機械学会論文集，**29**，206（昭38—10），1725.
高橋，機械学会論文集，**30**，212（昭39—4），519.

Free Vibrations of Frame Works
(On the Takahashi's Method and the Normal Functions)

Yoshitaro HIRANO

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering

There are many arbitrary constants in the general solutions of the equations for the free vibrations of a frame work consisting of many bars. We have been obliged to make great efforts to determine these constants from the boundary conditions and the equations of continuity at the rigidly jointed corners and then to obtain the frequency equation of this system.

Professor Shin Takahashi found in 1961 an available method in which we would carry out easily a process to decide the values of these constants and to find the frequency equation. This method is called "Lagrangian-minimizing-method" or "Takahashi's method".

In this paper we will exhibit the dynamical meaning of the Takahashi's method and the general properties of the normal functions for the free vibrations by means of the calculus of variation.