

円筒殻の振動の一解法について Flügge の方程式にもとづくラグランジュアン

平野 芳太郎

工学部 機械工学科

1. まえがき

うすい殻の理論において、いわゆる Love⁽¹⁾ の第1近似理論は、次の二つの主要な仮定にもとづいている。

- a) 変形前に中央曲面に垂直な直線上にあった点は、変形後も、変形した中央曲面に垂直なその直線上にあり、また中央曲面に垂直な応力は、他の応力に対して無視することができる。
- b) 曲率半径に対する殻の厚さの比は十分小さく1に対して無視できる。

Flügge⁽²⁾ は仮定 a) のみで b) をつかわず、より一般的な応力、ひずみ関係式を求め、それから基礎方程式を示している。この Flügge の方程式による円筒殻の振動のくわしい計算も行なわれている^{(3), (4)}。

最近、高橋伸教授⁽⁵⁾ と著者⁽⁶⁾ は円筒殻が他の系と接続して振動する場合の解析に利用するため、円筒殻のラグランジュアンを求めたが、そこで採用した殻のひずみエネルギーは Love の第1近似理論によるものである。

そこで、ここでは Flügge の方程式に対応する円筒殻のラグランジュアンを求める。殻の基礎的な応力、ひずみに関する式は Gol'denveizer⁽⁷⁾ あるいは Novozhilov⁽⁸⁾ のそれに、座標系、単位長さあたりの断面の力、モーメントの定義は Timoshenko⁽⁹⁾ の方式

によった。なお、ひずみエネルギーをもとめる記述は円筒殻にかぎったが、球殻、円錐殻に対する Flügge の方程式に対応するひずみエネルギーもまったく同様に求める。

第4章のラグランジュアンの計算は、高橋の論文⁽⁶⁾ と同様な手続きでよいから、比較対照に便利なように、一部境界定数の定義のちがいがらくる差違はあるが、できるかぎり同種の記述になるようこころみた。

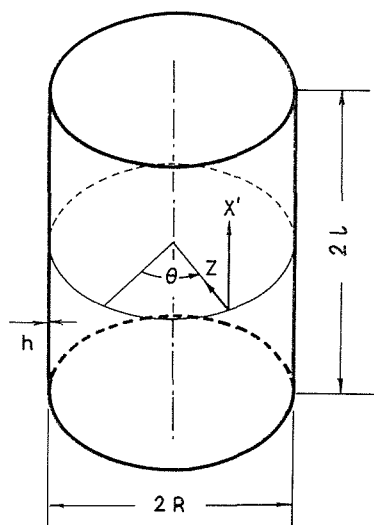


図 1

2. 円筒殻のひずみエネルギー

円筒殻の厚さ h 、長さ $2l$ 、中央曲面の半径を R とし、図1に示すように、母線にそい中央断面上の点を原点として x' 軸を、これと直交する横断面の円周にそい角座標 θ

を, 中央曲面の法線にそい内側向きを正として z 軸をとる。また無次元座標 x を

$$x = x' / R$$

とする。

殻の任意点の応力とひずみを

$$\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{x\theta}, \tau_{xz}, \tau_{\theta z};$$

$$\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{x\theta}, \gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}$$

とすると, 中央曲面に垂直な単位長さあたりの合成力とモーメントは次のようになる⁽⁹⁾

(図2, 3参照)

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz, & N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz, \\ N_{x\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz, & N_{\theta x} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x} dz, \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz, & Q_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} dz, \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz, & M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz, \\ M_{x\theta} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta} z \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz, & M_{\theta x} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x} z dz, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

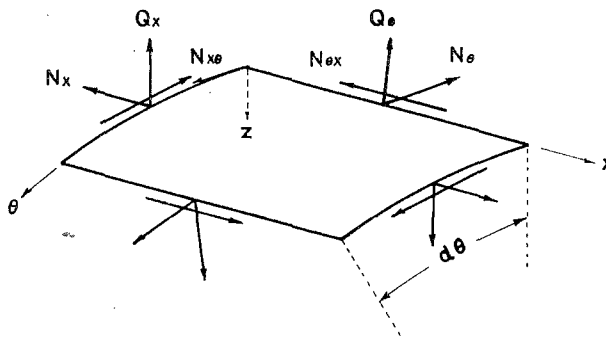


図 2

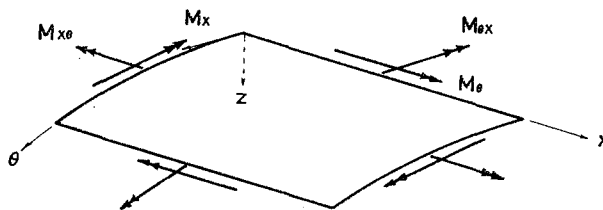


図 3

また、仮定 a) から

$$\gamma_{xz} = \gamma_{\theta z} = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad (2)$$

とおくと、円筒殻のひずみエネルギーは

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta}) \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \right] R^2 d\theta dx \quad (3)$$

となり、Hooke の法則から次式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\sigma^2} (\epsilon_x + \sigma \epsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\sigma^2} (\epsilon_\theta + \sigma \epsilon_x), \\ \tau_{x\theta} &= \frac{2E}{1+\sigma} \gamma_{x\theta} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 E はヤング率、 σ はポアソン比である。

中央曲面上の点の x' , θ , z 方向への変位を u , v , w とし、そのひずみ ϵ_x , ϵ_θ , $\gamma_{x\theta}$ を ϵ_1 , ϵ_2 , ω で示すと

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right), \\ \omega &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また、曲率の変化など曲げ変形の成分を κ_1 , κ_2 , τ とすると

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \\ \tau &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。殻の任意点のひずみは中央曲面上の対応点のひずみと変形の成分であらわされ

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_1 - z \kappa_1, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{1-z/R} (\epsilon_2 - z \kappa_2) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{1-z/R} \left\{ \omega - \left(2 - \frac{z}{R} \right) z \tau \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる (7), (8)。

式 (4), (5), (6), (7) を式 (1) の右辺に代入し、展開式

$$\frac{1}{1-z/R} = 1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} + \frac{z^3}{R^3} + \dots$$

を用いて被積分関数を整理し、 z^4 以上の項を無視し、積分を行なうと次式が求まる。

$$\begin{aligned}
 N_x &= -\frac{D}{R^3} \left[\beta (u_x + \sigma v_\theta - \sigma w) + w_{xx} \right], \\
 N_\theta &= -\frac{D}{R^3} \left[\beta (v_\theta - w + \sigma u_x) - (w_{\theta\theta} + w) \right], \\
 N_{x\theta} &= -\frac{D}{R^3} \left[\frac{1-\sigma}{2} \left\{ \beta (u_\theta + v_x) + w_{x\theta} + v_x \right\} \right], \\
 N_{\theta x} &= -\frac{D}{R^3} \left[\frac{1-\sigma}{2} \left\{ \beta (u_\theta + v_x) - w_{x\theta} + u_\theta \right\} \right], \\
 M_x &= -\frac{D}{R^2} (w_{xx} + \sigma w_{\theta\theta} + \sigma v_\theta + u_x), \\
 M_\theta &= -\frac{D}{R^2} (w_{\theta\theta} + w + \sigma w_{xx}), \\
 M_{x\theta} &= -\frac{D}{R^2} (w_{x\theta} + v_x)(1-\sigma), \\
 M_{\theta x} &= -\frac{D}{R^2} \left(w_{x\theta} + \frac{1}{2} v_x - \frac{1}{2} u_\theta \right) (1-\sigma)
 \end{aligned} \tag{8}$$

ただし、曲げ剛性 D と β は次式で示され

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}, \quad \beta = \frac{12R^2}{h^2}$$

$v_\theta, w_{xx}, w_{x\theta}, \dots$ はそれぞれ $\frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}, \dots$ を示す。

式(3)のひずみエネルギーについても同様にして x に関する積分を行なうと

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} \iint \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4} \right] R^2 d\theta dx \\
 &+ \frac{Eh}{24(1-\sigma^2)} \iint \left[(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\kappa_1\kappa_2 - \tau^2) \right] R^2 d\theta dx \\
 &+ \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iint \left[\frac{\varepsilon_2^2}{R^2} + \frac{1-\sigma}{2R^2} \omega^2 + \frac{2}{R} (\varepsilon_1\kappa_1 - \varepsilon_2\kappa_2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1-\sigma}{R} \omega\tau \right] R^2 d\theta dx
 \end{aligned} \tag{9}$$

あるいは、変位 u, v, w で示すと

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{D}{2R^3} \iint \left\{ \beta \left\{ u_x^2 + (v_\theta - w)^2 + 2\sigma u_x(v_\theta - w) + \frac{1}{2}(1-\sigma)(u_\theta + v_x)^2 \right\} \right. \\
 &\quad + \left\{ w_{xx}^2 + (w_{xx} + v_\theta)^2 + 2\sigma w_{xx}(w_{\theta\theta} + v_\theta) \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(1-\sigma)(w_{x\theta} + v_x)^2 \right\} \right\} d\theta dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{D}{2R^2} \iint \left[(v_\theta - w)^2 + \frac{1-\sigma}{2} (u_\theta + v_x)^2 \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left\{ u_x w_{xx} - (v_\theta - w) (w_{\theta\theta} + v_\theta) \right\} \right. \\
 & \quad \left. - (1-\sigma) (u_\theta + v_x) (w_{x\theta} + v_x) \right] d\theta dx \quad (10)
 \end{aligned}$$

がもとまる。

仮定 *b*) も採用するときは、式 (3), (7) において $1-z/R$ を 1 とすればよく、ひずみエネルギーの式は、式 (9) においても、式 (10) においても、おわりの積分項が消失したものとなる。これは高橋⁽⁶⁾ のもとめたラグランジュアンのひずみエネルギー項と一致する。

3. Euler 方程式と境界条件

定常振動のラグランジュアンを求める。 p_0 を円振動数とし、無次元量 ω_0, α を次のように定義する。

$$\omega_0^2 = \frac{(1-\sigma^2)r_0 R^2 p_0^2}{g_0 E}, \quad \alpha^4 = \beta \omega_0^2 = \frac{r_0 h R^4 p_0^2}{g_0 D}$$

r_0 は比重量, g_0 は重力加速度を示す。

中央曲面上の点の振動中の変位を $u \sin p_0 t, v \sin p_0 t, w \sin p_0 t$ で示すと、円筒殻のひずみエネルギーの最大値 V は前章の式 (10) と一致する。また振動中の最大の運動エネルギー T は、断面の回転慣性を無視すると

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \frac{r_0}{g_0} h p_0^2 \iint (u^2 + v^2 + w^2) R^2 d\theta dx \\
 &= \frac{D}{2R^2} \alpha^4 \iint (u^2 + v^2 + w^2) d\theta dx
 \end{aligned}$$

となり、この固有値問題に対するラグランジュアン L は

$$L = T - V$$

であたえられるから

$$\begin{aligned}
 -L &= \frac{D}{2R^2} \iint \left\{ \beta \left\{ u_x^2 + (v_\theta - w)^2 + 2\sigma u_x (v_\theta - w) + \frac{1-\sigma}{2} (u_\theta + v_x)^2 \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \left\{ -\alpha^4 (u^2 + v^2 + w^2) + w_{xx}^2 + (w_{\theta\theta} + v_\theta)^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2\sigma (w_{\theta\theta} + v_\theta) w_{xx} + 2(1-\sigma) (w_{\theta x} + v_x)^2 \right\} \right\} d\theta dx \\
 & + \frac{D}{2R^2} \iint \left[(v_\theta - w)^2 + \frac{1-\sigma}{2} (u_\theta + v_x)^2 \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left\{ u_x w_{xx} - (v_\theta - w) (w_{\theta\theta} + v_\theta) \right\} \right. \\
 & \quad \left. - (1-\sigma) (u_\theta + v_x) (w_{\theta x} + v_x) \right] d\theta dx \quad (11)
 \end{aligned}$$

となる。この式で第2項の積分をのぞくと高橋のラグランジュアンと一致する。⁽⁶⁾

L の極小条件 $\delta L = 0$ を求め、部分積分を行ない、整理すると

$$\begin{aligned}
 -\delta L = & \frac{D}{R^2} \iint \left\{ \left(\beta \left(\sigma w_x - \frac{1+\sigma}{2} v_{x\theta} - u_{xx} - \frac{1-\sigma}{2} u_{\theta\theta} \right) \right. \right. \\
 & + \frac{1-\sigma}{2} w_{x\theta\theta} - w_{xxx} - \frac{1-\sigma}{2} u_{\theta\theta} - \alpha^4 u \left. \right\} \delta u \\
 & + \left\{ \beta \left(w_\theta - \frac{1+\sigma}{2} u_{x\theta} - v_{\theta\theta} - \frac{1-\sigma}{2} v_{xx} \right) \right. \\
 & - \frac{3(1-\sigma)}{2} v_{xx} - \frac{3-\sigma}{2} w_{xx\theta} - \alpha^4 v \left. \right\} \delta v \\
 & + \left\{ \beta (w - v_\theta - \sigma u_x) + w_{xxxx} + 2w_{xx\theta\theta} + w_{\theta\theta\theta\theta} + 2w_{\theta\theta} \right. \\
 & + w + u_{xxx} - \frac{1-\sigma}{2} u_{x\theta\theta} + \frac{3-\sigma}{2} v_{xx\theta} - \alpha^4 w \left. \right\} \delta w \Big] d\theta dx \\
 & + \frac{D}{R^2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left\{ \left\{ \beta (u_x + \sigma v_\theta - \sigma w) + w_{xx} \right\} \delta u \right. \\
 & + \frac{1-\sigma}{2} \left\{ \beta (u_\theta + v_x) + 3(w_{x\theta} + v_x) \right\} \delta v \\
 & - \left\{ w_{xxx} + u_{xx} + (2-\sigma)(w_{x\theta\theta} + v_{x\theta}) - \frac{1-\sigma}{2} (u_{\theta\theta} + v_{x\theta}) \right\} \delta w \\
 & + \left\{ w_{xx} + u_x + \sigma(w_{\theta\theta} + v_\theta) \right\} \delta w_x \Big|_{x=-\mu}^{x=\mu} d\theta \\
 & + \frac{D}{R^2} \int_{-\mu}^{\mu} \left\{ \frac{1-\sigma}{2} \left\{ \beta (u_\theta + v_x) + u_\theta - w_{x\theta} \right\} \delta u \right. \\
 & + \left\{ \beta (v_\theta - w + \sigma u_x) + \sigma w_{xx} \right\} \delta v \\
 & - \left\{ w_{\theta\theta\theta} + w_\theta + (2-\sigma)w_{\theta xx} + \frac{3}{2}(1-\sigma)v_{xx} - \frac{1-\sigma}{2} u_{x\theta} \right\} \delta w \\
 & + (w_{\theta\theta} + w + \sigma w_{xx}) \delta w_\theta \Big|_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} dx \\
 & = 0 \tag{12}
 \end{aligned}$$

ここで μ は l/R を示す。2本の母線にそって切断された円筒片のときをのぞき、普通の円筒では θ_0, θ_1 を一般に $0, 2\pi$ としてよく、第3項は消失する。

第1項の面積分であらわされた変分式から、領域内でみたす必要のある条件としてつぎの Euler 方程式がもとまる。

$$\left. \begin{aligned}
 & \beta \left(\sigma w_x - \frac{1+\sigma}{2} v_{x\theta} - u_{xx} - \frac{1-\sigma}{2} u_{\theta\theta} \right) + \frac{1-\sigma}{2} w_{x\theta\theta} - w_{xxx} - \frac{1-\sigma}{2} u_{\theta\theta} - \alpha^4 u = 0 \\
 & \beta \left(w_\theta - \frac{1+\sigma}{2} u_{x\theta} - v_{\theta\theta} - \frac{1-\sigma}{2} v_{xx} \right) - \frac{3(1-\sigma)}{2} v_{xz} - \frac{3-\sigma}{2} w_{xx\theta} - \alpha^4 v = 0 \\
 & \beta (w - v_\theta - \sigma u_x) + w_{xxx} + 2 w_{xx\theta\theta} + w_{\theta\theta\theta\theta} + 2 w_{\theta\theta} + w \\
 & \quad + u_{xxx} - \frac{1-\sigma}{2} u_{x\theta\theta} + \frac{3-\sigma}{2} v_{xx\theta} - \alpha^4 w = 0
 \end{aligned} \right\} (13)$$

これは微小殻片の釣合方程式に式(8)を代入しても求まり、Flügge⁽²⁾の運動方程式と一致する。

第2項の円筒の両端の境界周にそう線積分で示された変分式はその境界周の条件により消失するか、そこで必要な条件をあたえる。すなわち、変位 u , v , w , w_x が拘束されれば、その変分が零となり、対応する部分が消失する。変位 u が自由であれば、その周上では δu は任意であるから必要な条件

$$\beta (u_x + \sigma v_\theta - \sigma w) + w_{xx} = 0$$

をあたえるが式(8)からこれは

$$N_x = \frac{D}{R^3} \left\{ \beta (u_x + \sigma v_\theta - \sigma w) + w_{xx} \right\} = 0$$

に相当する。同様に、 δv , δw , δw_x の係数は次に示すように、それぞれ合成接線力 S_x , 合成せん断力 T_x , モーメント M_x に相当する。

$$\begin{aligned}
 S_x &= N_{x\theta} + \frac{1}{R} M_{x\theta} = \frac{D}{R^3} \frac{1-\sigma}{2} \left\{ \beta (u_\theta + v_x) + 3 (w_{x\theta} + v_x) \right\}, \\
 T_x &= Q_x - \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} \right) \\
 &= - \frac{D}{R^3} \left\{ w_{xxx} + u_{xx} + (2-\sigma)(w_{x\theta\theta} + v_{x\theta}) - \frac{1-\sigma}{2} (u_{\theta\theta} + v_{x\theta}) \right\} \\
 M_x &= - \frac{D}{R^3} \left\{ w_{xx} + u_x + \sigma (w_{\theta\theta} + v_\theta) \right\}
 \end{aligned}$$

したがって、変位が拘束されないと、相当する力、あるいはモーメントの消失が必要な条件となる。また境界周で他の系と接続されるときは、変位の連続に対して、上述の力、モーメントの連続の条件がつけられる。

4. ラグランジュアン

Euler 方程式(13)の解を求める。はじめ軸対称な振動をのぞいて、節母線のある振動の解は一般に次のようになる。⁽⁶⁾

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^4 [(k_{np} \sinh \lambda_{np} x + k_{np}' \cosh \lambda_{np} x) \cos n\theta \\
 &\quad + (k_{np}'' \sinh \lambda_{np} x + k_{np}''' \cosh \lambda_{np} x) \sin n\theta], \\
 v &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^4 [-\psi_{np} (k_{np} \sinh \lambda_{np} x + k_{np}' \cosh \lambda_{np} x) \sin n\theta \\
 &\quad + \phi_{np} (k_{np}'' \sinh \lambda_{np} x + k_{np}''' \cosh \lambda_{np} x) \cos n\theta], \\
 u &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^4 [\phi_{np} (k_{np} \cosh \lambda_{np} x + k_{np}' \sinh \lambda_{np} x) \cos n\theta \\
 &\quad + \phi_{np} (k_{np}'' \cosh \lambda_{np} x + k_{np}''' \sinh \lambda_{np} x) \sin n\theta]
 \end{aligned} \tag{14}$$

$k_{np}, k_{np}', k_{np}'', k_{np}'''$ は任意定数である。いま

$$\begin{aligned}
 \zeta &= 1 - \sigma, \quad a = \omega_0^2 - \frac{\zeta}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) n^2, \\
 b &= \frac{2}{\zeta} (\omega_0^2 - n^2), \quad c = (\beta + 1) - \beta \omega_0^2 + (n^4 - 2n^2) \\
 f &= \frac{n}{\zeta} - \frac{n}{2}, \quad g = 1 - \zeta - \frac{n^2}{2\beta}, \\
 e &= \frac{n(2 + \zeta)}{2\beta\zeta}, \quad k = n / \zeta
 \end{aligned}$$

とおくと, $\lambda_{np}, \phi_{np}, \psi_{np}$ は次の方程式から定まる。

$$\begin{aligned}
 (\lambda_{np}^2 + a)\phi_{np} - \zeta f \lambda_{np} \psi_{np} - (\lambda_{np} g - \lambda_{np}^3 / \beta) &= 0 \\
 \zeta f \lambda_{np} \phi_{np} + \frac{1}{2} \zeta \left\{ (1 + 3/\beta) \lambda_{np}^2 + b \right\} \psi_{np} + \zeta (\lambda_{np}^2 e - k) &= 0 \\
 -(\lambda_{np} g - \lambda_{np}^3 / \beta) \phi_{np} - \zeta (\lambda_{np}^2 e - k) \psi_{np} + (\lambda_{np}^4 - 2n^2 \lambda_{np}^2 + c) / \beta &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

式(15)から ϕ_{np}, ψ_{np} を消去すると, λ_{np} を決定する方程式

$$A_4 \lambda_{np}^8 + A_3 \lambda_{np}^6 + A_2 \lambda_{np}^4 + A_1 \lambda_{np}^2 + A_0 = 0 \tag{16}$$

が求まる, ここで

$$\begin{aligned}
 A_4 &= (1 + 3/\beta)(1 - 1/\beta), \\
 A_3 &= (1 + 3/\beta)(a - 2n^2) + (1 - 1/\beta)b + 2\zeta f^2 - 4\zeta f e + 2\beta \zeta e^2, \\
 A_2 &= ab + (1 + 3/\beta)c - 2n^2 \{ (1 + 3/\beta)a + b + 2\zeta f^2 \} \\
 &\quad + 4\zeta f k + 2\beta \zeta e(ae + 2fg) - (1 + 3/\beta)\beta g^2, \\
 A_1 &= c \{ (1 + 3/\beta)a + b + 2\zeta f^2 \} - 2n^2 ab + 2\beta \zeta k(k - 2fg) - \beta b g^2, \\
 A_0 &= abc + 2\beta \zeta a k^2
 \end{aligned}$$

とする。

円筒の両端の境界周の変位がフーリエ級数に展開可能とすると

$$\left. \begin{aligned}
 2u \Big|_{x=\pm\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(g_n \pm g_n') \cos n\theta + (h_n \pm h_n') \sin n\theta \right] \\
 2v \Big|_{x=\pm\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\mp p_n - p_n') \sin n\theta + (\pm q_n + q_n') \cos n\theta \right] \\
 2w \Big|_{x=\pm\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\pm a_n + a_n') \cos n\theta + (\pm b_n + b_n') \sin n\theta \right] \\
 2 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n \pm c_n') \cos n\theta + (d_n \pm d_n') \sin n\theta \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに $a_n, a_n', b_n, b_n', c_n, c_n', \dots, q_n, q_n'$ は境界値である。式(14)を式(17)の左辺に代入し、両辺の $\cos n\theta, \sin n\theta$ の係数を等値して次の関係式がもとまる。

$$\left. \begin{aligned}
 a_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np} \sinh \xi_{np}, & b_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np}'' \sinh \xi_{np}, \\
 c_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np} \lambda_{np} \cosh \xi_{np}, & d_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np}'' \lambda_{np} \cosh \xi_{np}, \\
 g_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np} \phi_{np} \cosh \xi_{np}, & h_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np}'' \phi_{np} \cosh \xi_{np}, \\
 p_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np} \psi_{np} \sinh \xi_{np}, & q_n &= 2 \sum_{p=1}^4 k_{np}'' \psi_{np} \sinh \xi_{np},
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

a_n', c_n', g_n', p_n' は a_n, c_n, g_n, p_n において k_{np} を k_{np}' にかえ $\sinh \xi_{np}$ と $\cosh \xi_{np}$ を交換した式である。 b_n', d_n', h_n', q_n' は b_n, d_n, h_n, q_n において k_{np}'' を k_{np}''' にかえ $\sinh \xi_{np}$ と $\cosh \xi_{np}$ を互に交換すればよい。なお ξ_{np} は

$$\xi_{np} = \lambda_{np} \mu$$

とする。式(18)から積分定数 k_{np} は境界値であらわされる、すなわち

$$k_{np} = a_n A_{np} + c_n C_{np} + g_n G_{np} + p_n P_{np} \quad (19)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_n &= \sum_{p=1}^4 (-1)^p \sinh \xi_{np} \sum_{(qrs)} \psi_{nq} (\phi_{nr} \lambda_{ns} - \phi_{ns} \lambda_{nr}) \sinh \xi_{nq} \cosh \xi_{nr} \cosh \xi_{ns}, \\
 A_{np} &= \frac{(-1)^p}{2 \Delta_n} \sum_{(qrs)} \psi_{nq} (\phi_{nr} \lambda_{ns} - \phi_{ns} \lambda_{nr}) \sinh \xi_{nq} \cosh \xi_{nr} \cosh \xi_{ns}, \\
 C_{np} &= \frac{(-1)^p}{2 \Delta_n} \sum_{(qrs)} \phi_{nq} (\psi_{nr} - \psi_{ns}) \cosh \xi_{nq} \sinh \xi_{nr} \sinh \xi_{ns}, \\
 G_{np} &= \frac{(-1)^{p-1}}{2 \Delta_n} \sum_{(qrs)} \lambda_{nq} (\psi_{nr} - \psi_{ns}) \cosh \xi_{nq} \sinh \xi_{nr} \sinh \xi_{ns}, \\
 P_{np} &= \frac{(-1)^{p-1}}{2 \Delta_n} \sum_{(qrs)} (\phi_{nr} \lambda_{ns} - \phi_{ns} \lambda_{nr}) \sinh \xi_{nq} \cosh \xi_{nr} \cosh \xi_{ns}
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

とする。なお、上式で p, q, r, s は $1, 2, 3, 4$ を循環してとり、 $\sum_{(qrs)}$ は p をのぞいたのこりの3個の数字を循環しその和をとることを示す。 Δ_n の \sinh と \cosh を交換したものを Δ_n' 、また $A_{np}, C_{np}, G_{np}, P_{np}$ で Δ_n を Δ_n' にかえ、 \sinh と \cosh を互に交換したものを $A_{np}', C_{np}', G_{np}', P_{np}'$ とすると

$$\left. \begin{aligned} k_{np}' &= a_n' A_{np}' + c_n' C_{np}' + g_n' G_{np}' + p_n' P_{np}', \\ k_{np}'' &= b_n A_{np} + d_n C_{np} + h_n G_{np} + q_n P_{np}, \\ k_{np}''' &= b_n' A_{np}' + d_n' C_{np}' + h_n' G_{np}' + q_n' P_{np}' \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。

これで Euler 方程式 (13) の解 (14) の積分定数 $k_{np}, k_{np}', k_{np}'', k_{np}'''$ が境界定数で表わされたからこの解を式 (11) のラグランジュアン L に代入する。このさい、 L を部分積分すると式 (12) の δL において変分 $\delta u, \delta v, \delta w, \delta w_x, \delta w_\theta$ を u, v, w, w_x, w_θ にかえ $1/2$ をかけた式になるから、第1項の面積分はあきらかに消失する。また普通の円筒では第3項の線積分も消失するから

$$\begin{aligned} -L &= \frac{D}{2R^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left\{ \beta(u_x + \sigma v_\theta - \sigma w) + w_{xx} \right\} u \right. \\ &\quad + \frac{1-\sigma}{2} \left\{ \beta(u_\theta + v_x) + 3(w_{x\theta} + v_x) \right\} v \\ &\quad - \left\{ w_{xxx} + u_{xx} + (2-\sigma)(w_{x\theta\theta} + v_{x\theta}) - \frac{1-\sigma}{2}(u_{\theta\theta} + v_{x\theta}) \right\} w \\ &\quad \left. + \left\{ w_{xx} + u_x + \sigma(w_{\theta\theta} + v_\theta) \right\} w_x \right\} \Big|_{x=-\mu}^{x=\mu} d\theta \end{aligned} \quad (22)$$

に式 (14) を代入すればよい。ここで

$$\begin{aligned} Z_n &= n^2 \zeta a_n c_n - \left\{ \beta \frac{(1-\zeta)}{2} + \frac{n^2 \zeta}{2} \right\} a_n g_n + \frac{(-2+5\zeta)n}{4} c_n p_n + \frac{\beta n(-2+3\zeta)}{4} g_n p_n \\ &\quad - \sum_{p=1}^4 \left[a_n^2 A_{np} + a_n c_n C_{np} + a_n g_n G_{np} + a_n p_n P_{np} \right] (\lambda_{np}^3 + \lambda_{np}^2 \phi_{np}) \cosh \xi_{np} \\ &\quad + n \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right) \sum_{p=1}^4 \left[[a_n^2 A_p + a_n c_n C_{np} + a_n g_n G_{np} + a_n p_n P_{np}] \lambda_{np} \phi_{np} \cosh \xi_{np} \right. \\ &\quad + \sum_{p=1}^4 \left[a_n c_n A_{np} + c_n^2 C_{np} + c_n g_n G_{np} + c_n p_n P_{np} \right] (\lambda_{np}^2 + \lambda_{np} \phi_{np}) \sinh \xi_{np} \\ &\quad + \sum_{p=1}^4 \left[a_n g_n A_{np} + c_n g_n C_{np} + g_n^2 G_{np} + g_n p_n P_{np} \right] (\beta \lambda_{np} \phi_{np} + \lambda_{np}^2) \sinh \xi_{np} \\ &\quad \left. + \frac{\zeta}{2} (\beta + 3) \sum_{p=1}^4 \left[[a_n p_n A_{np} + c_n p_n C_{np} + g_n p_n G_{np} + p_n^2 P_{np}] \lambda_{np} \phi_{np} \cosh \xi_{np} \right] \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

とし、 Z_n の $a_n, c_n, g_n, p_n, A_{np}, C_{np}, G_{np}, P_{np}$ のかわりに $a_n', c_n', g_n', p_n', A_{n'p}, C_{n'p}, G_{n'p}, P_{n'p}$ を用い、 \sinh と \cosh を互に交換した式を Z_n' とする。また Z_n および Z_n' で a_n, c_n, g_n, p_n および a_n', c_n', g_n', p_n' のかわりに b_n, d_n, h_n, q_n , および b_n', d_n', h_n', q_n' を用いた式をそれぞれ Z_n'', Z_n''' とするともとめるラグランジュアンは

$$-L / \frac{\pi D}{2R^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n + Z_n' + Z_n'' + Z_n''') \quad (24)$$

である。

前章の式 (12) の δL の第 2 項の線積分であきらかにしたように式 (22) の L は境界周上の変位とそれに対応する力あるいはモーメントとの積の和である。

5. 軸対称振動

振動が円筒殻の中心軸に対称な場合、⁽⁶⁾ 変位は θ に無関係であるから、そのラグランジュアンは式 (11) において θ に関する微分量がすべて消失し

$$\begin{aligned} -L = & \frac{D}{2R^2} \int_{-\mu}^{\mu} \int_0^{2\pi} \left\{ \beta \left\{ u_x^2 + w^2 - 2\sigma u_x w + \frac{1-\sigma}{2} v_x^2 \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ -\alpha^4 (u^2 + v^2 + w^2) + w_{xx}^2 + 2(1-\sigma)v_x^2 \right\} \right\} d\theta dx \\ & + \frac{D}{2R^2} \int_{-\mu}^{\mu} \int_0^{2\pi} \left[w^2 + \frac{1-\sigma}{2} v_x^2 + 2u_x w_{xx} - (1-\sigma)v_x^2 \right] d\theta dx \end{aligned}$$

となるが、式 (12) にならい変形すると次式になる。

$$\begin{aligned} -L = & \frac{\pi D}{R^2} \int_{\mu}^{\mu} \left[\left\{ \beta(\sigma w_x - u_{xx}) - w_{xxx} - \alpha^4 u \right\} u \right. \\ & + \left\{ w_{xxxx} + u_{xxx} - \beta \sigma u_x + (\beta + 1 - \alpha^4) w \right\} w \\ & - \left\{ \frac{1-\sigma}{2} (\beta + 3) v_{xx} + \alpha^4 v \right\} v \left. \right] dx \\ & + \frac{\pi D}{R^2} \left[\left\{ \beta(u_x - \sigma w) + w_{xx} \right\} u - \left\{ w_{xxx} + u_{xx} \right\} w \right. \\ & \left. + \frac{1-\sigma}{2} (\beta + 3) v_x v \right] \Bigg|_{x=-\mu}^{x=\mu} \quad (25) \end{aligned}$$

あきらかに、変位 u, w に関係する部分と、 v のみに関係する部分に分離する。前者を曲げ伸び振動、後者をねじり振動と呼ぶことにする。式 (25) から Euler 方程式は

$$\left. \begin{aligned} \beta(\sigma w_x - u_{xx}) - w_{xxx} - \alpha^4 u &= 0 \\ w_{xxxx} + u_{xxx} - \beta \sigma u_x + (\beta + 1 - \alpha^4) w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1-\sigma}{2}(\beta+3)v_{xx}+\alpha^4v=0 \quad (27)$$

式(26)の曲げ伸び振動の解を k_p, k_p' を任意定数として

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{p=1}^3 (k_p \sinh \lambda_p x + k_p' \cosh \lambda_p x) \\ u &= \sum_{p=1}^3 \phi_p (k_p \cosh \lambda_p x + k_p' \sinh \lambda_p x) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とおくと, λ_p, ϕ_p は次の式から求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma \lambda_p - \phi_p \lambda_p^2 - \lambda_p^3 / \beta - \omega_0^2 \phi_p &= 0 \\ (1 + 1/\beta) - \sigma \phi_p \lambda_p + (\lambda_p^4 + \phi_p \lambda_p^3) / \beta - \omega_0^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

これから ϕ_p を消去して λ_p を定める6次方程式

$$\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \lambda_p^6 + (2\sigma + \omega_0^2) \lambda_p^4 + \left\{\beta + 1 - \beta(\sigma^2 + \omega_0^2)\right\} \lambda_p^2 + (\beta + 1) \omega_0^2 - \beta \omega_0^4 = 0 \quad (30)$$

がもとまる。

境界値を次のようにおく

$$\left. \begin{aligned} 2u|_{x=\pm\mu} &= g \pm g', & 2w|_{x=\pm\mu} &= \pm a + a' \\ 2 \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\pm\mu} &= c \pm c' \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式(28)から, $\xi_p = \lambda_p \mu$ として

$$a = 2 \sum_{p=1}^3 k_p \sinh \xi_p, \quad c = 2 \sum_{p=1}^3 k_p \lambda_p \cosh \xi_p,$$

$$g = 2 \sum_{p=1}^3 k_p \phi_p \cosh \xi_p$$

がもとなり, これから k_p は

$$k_p = A_p a + C_p c + G_p g \quad (32)$$

ここで A_p, C_p, G_p は

$$\Delta = \sum_{(pqr)} (\lambda_p \phi_q - \lambda_q \phi_p) \cosh \xi_p \cosh \xi_q \sinh \xi_r, \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} A_p &= \frac{1}{2\Delta} (\lambda_q \phi_r - \lambda_r \phi_q) \cosh \xi_q \cosh \xi_r, \\ C_p &= \frac{1}{2\Delta} (\phi_q \cosh \xi_q \sinh \xi_r - \phi_r \cosh \xi_r \sinh \xi_q), \\ G_p &= -\frac{1}{2\Delta} (\lambda_q \cosh \xi_q \sinh \xi_r - \lambda_r \cosh \xi_r \sinh \xi_q) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

を示す。式 (34) で p, q, r は $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ と循環してとり、 $\sum_{(pqr)}$ はそれらの和をとることを示す。 Δ で \sinh と \cosh を交換したものを Δ' とし、 A_p, C_p, G_p で Δ を Δ' にかえ、 \sinh と \cosh を交換したものを A_p', C_p', G_p' とすると k_p' は

$$k_p' = A_p' a' + C_p' c' + G_p' g' \quad (35)$$

となる。式(28), (31), (32) を式 (25) の曲げ伸び振動に相当する項に代入して、そのラグランジュアン L_B が次のようにもとまる。

$$-L_B \Big/ \frac{\pi D}{R^2} = Z_0 + Z_0' \quad (36)$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= a^2 \sum_{p=1}^3 A_p (-\lambda_p^3 - \lambda_p^2 \phi_p) \cosh \xi_p \\ &+ c^2 \sum_{p=1}^3 C_p (\lambda_p^2 + \lambda_p \phi_p) \sinh \xi_p \\ &+ g^2 \sum_{p=1}^3 G_p (\beta \lambda_p \phi_p + \lambda_p^2) \sin \xi_p \\ &+ ac \sum_{p=1}^3 \left[A_p (\lambda_p^2 + \lambda_p \phi_p) \sinh \xi_p - C_p (\lambda_p^3 + \lambda_p^2 \phi_p) \cosh \xi_p \right] \\ &+ cg \sum_{p=1}^3 \left[C_p (\beta \lambda_p \phi_p + \lambda_p^2) \sinh \xi_p + G_p (\lambda_p^2 + \lambda_p \phi_p) \sinh \xi_p \right] \\ &+ ga \sum_{p=1}^3 \left[-G_p (\lambda_p^3 + \lambda_p^2 \phi_p) \cosh \xi_p + A_p (\beta \lambda_p \phi_p + \lambda_p^2) \sinh \xi_p \right] \\ &- \frac{1}{2} ga \cdot \beta \sigma \end{aligned} \quad (37)$$

Z_0' は Z_0 で a, c, g, A_p, C_p, G_p のかわりに $a', c', g', A_p', C_p', G_p'$ を用い、 \sinh と \cosh を交換した式である。

ねじり振動の方程式 (27) の解は、境界値を

$$2v \Big|_{x=\pm\mu} = \pm q + q' \quad (38)$$

とおくと

$$v = \frac{q}{2} \frac{\sin \gamma x / \mu}{\sin \gamma} + \frac{q'}{2} \frac{\cos \gamma x / \mu}{\cos \gamma} \quad (39)$$

となる。ただし

$$\frac{\gamma^2}{\mu^2} = \frac{2}{1-\sigma} \omega_0^2 = \frac{2}{1-\sigma} \frac{\alpha^4}{\beta} \quad (40)$$

である。したがってラグランジュアン L_T は式 (25) の相当する項に式(38), (39) を代入して

$$-L_T / \frac{\pi D}{R^2} = \frac{1-\sigma}{2} \frac{(\beta+3)\gamma}{2\mu} (q^2 \cot \gamma - q'^2 \tan \gamma) \quad (41)$$

となる。これで軸対称振動のラグランジュアン $L_B + L_T$ がもとまった。

6. むすび

殻理論の *Flügge* の方程式は *Love* の第1近似理論の方程式にくらべ一般にかなり複雑で、そのとり扱いに一層の困難を伴うのが普通である。円筒殻の振動の *Flügge* の方程式に対応するラグランジュアンを求めたが、第1近似理論に属する高橋⁽⁶⁾ と著者⁽⁶⁾ によるラグランジュアンにくらべ、いち度まとめてしまうと、両者の間であまりちがいがなく、電子計算機による数値計算の手数もほとんどかわらない。円筒殻の種々の境界条件に対する振動数の両者による計算結果を比較してみたが、軸対称振動ではほとんど一致し、節母線のある振動でも当然のことながらその差は1に対する h/R の比の範囲内をでない。

なお、*Reissner*⁽¹⁰⁾, *Gol'denveizer*⁽⁷⁾, *Novozhilov*⁽⁸⁾ などかなりの研究者は、殻の曲げ理論の仮定 *a*) と *b*) は実際問題として不可分であり、*a*) を仮定することは仮定*b*) の範囲内の誤差をみとめることと同じであるから、理論の精度を改善するためには仮定 *a*), *b*) を同時にすてて、別な前提条件からくみたてる必要を主張している。

文 献

- (1) A. E. H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cambridge U.P., (1927)
- (2) W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, Springer, Berlin, (1934)
- (3) K. Forsberg, AIAA Journal, 2-12, 2150, (1965)
- (4) G. B. Warburton, Jour. Mech. Eng. Sci., 7-4, 399, (1965)
- (5) 高橋 機械学会論文集 34-262, 1076 (昭43-6)
- (6) 平野 機械学会論文集 34-266, 1723 (昭43-10)
- (7) A. L. Gol'denveizer, Theory of Elastic Thin Shells, Pergamon, (1961)
- (8) V. V. Novozhilov, Thin Shell Theory, Translated from the second Russian edition by P. G. Lowe and edited by J. R. M. Radok, P. Noordhoff (1964)
- (9) S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill, (1959)
- (10) E. Reissner, American J. Math. 64, 768, (1942)
E. Reissner, Jour. Math. and Phys. 31, 109, (1952)

On a Study of Vibrations of Cylindrical Shells Lagrangian based on the Flügge's Equation

Yoshitaro HIRANO

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering

A study of vibrations of cylindrical shells by means of the Lagrangian-minimizing-method has been made by Professor Shin Takahashi. The Lagrangian employed in his method of analysis has been found within the scope of "Love's first approximation" based on two types of approximations:

a) The straight fibres of a shell which are perpendicular to the middle surface before deformation remain so after deformation and do not change their length; and the normal stresses in the thickness direction of the shell may be neglected in comparison with the other stresses.

b) The ratio of thickness to radii of curvatures is negligibly small compared to unity.

Flügge has obtained stress strain relations by retaining assumption a) but without the use of assumption b).

The present paper deals with the Lagrangian corresponding to the fundamental equations called "Flügge's equation" derived from this system of stress strain relations. First, we find the strain energy of a cylindrical shell and the Lagrangian represented in terms of displacements. Secondly, we get the Euler equations coinciding with the Flügge equations and the boundary conditions by means of calculus of variations. Lastly, we have the solutions of this system of equations specified by the boundary values and the Lagrangian given by introducing them into itself which yields the frequency equations being minimized with respect to unknown boundary values.