

一対辺支持・他対辺に混合境界を有する 長方形板の振動および座屈

岡崎 勝利・平野 芳太郎・国場 幸学

工学部 機械工学科

（昭和51年9月27日受理）

1. まえがき

長方形板の境界が部分的に異なる拘束をもつ場合の振動や座屈についての報告はすでに太田・浜田^{(1),(2)}、倉田・岡村⁽³⁾、L. M. Keer⁽⁴⁾などが行っている。しかし、いずれも一対辺を支持し他の対辺において支持・部分固定したものしか取扱っていない。太田・浜田は固定モーメントを付加したエネルギー法を、倉田・岡村は支持の板の解に固定部の曲げモーメントを付加する方法で、Keerは積分方程式を用いて夫々解析している。最近、入江・山田⁽⁵⁾が全周支持板の解にもとづくグリーン関数を使って内部に拘束をもつ場合まで扱っている。

本報では、一対辺を支持した長方形板で他対辺は自由部分固定、自由部分支持、支持部分固定について扱った。支持部分はばね支持として、固定部分は、ばね支持の他に回転ばねも加えて考え、夫々のばね定数の極限をとれば、部分支持、部分固定を表すことになる。

解法は、部分拘束した境界周上では、支持反力をその周上でフーリエ級数に展開し、みかけ上境界全域に働くと考えた。固定モーメントについても同様に考えて、各種の拘束条件を扱った。

数値例は一対辺支持・他対辺支持部分固定を中心に求めた。座屈についても Keer の結果とよく一致する。

2. 記号

w : 板の曲げ変位, ν : ポアソン比, D : 板の曲げ剛性, h : 板厚, ρ : 比重量,

g : 重力加速度, t : 時間

A_m, B_m, E_m, F_m : 未定定数

∇^2 : 演算子 $\left(= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

長方形板の一辺の長さを \bar{a} とし、他の長さにはすべて π/\bar{a} を乗じた無次元量を用いている。他の量もこれに応じて実際の量（ $\bar{\quad}$ を付してある）と次の様な関係にある。

$$x = \bar{x} \frac{\pi}{a}, \quad y = \bar{y} \frac{\pi}{a}, \quad h = \bar{h} \frac{\pi}{a}, \quad w = \bar{w} \frac{\pi}{a}, \quad D = \bar{D} \frac{\pi}{a},$$

$$T = \bar{T} \frac{\pi}{a}, \quad \rho = \bar{\rho} \left(\frac{\pi}{a} \right)^3, \quad g = \bar{g} \frac{\pi}{a}, \quad b = \bar{b} \left(\frac{\pi}{a} \right)$$

3. 運動方程式と境界条件

図1に示すような、一組の対辺が単純支持されていて、他の対辺は各種の拘束が組合わされた長方形板について考える。単純支持された辺には面内力 T が働いている。その時の運動方程式は

$$\nabla^4 w_0 + \frac{\rho h}{gD} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{T}{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

となる。いま

$$w_0 = w(x, y) \sin \omega t \quad (2)$$

とおき、式(1)に代入すると

$$\nabla^4 w - \frac{\rho h}{gD} \omega^2 w + \frac{T}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

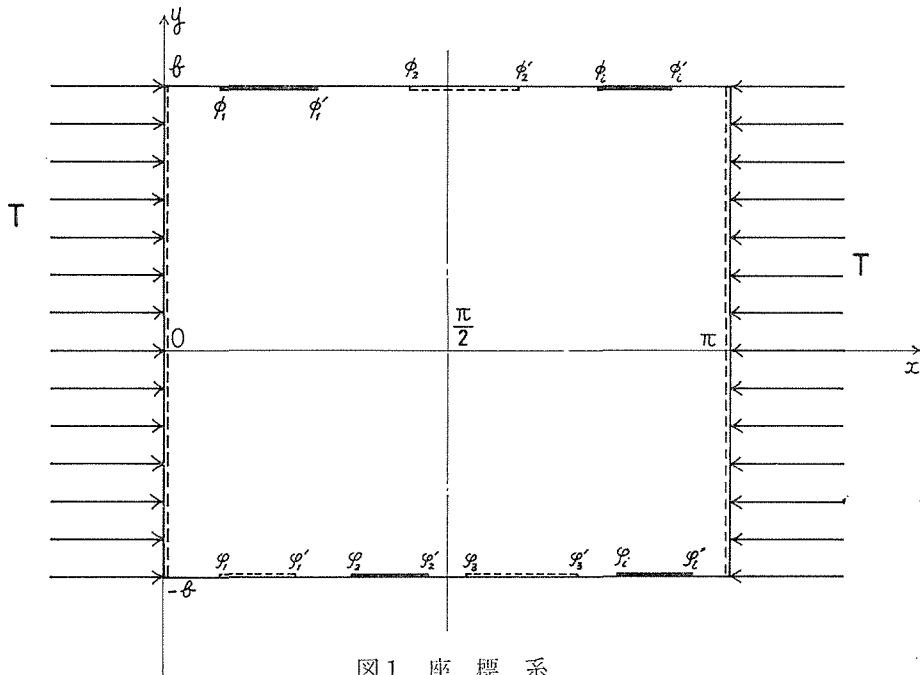


図1 座 標 系

となり、 w は一組の対辺が単純支持だから

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin(mx) \quad (4)$$

とおき式(3)に代入すると次の微分方程式を得る。

$$Y_m''''(y) - 2m^2 Y_m''(y) + \left(m^4 - \frac{\rho h}{gD} \omega^2 - m^2 \frac{T}{D} \right) Y_m(y) = 0 \quad (5)$$

($m=1, 2, 3, \dots$)

式 (5) を解くと

$$Y_m = A_m \sinh(\alpha_m y) + B_m \cosh(\alpha_m y) + E_m \sinh(\beta_m y) + F_m \cosh(\beta_m y) \quad (6)$$

($m=1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} \text{ただし } \alpha_m &= \left[\sqrt{\lambda^2 + m^2 \frac{T}{D}} + m^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \beta_m &= \left[-\sqrt{\lambda^2 + m^2 \frac{T}{D}} + m^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda^2 &= \frac{\rho h}{gD} \omega^2 \end{aligned}$$

である。 $y = \pm b$ における境界値は

$$\left. \begin{aligned} Y_m(b) &= A_m \sinh(\alpha_m b) + B_m \cosh(\alpha_m b) + E_m \sinh(\beta_m b) + F_m \cosh(\beta_m b) \\ Y_m(-b) &= -A_m \sinh(\alpha_m b) + B_m \cosh(\alpha_m b) - E_m \sinh(\beta_m b) + F_m \cosh(\beta_m b) \\ \frac{dY_m}{dy} \Big|_{y=b} &= \alpha_m A_m \cosh(\alpha_m b) + \alpha_m B_m \sinh(\alpha_m b) \\ &\quad + \beta_m E_m \cosh(\beta_m b) + \beta_m F_m \sinh(\beta_m b) \\ \frac{dY_m}{dy} \Big|_{y=-b} &= \alpha_m A_m \cosh(\alpha_m b) - \alpha_m B_m \sinh(\alpha_m b) \\ &\quad + \beta_m E_m \cosh(\beta_m b) - \beta_m F_m \sinh(\beta_m b) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

($m=1, 2, 3, \dots$)

とおける。

3.1 変位の拘束条件

各種の拘束が混合している辺の変位条件について考える (図 2)。

いま、外周 $y = \pm b$ 上の拘束部分で $w(x, \pm b)$ と一致して、他の部分では恒等的にゼロになる変位分布 $W(x)$ を考え、そのフーリエ展開を

$$y=b \text{ で } W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(nx) \quad (8)$$

$$y=-b \text{ で } W^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^* \sin(nx) \quad (9)$$

とする。傾斜 $\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=\pm b}$ についても同様な関数を考え、そのフーリエ展開を

$$y=b \text{ で } \Theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(nx) \quad (10)$$

$$y=-b \text{ で } \Theta^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^* \sin(nx) \quad (11)$$

とする。ここで

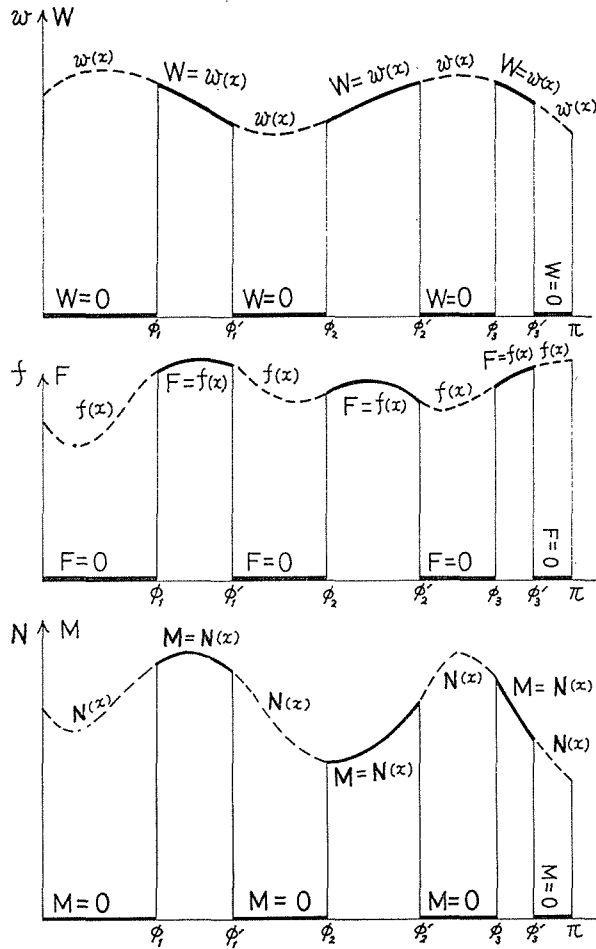


図2 $y=b$ における $W(x)$ と $w(x)$, $F(x)$ と $f(x)$, $M(x)$ と $N(x)$ の関係 ($y=-b$ においても同様である。)

$$\left. \begin{aligned}
 P_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi W(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^K \int_{\phi_i}^{\phi'_i} w(x, b) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^\infty \sum_{i=1}^K \int_{\phi_i}^{\phi'_i} Y_m(b) \sin(mx) \sin(nx) dx = \sum_{m=1}^\infty Y_m(b) I_{mn} \\
 \text{同様にして } P_n^* &= \sum_{m=1}^\infty Y_m(-b) I_{mn}^*, \quad Q_n = \sum_{m=1}^\infty \left. \frac{dY_m}{dy} \right|_{y=b} I_{mn}, \\
 Q_n^* &= \sum_{m=1}^\infty \left. \frac{dY_m}{dy} \right|_{y=-b} I_{mn}^* \\
 I_{mn} &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^K \int_{\phi_i}^{\phi'_i} \sin(mx) \sin(nx) dx \\
 I_{mn}^* &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^K \int_{\phi_i}^{\phi'_i} \sin(mx) \sin(nx) dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。したがって、 $y=b$ の $\phi_i \leq x \leq \phi'_i$ と $y=-b$ の $\psi_i \leq x \leq \psi'_i$ で拘束されている場合の変位の拘束条件式は、 P_n, P_n^*, Q_n, Q_n^* が夫々ゼロであれば良いから次の式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 & y=b \text{ で} \\
 & \text{たわみ} \quad \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \sinh(\alpha_m b) + B_m \cosh(\alpha_m b) + E_m \sinh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad + F_m \cosh(\beta_m b)] I_{mn} = 0 \\
 & \text{傾斜} \quad \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m A_m \cosh(\alpha_m b) + \alpha_m B_m \sinh(\alpha_m b) + \beta_m E_m \cosh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad + \beta_m F_m \sinh(\beta_m b)] I_{mn} = 0 \\
 & y=-b \text{ で} \\
 & \text{たわみ} \quad \sum_{m=1}^{\infty} [-A_m \sinh(\alpha_m b) + B_m \cosh(\alpha_m b) - E_m \sinh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad + F_m \cosh(\beta_m b)] I_{mn}^* = 0 \\
 & \text{傾斜} \quad \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m A_m \cosh(\alpha_m b) - \alpha_m B_m \sinh(\alpha_m b) + \beta_m E_m \cosh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_m F_m \sinh(\beta_m b)] I_{mn}^* = 0 \\
 & \quad \quad \quad (n=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3.2 力学的境界条件

$y=\pm b$ における力学的境界条件を考える。モーメント、合成せん断力は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{モーメント} \\
 & M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 & \text{合成せん断力} \\
 & V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)に式(4), (6)を代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 & y=b \text{ で} \\
 & M_y|_{y=b} = -D \sum_{m=1}^{\infty} [(\alpha_m^2 - m^2 \nu) A_m \sinh(\alpha_m b) \\
 & \quad \quad \quad + (\alpha_m^2 - m^2 \nu) B_m \cosh(\alpha_m b) + (\beta_m^2 - m^2 \nu) E_m \sinh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad + (\beta_m^2 - m^2 \nu) F_m \cosh(\beta_m b)] \sin(mx) \\
 & V_y|_{y=b} = -D \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} A_m \cosh(\alpha_m b) \\
 & \quad \quad \quad + \alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} B_m \sinh(\alpha_m b) + \beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} E_m \cosh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad + \beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} F_m \sinh(\beta_m b)] \sin(mx) \\
 & y=-b \text{ で} \\
 & M_y|_{y=-b} = -D \sum_{m=1}^{\infty} [-(\alpha_m^2 - m^2 \nu) A_m \sinh(\alpha_m b) \\
 & \quad \quad \quad + (\alpha_m^2 - m^2 \nu) B_m \cosh(\alpha_m b) - (\beta_m^2 - m^2 \nu) E_m \sinh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad + (\beta_m^2 - m^2 \nu) F_m \cosh(\beta_m b)] \sin(mx) \\
 & V_y|_{y=-b} = -D \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} A_m \cosh(\alpha_m b) \\
 & \quad \quad \quad - \alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} B_m \sinh(\alpha_m b) + \beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} E_m \cosh(\beta_m b) \\
 & \quad \quad \quad - \beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} F_m \sinh(\beta_m b)] \sin(mx)
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

変位の拘束条件式と同様に支持反力，モーメントについても，拘束部分で支持反力，モーメントに一致して，他の部分では恒等的にゼロである関数を考える。それを夫々 $f(x)$ ， $N(x)$ とし展開式を

$$y=b \text{ で } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin(nx) \quad (16)$$

$$y=-b \text{ で } f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^* \sin(nx) \quad (17)$$

$$y=b \text{ で } N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin(nx) \quad (18)$$

$$y=-b \text{ で } N^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* \sin(nx) \quad (19)$$

支持反力 $F(x)$ と $f(x)$ の関係は

$$\left. \begin{array}{l} \text{支持境界 } y=b, \phi_i \leq x \leq \phi'_i \text{ で } F(x)=f(x) \\ \text{その他の境界で } F(x)=0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

式(20)は $y=-b$ でも同様なことがいえる。この反力が見かけ上境界 $y=\pm b$ の全域に働くことにしてその境界上でフーリエ展開する。

$$y=b \text{ で } F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin(mx) \quad (21)$$

$$y=-b \text{ で } F^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \sin(mx) \quad (22)$$

変位の場合と同様に

$$\left. \begin{aligned} p_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin(mx) dx = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^K \int_{\phi_i}^{\phi'_i} f(x) \sin(mx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\phi_i}^{\phi'_i} \sigma_n \sin(nx) \sin(mx) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n I_{mn} \\ p_m^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^* I_{mn}^* \end{aligned} \right\} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

$y=\pm b$ における固定モーメントについても同様に考えて，固定モーメントを $M(x)$ ， $M^*(x)$ とおきフーリエ展開すると

$$y=b \text{ で } M(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin(mx) \quad (24)$$

$$y=-b \text{ で } M^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m^* \sin(mx) \quad (25)$$

式 (23) と同様にして

$$\left. \begin{aligned} q_m &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n I_{mn} \\ q_m^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* I_{mn}^* \\ (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

以上のことから、 $y=\pm b$ 上における合成せん断力と支持反力、曲げモーメントと固定モーメントとの釣合いより、力学的境界条件として次式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} &y=b \text{ に対し} \\ &\text{支持反力} \\ &\quad -D[\alpha_m\{\alpha_m^2-(2-\nu)m^2\}A_m \cosh(\alpha_m b) + \alpha_m\{\alpha_m^2-(2-\nu)m^2\}B_m \sinh(\alpha_m b) \\ &\quad + \beta_m\{\beta_m^2-(2-\nu)m^2\}E_m \cosh(\beta_m b) + \beta_m\{\beta_m^2-(2-\nu)m^2\}F_m \sinh(\beta_m b)] = p_m \\ &\text{モーメント} \\ &\quad -D[(\alpha_m^2-m^2\nu)A_m \sinh(\alpha_m b) + (\alpha_m^2-m^2\nu)B_m \cosh(\alpha_m b) \\ &\quad + (\beta_m^2-m^2\nu)E_m \sinh(\beta_m b) + (\beta_m^2-m^2\nu)F_m \cosh(\beta_m b)] = q_m \\ &y=-b \text{ に対し} \\ &\text{支持反力} \\ &\quad -D[\alpha_m\{\alpha_m^2-(2-\nu)m^2\}A_m \cosh(\alpha_m b) - \alpha_m\{\alpha_m^2-(2-\nu)m^2\}B_m \sinh(\alpha_m b) \\ &\quad + \beta_m\{\beta_m^2-(2-\nu)m^2\}E_m \cosh(\beta_m b) - \beta_m\{\beta_m^2-(2-\nu)m^2\}F_m \sinh(\beta_m b)] = p_m^* \\ &\text{モーメント} \\ &\quad -D[-(\alpha_m^2-m^2\nu)A_m \sinh(\alpha_m b) + (\alpha_m^2-m^2\nu)B_m \cosh(\alpha_m b) \\ &\quad - (\beta_m^2-m^2\nu)E_m \sinh(\beta_m b) + (\beta_m^2-m^2\nu)F_m \cosh(\beta_m b)] = q_m^* \\ &\quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

3.3 拘束部分が支持ばねと回転ばねの場合

支持ばねと回転ばねは夫々 1 自由度の等価ばねとし、ばね定数を k_i, Γ_i とすると、境界全域 ($y=b$ と $y=-b$) において次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} w(x, b) &= -\frac{1}{k_i} f(x) \\ w(x, -b) &= -\frac{1}{k_i} f^*(x) \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} &= \frac{1}{\Gamma_i} N(x) \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-b} &= \frac{1}{\Gamma_i} N^*(x) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式 (28) に式 (13), (16), (17), (18), (19) を代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} [A_m \sinh(\alpha_m b) + B_m \cosh(\alpha_m b) + E_m \sinh(\beta_m b) \\
 + F_m \cosh(\beta_m b)] I_{mn} \sin(mx) &= -\frac{1}{k_i} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin(nx) \\
 \sum_{n=1}^{\infty} [-A_m \sinh(\alpha_m b) + B_m \cosh(\alpha_m b) - E_m \sinh(\beta_m b) \\
 + F_m \cosh(\beta_m b)] I_{mn}^* \sin(mx) &= -\frac{1}{k_i} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^* \sin(nx) \\
 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_m A_m \cosh(\alpha_m b) + \alpha_m B_m \sinh(\alpha_m b) + \beta_m E_m \cosh(\beta_m b) \\
 + \beta_m F_m \sinh(\beta_m b)] I_{mn} \sin(mx) &= \frac{1}{\Gamma_i} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin(nx) \\
 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_m A_m \cosh(\alpha_m b) - \alpha_m B_m \sinh(\alpha_m b) + \beta_m E_m \cosh(\beta_m b) \\
 - \beta_m F_m \sinh(\beta_m b)] I_{mn}^* \sin(mx) &= \frac{1}{\Gamma_i} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* \sin(nx)
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

4. 振動数方程式

ここでは $y = \pm b$ の対辺を部分支持ばね，部分回転ばねで拘束した場合を考える。
式(27)の右辺に，式(23)，(26)を代入し未定定数 A_m ， B_m ， E_m ， F_m を求める。

$$\Delta_m = \begin{vmatrix}
 \alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \cosh(\alpha_m b) & \alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \sinh(\alpha_m b) & \beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \cosh(\beta_m b) & \beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \sinh(\beta_m b) \\
 \alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \cosh(\alpha_m b) & -\alpha_m \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \sinh(\alpha_m b) & \beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \cosh(\beta_m b) & -\beta_m \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} \times \sinh(\beta_m b) \\
 (\alpha_m^2 - m^2\nu) \times \sinh(\alpha_m b) & (\alpha_m^2 - m^2\nu) \times \cosh(\alpha_m b) & (\beta_m^2 - m^2\nu) \times \sinh(\beta_m b) & (\beta_m^2 - m^2\nu) \times \cosh(\beta_m b) \\
 -(\alpha_m^2 - m^2\nu) \times \sinh(\alpha_m b) & (\alpha_m^2 - m^2\nu) \times \cosh(\alpha_m b) & -(\beta_m^2 - m^2\nu) \times \sinh(\beta_m b) & (\beta_m^2 - m^2\nu) \times \cosh(\beta_m b)
 \end{vmatrix} \quad (30)$$

($m=1, 2, 3, \dots$)

$$\left. \begin{aligned}
 c_{1m} &= \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)(\beta_m^2 - m^2\nu)\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}, \\
 c_{2m} &= \alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu)^2\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}, \\
 c_{3m} &= \alpha_m\beta_m(\beta_m^2 - m^2\nu)\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}, \\
 c_{4m} &= \beta_m^2(\alpha_m^2 - m^2\nu)\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}^2, \\
 c_{5m} &= \alpha_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)(\beta_m^2 - m^2\nu)\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}, \\
 c_{6m} &= \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)^2\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}, \\
 c_{7m} &= \alpha_m\beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}, \\
 c_{8m} &= \alpha_m^2(\beta_m^2 - m^2\nu)\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}^2, \\
 h_{1m} &= \cosh(\alpha_m b) \sinh^2(\beta_m b), & h_{2m} &= \sinh(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b) \sinh(\beta_m b), \\
 h_{3m} &= \sinh(\alpha_m b) \cosh^2(\beta_m b), & h_{4m} &= \cosh(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b) \sinh(\beta_m b), \\
 h_{5m} &= \sinh^2(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b), & h_{6m} &= \cosh(\alpha_m b) \sinh(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b), \\
 h_{7m} &= \cosh^2(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b), & h_{8m} &= \cosh(\alpha_m b) \sinh(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b) \\
 & & & (m=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

とくと、未定定数 A_m , B_m , E_m , F_m は

$$\left. \begin{aligned}
 A_m &= -\frac{1}{D} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{1m} I_{mn} \sigma_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1m} I_{mn}^* \sigma_n^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2m} I_{mn} \mu_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2m} I_{mn}^* \mu_n^* \right] \\
 B_m &= -\frac{1}{D} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_{1m} I_{mn} \sigma_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1m} I_{mn}^* \sigma_n^* + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2m} I_{mn} \mu_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2m} I_{mn}^* \mu_n^* \right] \\
 E_m &= -\frac{1}{D} \left[\sum_{n=1}^{\infty} e_{1m} I_{mn} \sigma_n + \sum_{n=1}^{\infty} e_{1m} I_{mn}^* \sigma_n^* + \sum_{n=1}^{\infty} e_{2m} I_{mn} \mu_n + \sum_{n=1}^{\infty} e_{2m} I_{mn}^* \mu_n^* \right] \\
 F_m &= -\frac{1}{D} \left[\sum_{n=1}^{\infty} g_{1m} I_{mn} \sigma_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_{1m} I_{mn}^* \sigma_n^* + \sum_{n=1}^{\infty} g_{2m} I_{mn} \mu_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_{2m} I_{mn}^* \mu_n^* \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 a_{1m} &= \frac{2(c_{1m} h_{1m} - c_{2m} h_{2m})}{\Delta_m}, & a_{2m} &= \frac{2(c_{3m} h_{3m} - c_{4m} h_{4m})}{\Delta_m} \\
 b_{1m} &= \frac{2(c_{2m} h_{4m} - c_{1m} h_{3m})}{\Delta_m}, & b_{2m} &= \frac{2(c_{3m} h_{1m} - c_{4m} h_{2m})}{\Delta_m} \\
 e_{1m} &= \frac{2(c_{5m} h_{5m} - c_{6m} h_{6m})}{\Delta_m}, & e_{2m} &= \frac{2(c_{7m} h_{7m} - c_{8m} h_{8m})}{\Delta_m} \\
 g_{1m} &= \frac{2(c_{5m} h_{7m} - c_{6m} h_{8m})}{\Delta_m}, & g_{2m} &= \frac{2(c_{7m} h_{5m} - c_{8m} h_{6m})}{\Delta_m} \\
 & & & (m=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\}$$

となる。

ここで

$$\kappa_i = \frac{D}{k_i}, \quad r_i = \frac{D}{\Gamma_i} \quad (33)$$

とくと次の振動数方程式を得る。

$$\begin{array}{cccc}
 \{a_{1m}\sinh(\alpha_m b) & \{a_{1m}\sinh(\alpha_m b) & \{a_{2m}\sinh(\alpha_m b) & \{a_{2m}\sinh(\alpha_m b) \\
 +b_{1m}\cosh(\alpha_m b) & +b_{1m}\cosh(\alpha_m b) & +b_{2m}\cosh(\alpha_m b) & +b_{2m}\cosh(\alpha_m b) \\
 +e_{1m}\sinh(\beta_m b) & +e_{1m}\sinh(\beta_m b) & +e_{2m}\sinh(\beta_m b) & +e_{2m}\sinh(\beta_m b) \\
 +g_{1m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn} & -g_{1m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn}^* & +g_{2m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn} & +g_{2m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn}^* \\
 -\kappa_i\delta_{mn} & & & \\
 \\
 \{-a_{1m}\sinh(\alpha_m b) & \{-a_{1m}\sinh(\alpha_m b) & \{-a_{2m}\sinh(\alpha_m b) & \{-a_{2m}\sinh(\alpha_m b) \\
 +b_{1m}\cosh(\alpha_m b) & +b_{1m}\cosh(\alpha_m b) & +b_{2m}\cosh(\alpha_m b) & +b_{2m}\cosh(\alpha_m b) \\
 -e_{1m}\sinh(\beta_m b) & -e_{1m}\sinh(\beta_m b) & -e_{2m}\sinh(\beta_m b) & -e_{2m}\sinh(\beta_m b) \\
 +g_{1m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn} & -g_{1m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn}^* & +g_{2m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn} & +g_{2m}\cosh(\beta_m b)\}I_{mn}^* \\
 -k_i\delta_{mn} & & & \\
 \\
 \{a_{1m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) & \{a_{1m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) & \{a_{2m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) & \{a_{2m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) \\
 +b_{1m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) & +b_{1m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) & +b_{2m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) & +b_{2m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) \\
 +e_{1m}\beta_m\cosh(\beta_m b) & +e_{1m}\beta_m\cosh(\beta_m b) & +e_{2m}\beta_m\cosh(\beta_m b) & +e_{2m}\beta_m\cosh(\beta_m b) \\
 +g_{1m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn} & -g_{1m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn}^* & +g_{2m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn} & +g_{2m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn}^* \\
 +r_i\delta_{mn} & & & \\
 \\
 \{a_{1m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) & \{a_{1m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) & \{a_{2m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) & \{a_{2m}\alpha_m\cosh(\alpha_m b) \\
 -b_{1m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) & -b_{1m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) & -b_{2m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) & -b_{2m}\alpha_m\sinh(\alpha_m b) \\
 +e_{1m}\beta_m\cosh(\beta_m b) & +e_{1m}\beta_m\cosh(\beta_m b) & +e_{2m}\beta_m\cosh(\beta_m b) & +e_{2m}\beta_m\cosh(\beta_m b) \\
 -g_{1m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn} & +g_{1m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn}^* & -g_{2m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn} & -g_{2m}\beta_m\sinh(\beta_m b)\}I_{mn}^* \\
 +r_i\delta_{mn} & & & \\
 & & & (m, n=1, 2, 3, \dots)
 \end{array} = 0$$

$$\delta_{mn} : \text{クロネツカデルタ} \quad (34)$$

$y=b$, $y=-b$ の辺において拘束部分が $y=0$ (x 軸) と $x=\pi/2$ の軸に関して対称にあるとき、振動形は4種にわけられる。その時の条件は

(i) $y=0$ に対称, $x=\pi/2$ に対称 (以下これを対称-対称と書く。他の例も同様)

$$y=0 \quad \text{に対称} \dots\dots\dots Y_m(y)=Y_m(-y)$$

$$x=\pi/2 \quad \text{に対称} \dots\dots\dots m : \text{奇数}$$

(ii) 対称-反対称

$$Y_m(y)=Y_m(-y), \quad m : \text{偶数}$$

(iii) 反対称-対称

$$Y_m(y)=-Y_m(-y), \quad m : \text{奇数}$$

(iv) 反対称-反対称

$$Y_m(y)=-Y_m(-y), \quad m : \text{偶数}$$

4.1 一対辺支持・他対辺自由部分固定

以下ではこの例を「自由部分固定」と呼ぶことにする。式 (34) は $\kappa_i, r_i \rightarrow 0$ にすると

$y = \pm b$ で「自由部分固定」した方程式になる。その例について振動形をわけて考える。

(I) 対称－対称

$$\begin{aligned} A_m = E_m = 0, \quad m = 1, 3, 5, \\ \Delta_m = \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}\cosh(\alpha_mb)\sinh(\beta_mb) \\ - \alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu)\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}\sinh(\alpha_mb)\cosh(\beta_mb) \end{aligned} \quad (35)$$

となり，振動数方程式は

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\Delta_m} [\beta_m\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}\cosh(\alpha_mb) & \frac{1}{\Delta_m} (\alpha_m^2 - \beta_m^2)\cosh(\alpha_mb) \\ \times \sinh(\beta_mb) - \alpha_m\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} & \times \cosh(\beta_mb)I_{mn} \\ \times \sinh(\alpha_mb)\cosh(\beta_mb)]I_{mn} & \\ \frac{1}{\Delta_m} (\alpha_m^2 - \beta_m^2)\sinh(\alpha_mb)\sinh(\beta_mb)I_{mn} & \frac{1}{\Delta_m} [\beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)\cosh(\alpha_mb) \\ \times \sinh(\beta_mb) - \alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu) & \\ \times \sinh(\alpha_mb)\cosh(\beta_mb)]I_{mn} & \end{array} \right| = 0 \\ & (m, n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (36)$$

対称－反対称は式(36)において m, n を偶数のみとったものである。

(II) 反対称－反対称

$$\begin{aligned} B_m = D_m = 0, \quad m = 2, 4, 6, \dots \\ \Delta_m = \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}\sinh(\alpha_mb)\cosh(\beta_mb) \\ - \alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu)\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}\cosh(\alpha_mb)\sinh(\beta_mb) \end{aligned} \quad (37)$$

となり，振動数方程式は

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\Delta_m} [\beta_m\{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}\sinh(\alpha_mb) & \frac{1}{\Delta_m} (\alpha_m^2 - \beta_m^2)\sinh(\alpha_mb) \\ \times \cosh(\beta_mb) - \alpha_m\{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} & \times \sinh(\beta_mb)I_{mn} \\ \times \cosh(\alpha_mb)\sinh(\beta_mb)]I_{mn} & \\ \frac{1}{\Delta_m} \alpha_m\beta_m(\beta_m^2 - \alpha_m^2)\cosh(\alpha_mb) & \frac{1}{\Delta_m} [\beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu)\sinh(\alpha_mb) \\ \times \cosh(\beta_mb)I_{mn} & \times \cosh(\beta_mb) - \alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu) \\ \times \cosh(\alpha_mb)\sinh(\beta_mb)]I_{mn} & \end{array} \right| = 0 \\ & (m, n = 2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \quad (38)$$

反対称－対称は式(38)において m, n を奇数のみとったものである。

4.2 一对辺支持・他对辺自由部分ばね支持

いま部分支持の拘束部が支持ばねとすると、 $\kappa_i \rightarrow 0$ にすることによって部分支持と考えられる。

モーメントがゼロであるから

$$\left. \begin{aligned} E_m &= -\frac{(\alpha_m^2 - m^2\nu) \sinh(\alpha_m b)}{(\beta_m^2 - m^2\nu) \sinh(\beta_m b)} A_m \\ F_m &= -\frac{(\alpha_m^2 - m^2\nu) \cosh(\alpha_m b)}{(\beta_m^2 - m^2\nu) \cosh(\beta_m b)} B_m \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$(m=1, 2, 3, \dots)$$

支持反力の釣合いから、 A_m, B_m を求める。

$$\Delta_{(fs)m} = \frac{-2}{(\beta_m^2 - m^2\nu)^2 \sinh(\beta_m b) \cosh(\beta_m b)}$$

$$\begin{aligned} &\times [\alpha_m^2 (\beta_m^2 - m^2\nu)^2 \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\}^2 \sinh(\alpha_m b) \cosh(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b) \cosh(\beta_m b) \\ &- 2\alpha_m \beta_m (\alpha_m^2 - m^2\nu) (\beta_m^2 - m^2\nu) \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} \\ &\times \sinh^2(\alpha_m b) \cosh^2(\alpha_m b) \sinh^2(\beta_m b) \cosh^2(\beta_m b) \\ &+ \beta_m^2 (\alpha_m^2 - m^2\nu)^2 \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\}^2 \sinh(\alpha_m b) \cosh(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b) \cosh(\beta_m b)] \end{aligned}$$

$$(m=1, 2, 3, \dots) \quad (40)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{1}{D \Delta_{(fs)m} (\beta_m^2 - m^2\nu) \cosh(\beta_m b)} \\ &\times [\alpha_m (\beta_m^2 - m^2\nu) \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \sinh(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b) \\ &- \beta_m (\alpha_m^2 - m^2\nu) \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} \cosh(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b)] \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n I_{mn} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^* I_{mn}^* \right) \\ B_m &= \frac{1}{D \Delta_{(fs)m} (\beta_m^2 - m^2\nu) \sinh(\beta_m b)} \\ &\times [\alpha_m (\beta_m^2 - m^2\nu) \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \cosh(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b) \\ &- \beta_m (\alpha_m^2 - m^2\nu) \{\beta_m^2 - (2-\nu)m^2\} \sinh(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b)] \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n I_{mn} - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^* I_{mn}^* \right) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$(m=1, 2, 3, \dots)$$

式 (29) の上の二式に、式 (39)，式 (41) を代入すると次の振動数方程式が求まる。

$$\left. \begin{array}{ll}
 \frac{1}{\Delta_{(fs)m}(\beta_m^2 - m^2\nu)^2} [\alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu) \\
 \times \{\alpha_m^2 - (2-\nu)m^2\} \{ \sinh^2(\alpha_m b) + \cosh^2(\alpha_m b) \} \\
 - \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu) \{ \beta_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \\
 \times \{ \tanh(\beta_m b) + \coth(\beta_m b) \} \sinh(\alpha_m b) \cosh(\alpha_m b)] I_{mn} \\
 + \kappa_i \delta_{mn} \\
 \\
 \frac{1}{\Delta_{(fs)m}(\beta_m^2 - m^2\nu)^2} [-\alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu) \\
 \times \{ \alpha_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \{ \sinh^2(\alpha_m b) - \cosh^2(\alpha_m b) \} \\
 + \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu) \{ \beta_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \\
 \times \{ \tanh(\beta_m b) - \coth(\beta_m b) \} \sinh(\alpha_m b) \cosh(\alpha_m b)] I_{mn}^* \\
 + \kappa_i \delta_{mn}
 \end{array} \right\} = 0$$

(42)

\$\delta_{mn}\$: クロネツカデルタ, \$(m, n=1, 2, 3, \dots)\$

ここで, $\kappa_i \rightarrow 0$ とすると一対辺支持・他対辺自由部分支持 (以下これを「自由部分支持」と呼ぶ) の方程式となる。部分拘束が $y=0$ の軸と $x=\pi/2$ の軸に対称な場合には次のように分けられる。

(I) 対称—対称

$$A_m = E_m = 0, \quad m=1, 3, 5, \dots$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{(fs)m} = & \frac{1}{(\beta_m^2 - m^2\nu) \cosh(\beta_m b)} \\
 & \times [\alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu) \{ \alpha_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \sinh(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b) \\
 & - \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu) \{ \beta_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \cosh(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b)] \\
 & (m=1, 3, 5, \dots) \quad (43)
 \end{aligned}$$

となり, 振動を決定する方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{(\beta_m^2 - \alpha_m^2) \cosh(\alpha_m b)}{\Delta_{(fs)m}(\beta_m^2 - m^2\nu)^2} \\
 \times [\alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu) \{ \alpha_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \cosh(\alpha_m b) \\
 - \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu) \{ \beta_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \sinh(\alpha_m b) \coth(\beta_m b)] I_{mn} = 0 \\
 (n=1, 3, 5, \dots) \quad (44)
 \end{aligned}$$

対称—反対称は式(44)において m, n を偶数のみとったものである。

(II) 反対称—反対称

$$B_m = F_m = 0, \quad m=2, 4, 6, \dots$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{(fs)m} = & \frac{1}{(\beta_m^2 - m^2\nu) \sinh(\beta_m b)} \\
 & \times [\alpha_m(\beta_m^2 - m^2\nu) \{ \alpha_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \cosh(\alpha_m b) \sinh(\beta_m b) \\
 & - \beta_m(\alpha_m^2 - m^2\nu) \{ \beta_m^2 - (2-\nu)m^2 \} \sinh(\alpha_m b) \cosh(\beta_m b)] \\
 & (m=2, 4, 6, \dots) \quad (45)
 \end{aligned}$$

となり，振動を決定する方程式は，

$$\frac{1}{D} \sum_{m=2,4}^{\infty} \frac{(\beta_m^2 - \alpha_m^2) \sinh(\alpha_m b)}{\Delta_{fs} m (\beta_m^2 - m^2 \nu)^2} \times [\alpha_m (\beta_m^2 - m^2 \nu) \{\alpha_m^2 - (2 - \nu) m^2\} \sinh(\alpha_m b) - \beta_m (\alpha_m^2 - m^2 \nu) \{\beta_m^2 - (2 - \nu) m^2\} \cosh(\alpha_m b) \tanh(\beta_m b)] I_{mn} = 0 \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad (46)$$

反対称—対称は式(46)において， m, n を奇数のみとったものである。

4.3 一対辺支持・他対辺支持部分回転ばね支持

部分固定のかわりに回転ばねで拘束することを考える。 $r_i \rightarrow 0$ にすることによって拘束部は部分固定となる。

全周支持であるから，外周で変位は常にゼロであるから

$$\left. \begin{aligned} E_m &= -\frac{\sinh(\alpha_m b)}{\sinh(\beta_m b)} A_m \\ F_m &= -\frac{\cosh(\alpha_m b)}{\cosh(\beta_m b)} B_m \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$(m=1, 2, 3, \dots)$

A_m, B_m を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{-1}{2D(\alpha_m^2 - \beta_m^2) \sinh(\alpha_m b)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n I_{mn} - \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* I_{mn}^* \right] \\ B_m &= \frac{-1}{2D(\alpha_m^2 - \beta_m^2) \cosh(\alpha_m b)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n I_{mn} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* I_{mn}^* \right] \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$(m=1, 2, 3, \dots)$

式(28)の下二式に式(47)，(48)を代入すると次の振動数方程式が求まる。

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{D(\alpha_m^2 - \beta_m^2)} [\alpha_m \{ \coth(\alpha_m b) + \tanh(\alpha_m b) \} - \beta_m \{ \coth(\beta_m b) + \tanh(\beta_m b) \}] I_{mn} & \frac{-1}{D(\alpha_m^2 - \beta_m^2)} [\alpha_m \{ \coth(\alpha_m b) - \tanh(\alpha_m b) \} - \beta_m \{ \coth(\beta_m b) - \tanh(\beta_m b) \}] I_{mn}^* \\ -r_i \delta_{mn} & \end{array} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{D(\alpha_m^2 - \beta_m^2)} [\alpha_m \{ \coth(\alpha_m b) - \tanh(\alpha_m b) \} - \beta_m \{ \coth(\beta_m b) - \tanh(\beta_m b) \}] I_{mn} & \frac{-1}{D(\alpha_m^2 - \beta_m^2)} [\alpha_m \{ \coth(\alpha_m b) + \tanh(\alpha_m b) \} + \beta_m \{ \coth(\beta_m b) + \tanh(\beta_m b) \}] I_{mn}^* \\ -r_i \delta_{mn} & \end{array} \right| \quad (m, n=1, 2, 3, \dots) \quad (49)$$

$r_i \rightarrow 0$ の時「支持部分固定」（以下このように呼ぶ）となる。さらに拘束部が $y=0$ ， $x=\frac{\pi}{2}$ の軸に対称な場合は次のように分けられる。

岡崎・平野・国場：一対辺支持・他対辺に混合境界を有する長方形板の振動および座屈

(I) 対称—対称

$$A_m = E_m = 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

振動を決定する方程式は

$$\frac{1}{D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \left(\frac{-1}{\alpha_m^2 - \beta_m^2} \right) [\alpha_m \tanh(\alpha_m b) - \beta_m \tanh(\beta_m b)] I_{mn} = 0 \quad (50)$$

$$(n = 1, 3, 5, \dots)$$

対称—反対称は式(50)において m, n を偶数のみとったものである。

(II) 反対称—対称

$$B_m = F_m = 0, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

振動を決定する方程式は

$$\frac{1}{D} \sum_{m=2,4}^{\infty} \left(\frac{-1}{\alpha_m^2 - \beta_m^2} \right) [\alpha_m \coth(\alpha_m b) - \beta_m \coth(\beta_m b)] I_{mn} = 0 \quad (51)$$

$$(n = 2, 4, 6, \dots)$$

反対称—対称は式(51)において m, n を奇数のみとったものである。

5. 座 屈

図1のように静的圧縮荷重 T が x 軸に平行に働いた場合の板の釣合方程式は

$$\nabla^4 w + \frac{T}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (52)$$

w の解を式(4)と同様に

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin(mx) \quad (53)$$

とおき、式(52)に代入して解くと

$$\left. \begin{aligned} Y_m &= A_m \sinh(\alpha_m y) + B_m \cosh(\alpha_m y) + E_m \sinh(\beta_m y) + F_m \cosh(\beta_m y) \\ \text{ただし } \alpha_m &= [m \sqrt{\frac{T}{D}} + m^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_m = [-m \sqrt{\frac{T}{D}} + m^2]^{\frac{1}{2}} \\ &(m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

となる。前節までの振動を決定する方程式の α_m, β_m が式(54)の様に変換すれば、座屈荷重 T_{cr} を決定する方程式に夫々一致する。

6. 数値計算

数値計算にあたってはポアソン比を 0.3 とした。特に支持部分固定の対称—対称振動を中心に調べた。振動数曲線の座標は、横軸に $x = \pi/2$ を中心として拘束した場合の拘束部の大きさの半分を ϕ_1 として示してある。縦軸は

$$\lambda^2 = \zeta \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right]$$

行列	本 報	Keer	太田・浜田
5 × 5	1.4596	1.460	1.459
7 × 7	1.4600		
10 × 10	1.4602		

表1 支持部分固定（対称—対称）振動固定部が $\phi_1 = \frac{\pi}{3}$ の比較

とした ζ をとってある。これは全周支持長方形板の振動数との比で表わしている。収束を調べるために表1のように Keer⁽³⁾，太田・浜田⁽²⁾の結果との比較を行った。この結果よりすべて数値計算は7×7で行った。

支持部分固定の振動では面内力がない場合 $\phi_1 \rightarrow 0$ で全周支持に $\phi_1 \rightarrow 0.5\pi$ では一対辺支持他対辺固定の面内力のない場合の固有値になるので振動数曲線はその二つの固有値の間で増加する（図3）。

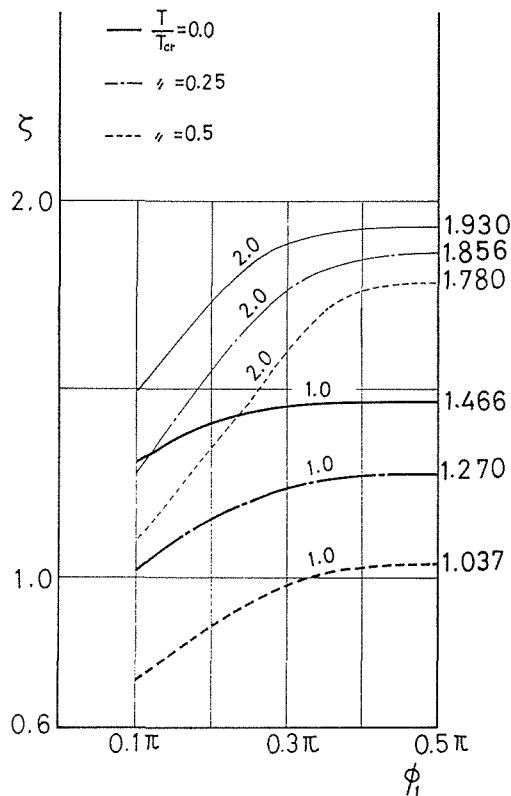


図3 支持部分固定（対称—対称）面内力が加わった振動
（曲線上の数字は $\pi/2b$ の値を示す）

$\pi/2b \backslash M \nearrow \phi_1$		0.1π	0.125π	0.25π	0.28π	0.4π	0.5π
1.0	1	2.607	2.658 (2.659)	2.867 (2.867)	2.896	2.931	2.933 (2.933)
	2	/	/	/	/	2.772	2.773 (2.773)
1.5	1	3.267	3.351 (3.356)	/	/	/	3.806 (3.806)
	2	/	/	/	/	/	2.667 (2.667)
	3	2.477	2.489 (2.489)	2.615 (2.616)	2.663	2.763	2.773
2.0	2	/	/	/	/	/	2.933
	3	2.196	2.203 (2.202)	2.352 (2.351)	2.427	2.621	2.640 (2.640)

表2 支持部分固定座屈 () は Keer の結果, 斜線部は計算値なし

自由部分支持についても同様のことがいえる (図4)。

面内力のある振動は, 座屈荷重を T_{cr} として T/T_{cr} の比を求めて振動数方程式の α_m, β_m に代入して振動数を求めたものである (図3)。

座屈は支持部分固定について計算し Keer⁽⁴⁾ のそれと比較した (表2)。 M は x 軸方向への半波数の数である。

どの例についてもいえることは, 拘束部分が小さくなると方程式の収束が悪く満足できる結果が得られなかった。

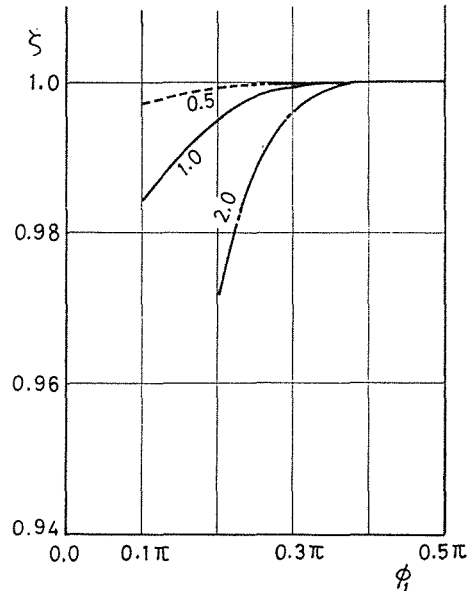


図4 自由部分支持 (対称—対称) の振動

7. あとがき

本報では、一組の対辺が単純支持されていて面内力が加わり、他対辺に混合境界を有する長方形板の振動と座屈について調べた。

解法には拘束部に対する変位と境界における力の釣合いを夫々の境界でフーリエ展開し、みかけ上境界全域に支持反力、モーメントなどが働くと考えて方程式を導いた。

この方法によると一対辺が単純支持されていて、他対辺に各種の混合境界をもつ長方形板の固有値問題が統一的に取扱いが可能であり、既知の方法とくらべても良い結果が得られることがわかった。

最後にあたり、いろいろと貴重なご助言をいただいた山形大学工学部長屋幸助講師に厚く感謝の意を表わします。

本報は昭和49年11月9日、日本機械学会仙台地方講演会で発表したものである。

参 考 文 献

- (1) 太田・浜田, 日本機械学会論文集, 25巻, 155号 (昭34—7), P. 668.
- (2) 太田・浜田ほか, 日本機械学会論文集, 28巻, 194号 (昭37—10), P. 1244.
- (3) Kurata and Okamura, Journal of Engineering Mechanics Division ASCE, vol. 89, (1963), P. 169.
- (4) L. M. Keer and B. Stahl. Trans. ASME, Ser. E, Vol. 39, No. 2 (1972—6), P. 513.
- (5) 入江・山田ほか, 日本機械学会 第53期通常総会講演論文集, No. 760—3, P. 75.

Vibrations and Bucklings of a Rectangular Plate Having Two Opposite Edges Simply Supported and Remainder with Mixed Boundaries

Katsutoshi OKAZAKI, Yoshitaro HIRANO
and Yukinori KOKUBA

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering

This paper deals with flexural vibrations and bucklings of a rectangular plate simply supported on two opposite edges and with mixed boundary conditions on the other.

The mixed constrained conditions are treated by means of the weighted residual method, and the reaction force on the mixed boundary edges may be considered as an apparent external force in solving the basic equation.

Numerical results are compared with the other investigations.

This method can be easily applied to the problems of the vibration and stability with some other mixed boundary conditions of the rectangular plate.