山形大学紀要（工学）第34巻　平成25年2月
Bull. Yamagata Univ.（Eng.）Vol.34 Feb. 2013

種々の予ひずみを受けたアルミニウム管の多軸降伏挙動

武　田　武　信
山形大学大学院理工学研究科機械システム工学分野

Multiaxial Yield Behavior of Aluminum Tube Subjected to Various Prestrains

Takenobu　TAKEDA
Department of Mechanical Systems Engineering, Graduate School of Science and Engineering

（平成 24 年 9 月 4 日受付，平成 24 年 11 月 22 日受理）

Abstract

A subsequent yield function of the sixth degree has been proposed by the author. It is able to include three effects, namely the third deviatoric stress invariant , anisotropy and the Bauschinger effect. Experimental evaluation is made on A1050 aluminum tubes under multiaxial stress states. The tubing used has undergone progressive deformation such as extruding, plug drawing and stretching in the industrial forming process. For this reason, it has orthotropic anisotropy even after full annealing, and the initial yield locus in the tension-torsion stress field lies outside von Mises' yield locus. Reloading tests by means of both combined axial load (tension and compression)-torsion and combined axial load-internal pressure-torsion are carried out on the fully annealed tubes subjected to prestrains in tension, torsion and combined tension-torsion. By determining the subsequent yield loci in various principal stress planes, the change in yield stress with a rotation of the principal stress axes is examined. Consequently, it is shown that anisotropic hardening (expansion, distortion and rotation of the locus) superposed kinematic hardening (translation) can be expressed precisely by the proposed yield function.

Key words: A1050 aluminum , Tensile prestrain, Torsional prestrain, Combined prestrain, Yield locus , Subsequent yield function.

1. 緒　言

金属が塑性変形を受けると，ひずみ履歴の影響により加工硬化，バウシンガ効果および異方性の発達などの物理的現象が起こる．これらの現象と関連して後続降伏曲面に関する研究は種々の材料について従来からなされており、詳しいレビュー[1]も発表されている．しかしながら，円管を用いた実験のほとんどが引張り－内圧および引張り－ねじりの組合せ負荷によるものであり，軸荷重(引張り，圧縮)－内圧－ねじりの組合せ負荷による実験は極めて少ない[2), 3)]．多軸応力下の後続降伏挙動には上述の物理的現象が複合して現れるので，より精密に塑性法則の検証を行う場合には負荷の種類を多く組合せて実験を行う必要がある．

本研究では，先ず供試材料の初期異方性を定量的に検証した上で，次の点に着目して後続降伏挙動を実験的かつ解析的に調べた．すなわち，引張応力とせん断応力の平面上で種々の方向に予ひずみを加えた後，予ひずみ時の負荷方向を含む主応力平面とその方向を含まない主応力平面の後続降伏曲面を決定することによって予ひずみによる降伏曲面の膨張，ゆがみ，回転および移動の違いを調べた．さらに，初期異方性と後続異方性の発現量の比較検討を行った．

2. 6 次後続降伏関数

最初に，偏差応力の第 3 不変量，バウシンガ効果および異方性の影響を考慮に入れた後続降伏関数(後述の式(4))を導出するに至った経緯について述べる．著者[4), 5)]は先に次の降伏関数を提案した．

$$f = J_2^3 - CJ_3^2 - B\,\sigma'_{ij}\varepsilon^p_{ij} \tag{1}$$

ここで, $J_2=(1/2)\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$, $J_3=(1/3)\sigma'_{ij}\sigma'_{jk}\sigma'_{ki}$ はそれぞれ 偏差応力の第２，第３不変量，σ'_{ij} は偏差応力テンソル，ε^p_{ij} はひずみテンソルの塑性成分，C は J_3 の影響を表すパラメータ, B はバウシンガパラメータである．式(1) は Edelman ら[6)]が種々の形の降伏関数を提案している中で，その一つの

式すなわち，

$$f = F(J_2\,,\,J_3) - B\,\sigma'_{ij}\varepsilon^p_{ij} \qquad (2)$$

に着目し，$F(J_2\,,\,J_3)$ にDrucker[7]の降伏関数を適用したものである．式(1)によって，完全焼なました軟鋼に引張りあるいはねじりの予ひずみを加えた後，軸荷重とねじりの組合せで比例再負荷した場合に得られる降伏曲面の形状を良く近似することができた[4]．しかしながら，off-axis 引張り負荷下[8),9)](軸荷重－内圧－ねじりの組合せによって主応力比σ_2/σ_1を 0 に保ちながら，応力主軸を回転させる試験)の降伏挙動を表そうとするとパラメータ数が少ないため精度が劣る．さらに，初期異方性材に対して適用できないという欠点があった．そこで，異方性降伏関数として次式を提案した[3]．

$$f = J_2^2(\,J_2 + A_{ijkl}\,\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}\,) - CJ_3^2 \qquad (3)$$

ここで，A_{ijkl} は 4 階の異方性係数テンソルである．大橋ら[10]は Prager[11]の降伏関数と Hill[12]の 2 次降伏関数を組合せた相当応力によって偏差ベクトル空間の修正を行っている．式(3)は大橋らの修正偏差応力の概念を異方性降伏関数として採用したものである．ただし，降伏関数の組合せとして Drucker の降伏関数と Hill の 2 次降伏関数を用いている．式(3)によって，初期に軸対称異方性や直交異方性を有する材料の多軸降伏挙動を精度良く表すことができた[3),13)]．

本研究で適用する 6 次後続降伏関数は, 次式のように式(1)の第 1 項と第 2 項を式(3)で置き換えたものである．

$$f = J_2^2\left(J_2 + A_{ijkl}\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}\right) - B\sigma'_{ij}\varepsilon^p_{ij} - C\,J_3^2 \qquad (4)$$

もし材料が初期等方性である場合には， 4 階の異方性係数テンソル A_{ijkl} を吉村ら[14] および Rees[15] が提案したように，ひずみ履歴の関数として

$$A_{ijkl} = (A/4)(\varepsilon^p_{ik}\varepsilon^p_{jl} + \varepsilon^p_{il}\varepsilon^p_{jk}) \qquad (5)$$

とおく．そして異方性パラメータ A が予ひずみ量が変化しても一定値をとれば，上の関数の導入が妥当であると考える．この件に関しては，完全焼なました軟鋼 S20C を供試材料としてすでに実験的検証が行われている[9]．初期異方性材の場合には A_{ijkl} を A に縮約することができないので A_{ijkl} を展開して適用することになる．この件に関しても初期軸対称異方性を有するアルミニウム合金 A2024BE-T6 を用いて実験的検証が行われている[16]．本研究では初期直交異方性を有するアルミニウム A1050TD に適用を試みた.

式(4)について，引張り－ねじり組合せ予ひずみ後の降伏条件を平面応力成分で表すと次のようになる．ただし，異方性の主軸方向は予ひずみ後も変わらないと仮定する.

$$\begin{aligned} f = &\{(1/3)(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2\}^2\,\{(1/3)(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y \\ &+ \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2 - (A_{xxyy} + A_{zzxx})\sigma_x^2 + 2A_{xxyy}\sigma_x\sigma_y - (A_{xxyy} + A_{yyzz})\,\sigma_y^2 \\ &+ 4A_{xyxy}\tau_{xy}^2\} - B\{\varepsilon_0(\sigma_x + \xi\sigma_y) + \gamma_0\tau_{xy}\} - C\{(1/27)\,(2\sigma_x - \\ &\sigma_y)(\sigma_x - 2\sigma_y)\,(\sigma_x + \sigma_y) + (1/3)\,(\sigma_x + \sigma_y)\,\tau_{xy}^2\}^2 = (\sigma_f^{\,6}/27) \\ &\times\{1 - 4C/27 - 3(A_{xxyy} + A_{zzxx})\} - B\varepsilon_0\sigma_f \end{aligned} \qquad (6)$$

ここで，σ_x，σ_y および τ_{xy} はそれぞれ軸応力，円周応力およびせん断応力，ε_0 は引張予ひずみ，γ_0 はねじり予ひずみ(工学的せん断ひずみ), ξ は円周方向の塑性ひずみと軸方向の塑性ひずみの比，σ_f は引張降伏応力である.

塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p_{ij}$ は降伏関数を塑性ポテンシャルとして関連流動則から得られるものとする.

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon^p_{ij} &= (\partial f/\partial\sigma_{ij})\,d\lambda \\ d\lambda &= (3/2)^{1/2}\,(d\bar{\varepsilon}^p/|\mathrm{grad}\,f\,|) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ここで, $d\lambda$ は正のスカラ関数, $d\bar{\varepsilon}^p$ は相当塑性ずみ増分である.

3. 実験方法

3・1 試験片および実験装置

供試材料は直径 40mm, 肉厚 2mm のアルミニウム管 A1050TDH14 である．この管材はビレットから熱間押出し，冷間玉引き，引張矯正などのプロセスを経て所定の寸法に成形されたものである．実験はこの管材を 110mm の長さに切断後, 炉中で 550℃1 時間の完全焼なましを行ってから実施した.

実験装置[17]は油圧駆動型の多軸応力試験機で，円管試験片に軸荷重（引張り，圧縮)，内圧およびねじりを同時に加え得るものである．Fig.1 にチャック装置を示す．試験片の両端を心出し軸のボス部

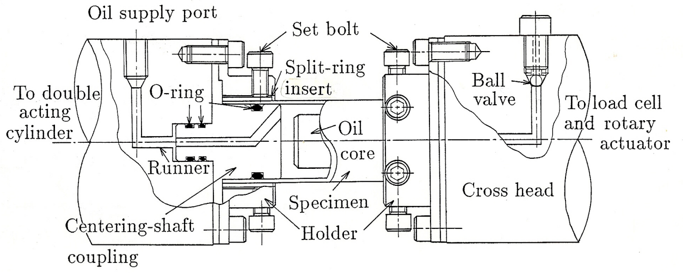


Fig.1 Chucking device of multiaxial stress testing machine.

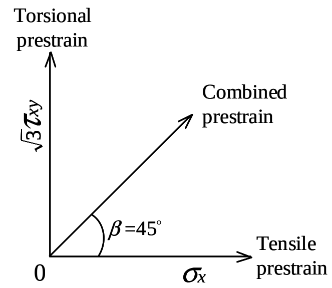


Fig.3 Prestress directions in $\sigma_x - \sqrt{3}\tau_{xy}$ plane.

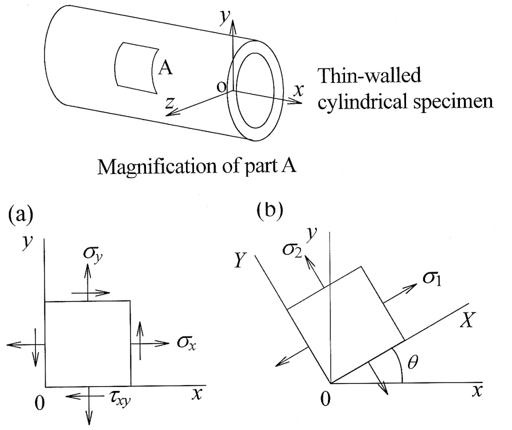


Fig.2 Coordinate system of stress components and stress state under combined loadings: (a) normal and shear stresses in the original coordinate system and (b) principal stresses in the rotated coordinate system, where shear stresses are zero.

と割りリングインサートの間に挿入し，割りリングインサートをそれぞれ 6 本の押えボルトで締めつける．その面圧によって試験片を固定した．負荷の検出は軸荷重とトルクをロードセルで，内圧を圧力変換器で行った．試験片に生じるひずみは試験片表面の軸方向，円周方向および試験片軸に 45° 傾けて3軸ロゼットゲージを貼って測定した．

3・2 予ひずみおよび予ひずみ後の負荷経路

Fig.2(a), (b)に応力成分の座標系と組合せ負荷下の応力状態を示す．一般に，薄肉円管に軸荷重－内圧－ねじりの組合せ負荷を加えると x-y 座標系では応力成分σ_x, σ_y およびτ_{xy} が作用する．そして z 軸のまわりに回転するとせん断応力が 0 となる主面が存在する．このときの主応力(σ_1, σ_2)の大きさとその方向θは次式で与えられる．

$$\sigma_1, \sigma_2 = (1/2)\{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\} \quad (8)$$

$$\tan 2\theta = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \quad (9)$$

ここで, θは x 軸から反時計まわりの傾角とする．

予ひずみは Fig.3 に示すように引張り，引張り－ねじり組合せおよびねじりの 3 種類とした．ただし，引張り－ねじり組合せ予ひずみの場合には $\tan\beta = \sqrt{3}\tau_{xy}/\sigma_x = 1$ の比例負荷で予ひずみを加えた(以下，組合せ予ひずみと呼ぶことにする)．予負荷時の主応力方向は順にθ= 0°，24.6°および 45°となる．予ひずみ量は各予ひずみとも除荷状態おいて相当塑性ひずみが$\rho_0 = \int d\bar{\varepsilon}^p$ =3.0%となるように調整した．各予ひずみを加えたときの予応力は相当応力で表すとそれぞれ$\bar{\sigma}_0$=σ_0=55.1Mpa，$\bar{\sigma}_0 = \sqrt{\sigma_0^2 + 3\tau_0^2}$ =58.4Mpa および$\bar{\sigma}_0 = \sqrt{3}\tau_0$ =63.4Mpa であった．供試材料は第 4 章 4.1(2)項で詳述するように，相対的にせん断強度が高い材料である．

各予ひずみを受けた試験片の後続降伏曲面を決定するための再負荷経路は大別して次の 3 種類の比例負荷とした．

(1) $\sigma_x - \sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面上で$\sqrt{3}\tau_{xy}/\sigma_x$ = 一定の負荷経路.

(2) 予負荷方向を含む$\sigma_1 - \sigma_2$ 平面上でσ_2/σ_1 = 一定の負荷経路.

(3) 予負荷方向を含まない$\sigma_1 - \sigma_2$平面上でσ_2/σ_1 = 一定の負荷経路.

ここで，(3)については引張予ひずみの場合 θ= 45°，組合せ予ひずみとねじり予ひずみの場合θ= 0°を選び, Fig.4 に示すように $\tan\alpha = \sigma_2/\sigma_1$= 一定で再負荷を行った.

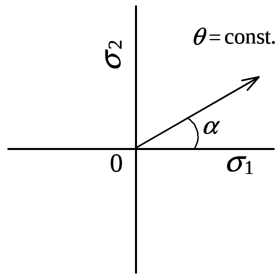


Fig.4　Reloading direction in $\sigma_1-\sigma_2$ plane.

ところで，(2)と(3)の実験を行う場合，使用した多軸応力試験機には外圧装置が付設されていないので，実験可能な領域が限定される．すなわち，$\sigma_y \geqq 0$ の領域は式(8)および式(9)より

$$(1+\sec 2\theta)\sigma_2 -(1-\sec 2\theta)\sigma_1 \geqq 0 \qquad (10)$$

となり，第 4 章 4.2 節に示すように実験から決定できる降伏曲面は曲面の半分の領域となる. 一方, (1)に関しては曲面の全領域で実験可能であるが, 後続降伏曲面が明らかに対称性を持つ場合には半分の領域でのみ実験を行った.

4. 実験結果，解析結果および考察

4・1 初期降伏挙動[13)]

(1) 引張り－内圧組合せ負荷　引張り－内圧組合せ負荷は応力主軸が回転しない場合の降伏挙動を調べるための試験法である．$\sigma_x-\sigma_y$ 平面はθ= 0° のときの主応力平面と同じであり，応力主軸は x 軸と y 軸方向に固定されている(Fig.2 参照).

完全焼なましたアルミニウム管の単軸引張応力－塑性ひずみ曲線($\sigma_f-\varepsilon^p$曲線)は Ludwik 則で表すことができた.

$$\sigma_f = \sigma_s + k(\varepsilon^p)^n \qquad (11)$$

ここで，σ_s = 9.3Mpa, k =501.3Mpa および n =0.68 である．そして各組合せ負荷経路における相当応力－相当塑性ひずみ曲線について流動応力比 $\bar{\sigma}/\sigma_f$ を求めたところ，相当塑性ひずみρ ≒3.0 % の実験範囲まではオフセットひずみに依存せず, ほとんど一定であった．よって，等ひずみ曲面は相似となるので, Fig.5 に示すようにσ_x/σ_f とσ_y/σ_f の無次元化座標で表した曲面を降伏曲面とみなすことができる．各実験点を見ると，σ_y/σ_x= 1/2 の負荷経路上では Tresca と Mises の曲面の中間で

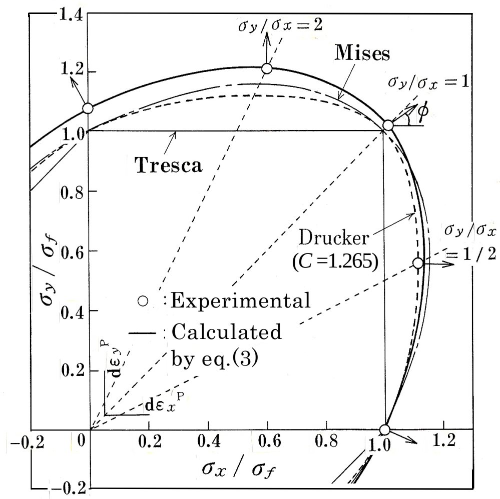


Fig.5　Initial yield locus expressed with the dimensionless coordinate system of σ_x/σ_f and σ_y/σ_f [σ_f: Tensile flow stress given in equation (11)].

Mises の曲面に近い側に位置し，σ_y/σ_x= 1, 2 および∞の負荷経路上では Mises の曲面の外側にある. σ_y/σ_x= 1 の負荷は静水圧成分を無視すると z 軸方向の圧縮と等価な応力状態となるので，各軸方向の強度を比較すると x, z および y 軸方向の順に強度が高いことが分かる．すなわち，本材料は直交異方性を示す（主応力方向と主ひずみ増分方向の関係については文献 (13)参照）.

次に, σ_y/σ_x= 0 と 1/2 の負荷経路から得られた実験値を比較することによって，初期異方性と J_3 の影響の分離を試みた[10),18)]. σ_y/σ_x= 0 は J_3 の影響のある負荷経路($J_3 \neq 0$)であり，σ_y/σ_x= 1/2 はその影響がない負荷経路(J_3 =0)である[19)]．これら二つの負荷経路間のスペースは比較的狭いので異方性の発現に違いを生じないと仮定すると，σ_y/σ_x= 1/2 の負荷経路上の無次元化降伏応力は J_3 の影響のみを発現したことになる. そこで, この無次元化降伏応力を Drucker[7)]の降伏条件式に代入すると C =1.265 が得られた．この値を本材料が等方性に帰着した場合の材料固有の定数とする．Fig.5 に C =1.265 のときの Drucker の降伏曲面を破線で示した．一方，実線は異方性降伏条件式(3)の計算結果である．この式の適用に際してパラメータを次のようにして決定した．式(3)を平面応力で表した場合 5 個のパラメータを含んでいるが (式(6)において$\varepsilon_0=\gamma_0$=0 とおいた場合と同じ式となる), 独立な

Table 1 Parameter values in equation (3) used for numerical calculation.

C	A_{xxyy}	A_{yyzz}	A_{zzxx}	A_{xyxy}
1.265	−0.547	−0.389	−1.034	0.347

パラメータ数は4個である．そこで，パラメータCを従属パラメータにとり, Druckerの降伏条件式のC値と同じようにC=1.265と仮定した．4個の異方性パラメータ(独立パラメータ) A_{ijkl} は実験から得られた無次元化降伏応力を特性値として用いて決定した．ただし，特性値の選び方と異方性パラメータの導出法については文献(20)で詳述しているのでここでは省略する. Table 1に式(3)のパラメータ値を示す．結局，Fig.5において破線は材料固有の初期降伏曲面であり，破線と実線の間の領域が初期異方性の発現によるものとみなされる.

Fig.5の降伏曲面上に示した矢印は$\phi=\tan^{-1}(d\varepsilon_y^p/d\varepsilon_x^p)$に対応する塑性ひずみ増分ベクトルの方向を表している．このベクトルの方向は式(3)の降伏曲面に対する垂直性を満たし，式(3)が塑性ポテンシャルの役割を果たすことを示す.

(2) 引張り－ねじり組合せ負荷　引張り－ねじり組合せ負荷の場合には，せん断応力と軸応力の比に依存して応力主軸が回転し，主応力比も変化する.

Fig.6に$\sigma_x-\sqrt{3}\tau_{xy}$平面における降伏曲面を示す. 実験点はMisesの曲面の外側にあり，相対的にせん断強度が高い材料である．これは冷間玉引き加工を受けたときに大きな付加的せん断ひずみが加わり，その影響が完全焼なましを行っても除去されなかったためと思われる[18),21)]．降伏曲面上に示した矢印は$\phi=\tan^{-1}\{(d\gamma_{xy}^p/\sqrt{3})/d\varepsilon_x^p\}$に対応する塑性ひずみ増分ベクトルの方向を表している.

Fig.7は塑性ひずみ増分比を$M=d\varepsilon_y^p/d\varepsilon_x^p$(ポアソン比に対応)とおき，この$M$と負荷方向$\beta=\tan^{-1}(\sqrt{3}\tau_{xy}/\sigma_x)$の関係を示したものである．$M$値は$\beta$=0°のとき$M$=−0.456，$\beta$=45°のとき$M$=−0.465であり，角度$\beta$が大きくなるとわずかに低下(負の方向に増加)し，−0.5に漸近する.

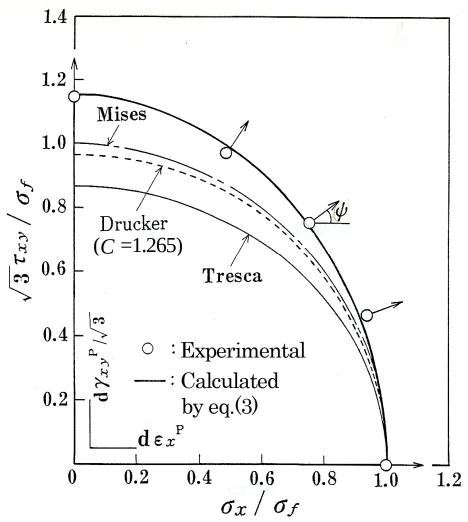


Fig.6 Initial yield locus expressed with the dimensionless coordinate system of σ_x/σ_f and $\sqrt{3}\,\tau_{xy}/\sigma_f$ [σ_f: Tensile flow stress given in equation (11)].

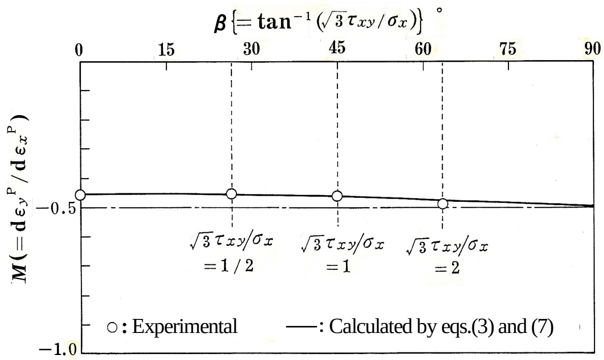


Fig.7 Relation between plastic strain increment ratio M and loading direction β, obtained from loading tests of $\sqrt{3}\,\tau_{xy}/\sigma_x$=const.

(3) off-axis引張り負荷およびoff-axisねじり負荷　off-axis引張試験とは軸荷重－内圧－ねじり組合せ負荷を利用して，円管を各角度でらせん状に引っ張る多軸応力試験のことである[8),9)]．すなわち，応力比を$\sigma_x:\sigma_y:\tau_{xy}=1:\tan^2\theta:\tan\theta$に保持して薄肉円管に負荷すると, 第2章で前述したように主応力は$\sigma_1=\sigma_\theta=\sigma_x(1+\tan^2\theta)$, $\sigma_2=\sigma_3=0$となり，角度θを変化させた一連の実験から面内異方性を精密かつ定量的に検出することができる．主応力方向θに対する流動応力の変化(Fig.8(d)の initial tension参照)において，流動応力比$\sigma_\theta/\sigma_f=1$からの変化量が応力尺度の異方性となる．$\sigma_\theta/\sigma_f-\theta$

Table 2　Parameter values in equation (6) used for numerical calculation.

Prestrain	C	A_{xxyy}	A_{yyzz}	A_{zzxx}	A_{xyxy}	$B\varepsilon_0$ (MPa^5)	$B\gamma_0$ (MPa^5)	ξ
Tension	1.265	−0.743	−1.924	−0.911	0.554	3.551×10^7	0	−0.456
Combined tension and torsion	1.265	−0.581	−0.776	−0.108	0.273	2.044×10^7	3.522×10^7	−0.465
Torsion	1.265	−0.463	−0.118	−0.141	0.021	0	3.962×10^7	Indefinite

曲線は上に凸となり，式(3)の計算結果から最大異方性の発現量としてθ=53°のとき$(\sigma_\theta/\sigma_f-1)_{max}\times100$ =12.2% の値が得られた.

一方, off-axis ねじり [8),22)]$(\sigma_x:\sigma_y:\tau_{xy}=-1:1:\cot2\varphi$ の比例負荷によって 主応力比を$\sigma_2/\sigma_1=-1$ に保ちながら応力主軸を回転させ，異方性を検出する試験法)による予測では, 主せん断応力方向がφ=45°(θ=0°)のとき流動応力比が最も小さく，最大異方性の発現量は$(1-\tau_\varphi/\tau_f)_{max}\times100$ =10.4 %であった(Fig.10(d)の initial torsion 参照). なお，両者の負荷試験の違いは偏差応力の第 3 不変量 J_3 の影響の有無にある．すなわち，off-axis 引張りを J_3 の影響がある($J_3\neq0$) 負荷下での異方性検出試験, 一方 off-axis ねじりを J_3 の影響がない(J_3＝0)負荷下での異方性検出試験として区別することができる [16),23)].

4・2 後続降伏挙動

後続降伏曲面の形状は降伏応力を規定するオフセットひずみの大きさによって変化するが [9),16)], ここでは文献(18)と同様に 0.05%オフセットひずみに対応する耐力を降伏応力と定義した．そして応力平面が異なる場合の形状変化を調べた. なお, 相当応力－相当塑性ひずみ曲線は紙面の都合上省略する.

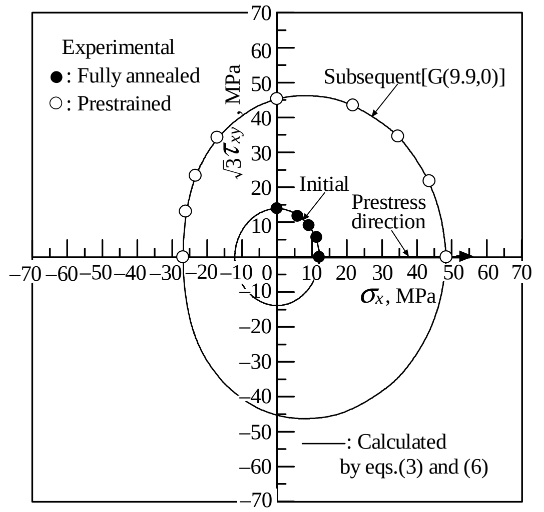
式(6)を主応力平面へ適用するときには応力の逆変換則より

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=(1/2)\{\sigma_1+\sigma_2+(\sigma_1-\sigma_2)\cos2\theta\}\\ \sigma_y&=(1/2)\{\sigma_1+\sigma_2-(\sigma_1-\sigma_2)\cos2\theta\}\\ \tau_{xy}&=(1/2)(\sigma_1-\sigma_2)\sin2\theta\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

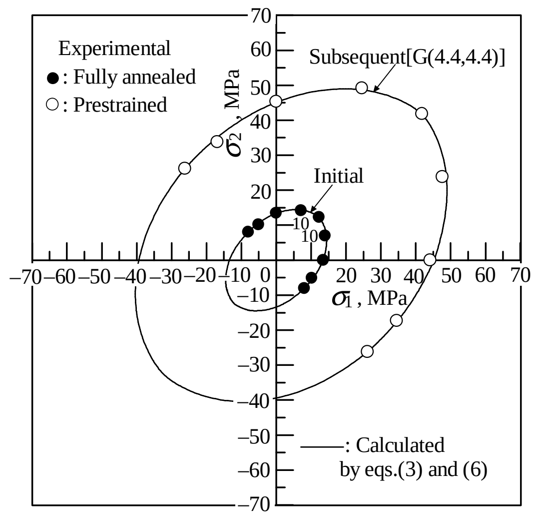
とおく．また，円周方向の塑性ひずみと軸方向の塑性ひずみの比$\xi=\varepsilon_y^p/\varepsilon_x^p$ については，初期変形における比例負荷下の塑性ひずみ経路が直線であったので Fig.7 に示した M 値と同じ値となる．すなわち, 4.1(2)項で述べたように引張予ひずみの場合 ξ =－0.456，組合せ予ひずみの場合ξ =－0.465 である．ただし，ねじり予ひずみの場合にはξ は不定となる．パラメータを決定するための特性値の選定に関しては，通常の多軸応力試験では軸荷重－ねじりおよび軸荷重－内圧の組合せ負荷試験が行われていることを考慮し，これらの組合せ負荷から得られる降伏応力を用いることにした.

(1) 引張予ひずみの場合　最初に式(6)のパラメータの導出法について述べる．$\sigma_x-\sqrt{3}\,\tau_{xy}$ 平面において引張り，圧縮および正ねじりの降伏応力をそれぞれσ_f, σ_r および$\sqrt{3}\,\tau_f$ とおく. さらに, この平面で $\tan\beta$=一定の組合せ負荷下の降伏応力を$\overline{\sigma}_{tt}$ (相当応力)とおき, これらを式(6)へ代入して連立式を解き，かつ最小 2 乗法を適用すると $B\varepsilon_0$, $A_{xxyy}+A_{zzxx}$ および A_{xyxy} が得られる．次に，θ=0°のときの$\sigma_1-\sigma_2$ 平面において等 2 軸引張り(α=45°)および開端内圧(α=90°)の降伏応力をそれぞれσ_{bt} およびσ_h とおき, 式(6)へ代入することにより $A_{xxyy}+A_{yyzz}$ および $A_{yyzz}+A_{zzxx}$ が得られる．結局，再度連立式を解くことによって各異方性パラメータを決定することができる．なお，C 値については C =1.265 と仮定した(4.1(1)項参照). Table2 の 2 行目にパラメータ値を示す.

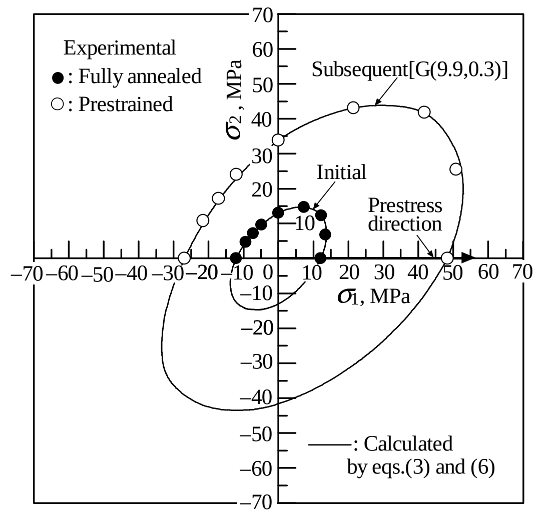
Fig.8 に後続降伏曲面の実験値と計算値を初期降伏曲面と比較して示す．緒言で述べたように, ひずみ履歴の影響によって材料には加工硬化，バウシンガ効果および新たな異方性の発達のような物理的現象が起こる．これらの現象は後続降伏曲



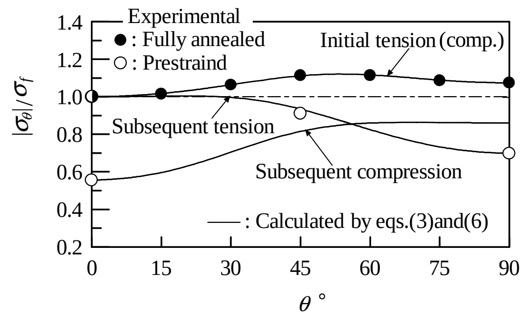
(a) $\sigma_x - \sqrt{3}\,\tau_{xy}$ plane



(c) $\sigma_1 - \sigma_2$ plane (θ=45°)



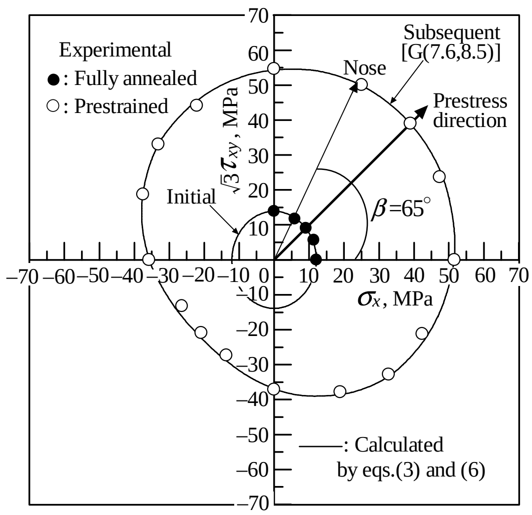
(b) $\sigma_1 - \sigma_2$ plane (θ=0°)



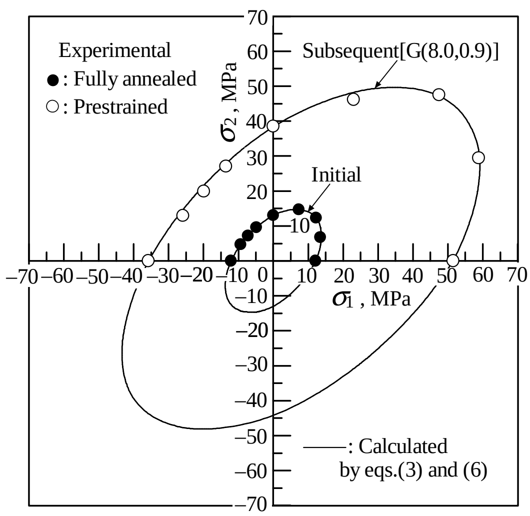
(d) Off-axis tension and compression

Fig.8　Subsequent yield loci specified by 0.05% off-set strain after tensile prestrain. G indicates a centroid of the subsequent yield locus. The subsequent tensile yield stress at θ=0°, σ_f, is 48.4 Mpa.

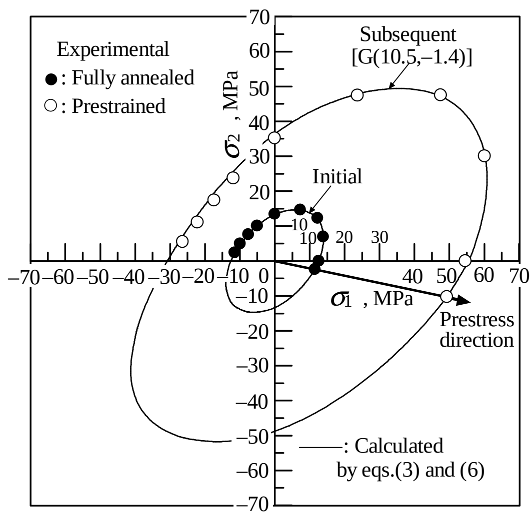
面に膨張，ゆがみ, 回転および移動として現れる[24]. 膨張とゆがみについては初期降伏曲面の形状と比較することによって比較的容易に識別できるが, 回転と移動についてはそれが容易でない．すなわち，降伏曲面が対称軸を持たない場合には回転量を評価できない．また移動量も何らかの基準点を定めないと定量化できない．そこで，後続降伏曲面の図心 G を測定し，線分 $\overline{\mathrm{OG}}$ の長さから移動量および線分 $\overline{\mathrm{OG}}$の傾きから移動方向を求めた．もし降伏曲面が対称軸を持ち，かつその軸が移動方向と一致する場合には移動方向が座標軸に対す曲面の回転角となる．(a)に$\sigma_x - \sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面における降伏曲面を示す．初期降伏曲面はσ_x 軸と$\sqrt{3}\,\tau_{xy}$ 軸に関して対称である．後続降伏曲面は予負荷方向に出っ張り，それと逆方向の領域で扁平となり, 異方的膨張によっていわゆる「おむすび形」の形状を呈する．曲面はσ_x 軸に関して対称であるので，図心はσ_x 軸上にあり，正方向へ 9.9Mpa 移動した．(b)と(c) にそれぞれθ=0°および 45° のときの$\sigma_1 - \sigma_2$ 平面における降伏曲面を示す．初期降伏曲面は主応力平面では原点に関して対称である．θ=0°のときの後続降伏曲面には 対称性がなく，α =1.7° の方向へ 9.9Mpa 移動した．一方，θ=45°のときには後続降伏曲面はσ_2=σ_1



(a) $\sigma_x - \sqrt{3}\ \tau_{xy}$ plane



(c) $\sigma_1 - \sigma_2$ plane (θ=0°)



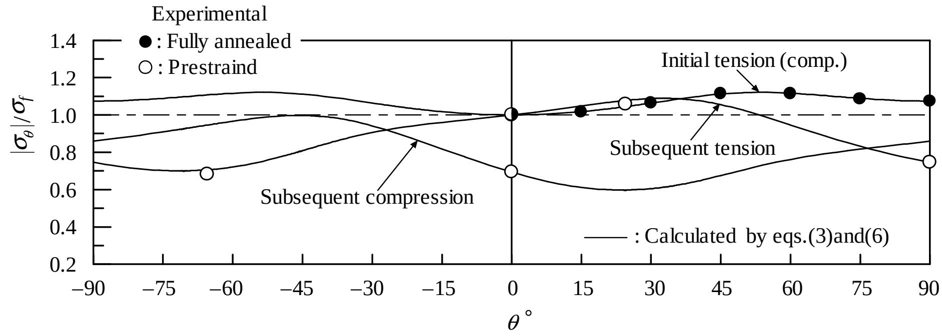
(b) $\sigma_1 - \sigma_2$ plane (θ=24.6°)

Fig.9　Subsequent yield loci specified by 0.05% off-set strain after combined prestrain. G indicates a centroid of the subsequent yield locus.

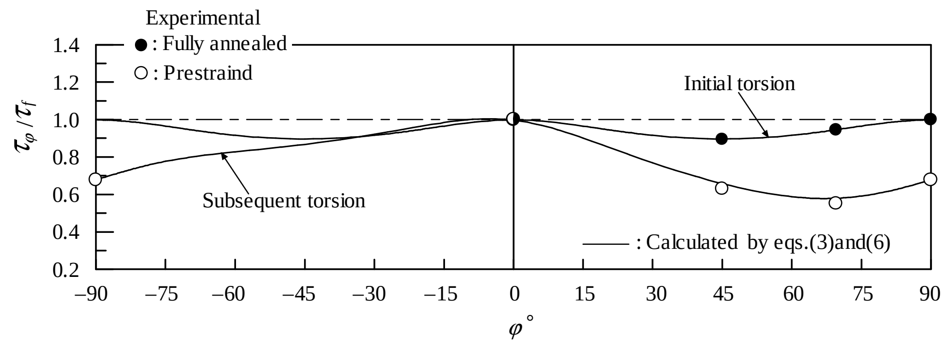
に関して対称であり，この直線上(α=45°)を右上へ 6.2Mpa 移動した. (d)は異方性の発現量を調べるために，off-axis 引張りおよび圧縮負荷下においてθに対する無次元化降伏応力の変化を示したものである．θが大きくなると後続の引張降伏応力はθ=20°まで極めてわずかであるが上昇し,その後低下する．一方, 圧縮降伏応力はθ=70°まで上昇する. そしてθ=56°以上では圧縮降伏応力の方が引張降伏応力よりも高くなる．σ_θ/σ_f = 1 からの最大変化はθ=0°のときの圧縮で生じる．すなわち，最大異方性はバウシンガ効果によって規定され，その発現量は$(1-|\sigma_\theta|/\sigma_f)_{max}$ ×100 =44.4%である．

(2) 組合せ予ひずみの場合　パラメータを決定する際の特性値は(1)の場合よりも 1 個多く採る必要がある．そこで逆ねじりの降伏応力$\sqrt{3}\ \tau_r$ も導入する．$\sigma_x - \sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面から得られる特性値を式(6)に代入して連立式を解くと $B\varepsilon_0$, $B\gamma_0$, $A_{xxyy}+A_{zzxx}$ およびA_{xyxy}が得られる．さらに，σ_{bt} およびσ_hを導入すると(1)の場合と同様に $A_{xxyy}+A_{yyzz}$ および $A_{yyzz}+A_{zzxx}$ が求まり，再度連立式を解くと異方性パラメータが得られる．Table2 の 3 行目にパラメータ値を示す.

Fig.9 に後続降伏曲面を初期降伏曲面と比較して示す．(a)～ (c)において後続降伏曲面は対称性を持たない．(a)の$\sigma_x - \sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面における後続降伏曲面は「歪んだおむすび形」の形状を呈する．すなわち，正のせん断応力成分の大きい領域で膨張が若干顕著である．この結果, $\bar{\sigma}_{max}$ の方向を出っ張り(nose)とするとそれは予負荷方向(β=45°)から 20°だけ反時計まわりに回転した方向に生じる. また，曲面はβ=48°方向へ 11.4Mpa 移動した．(b)にθ=24.6°のときの$\sigma_1 - \sigma_2$ 平面における降伏曲面を示す．後続降伏曲面の移動方向はα=－7.5°で，予



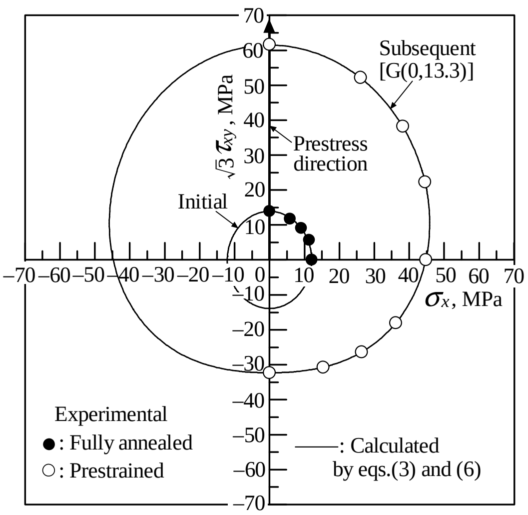
(d) Off-axis tension and compression



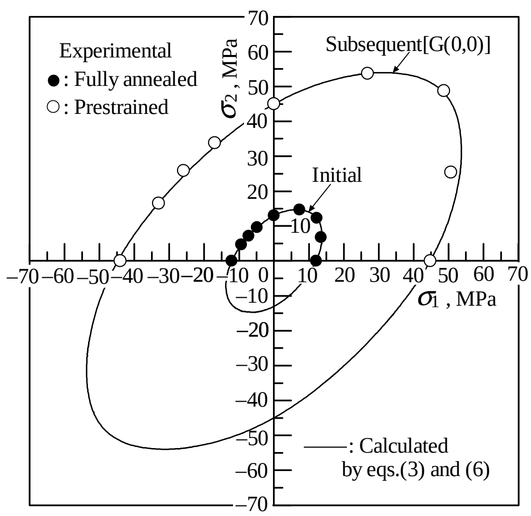
(e) Off-axis torsion

Fig.9 (Continued) Subsequent yield loci specified by 0.05% off-set strain after combined prestrain. The subsequent tensile yield stress at θ=0°and subsequent torsional yield stress at φ= 0°, σ_f and τ_f, are 51.6 Mpa and 31.6 Mpa, respectively.

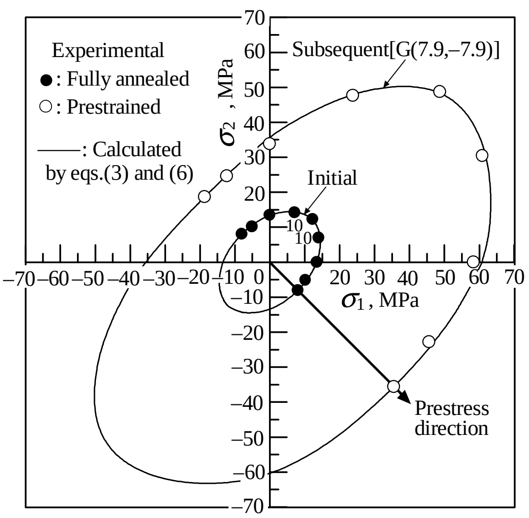
負荷方向(α=−11.8°)より角度が小さい．そして曲面の移動量は10.6Mpaであった．(c)にθ=0°のときの$\sigma_1-\sigma_2$平面における降伏曲面を示す．この平面における後続降伏曲面は比較的ゆがみが少なく，「だ円形」に近い形状を呈する．曲面の移動方向と移動量はそれぞれα=6.4°および8.0Mpaである．(d)に off-axis 引張りおよび圧縮負荷下における無次元化降伏応力の変化を示す．組合せ予ひずみの場合には降伏応力がθ=0°に関して非対称となるのでθ= –90°〜90°の範囲で描いている．後続の引張降伏応力と圧縮降伏応力はそれぞれ2箇所で極値をとる．θ=0°〜90°では，θが大きくなると後続の引張降伏応力はθ=33°まで上昇し,その後低下する．後続の圧縮降伏応力はθ=24°まで低下し,その後上昇する．そしてθ=77°で両者の降伏応力が一致する．一方，θ=0°〜–90°では，θが負の方向へ大きくなると後続の引張降伏応力はθ= –71°まで低下した後わずかに上昇し，後続の圧縮降伏応力はθ= –46°まで上昇した後低下する．両者の降伏応力はθ= –27°で一致する．最大異方性はθ=24°のときの圧縮で生じ，その発現量は$(1-|\sigma_\theta|/\sigma_f)_{max}\times 100$ =44.2%である．なお，後続の引張降伏応力が最大，後続の圧縮降伏応力が最小となる角度は(a)における出っ張りの方向(β=65°，θ=34°)および予負荷の逆方向(β= –135°，θ=24.6°) と完全には一致しない．この理由は$\sigma_x-\sqrt{3}\tau_{xy}$平面における組合せ比例負荷と off-axis 引張り(圧縮)とでは主応力比 tanα= σ_2/σ_1が異なるためである．すなわち，β=65°および –135°の場合 それぞれ σ_2/σ_1 = −0.46，−0.21 となる．(e)に off-axis ねじり負荷下における無次元化降伏応力の変化を示す．この図においても 降伏応力がφ= 0°に関して非対称となるので φ= –90°〜90° の範囲で描いている．予負荷の逆方向はθ とφ の関係式 φ=θ+45°から，φ= 69.6°となる．しかしながら，上述と同じ理由により， せん断降伏応力が最小となる角度



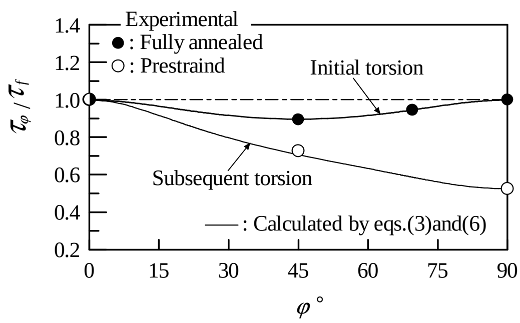
(a) $\sigma_x - \sqrt{3}\,\tau_{xy}$ plane



(c) $\sigma_1 - \sigma_2$ plane (θ=0°)



(b) $\sigma_1 - \sigma_2$ plane (θ=45°)



(d) Off-axis torsion

Fig.10　Subsequent yield loci specified by 0.05% off-set strain after torsional prestrain. G indicates a centroid of the subsequent yield locus. The subsequent torsional yield stress at φ= 0°, τ_f, is 35.6 Mpa.

は以下に述べるようにこの角度と一致しない．φ= 0°～90°では後続のせん断降伏応力はφが大きくなるとφ= 67°まで低下し，その後上昇する．一方，φ= 0°～–90°ではφ=–5°のとき最大値をとり，その後低下する．最大異方性はφ=67°のとき生じ，その発現量は$(1-\tau_\varphi/\tau_f)_{max}\times 100$ =42.3%である．

(3) ねじり予ひずみの場合　Table2 の 4 行目に式(6)のパラメータ値を示す．パラメータを決定する手順は(1)の場合と同様である．特性値としてσ_rのかわりに$\sqrt{3}\,\tau_r$ を導入し，$B\gamma_0$を決定することだけが異なる．

Fig.10 に後続降伏曲面を初期降伏曲面と比較して示す．(a)の$\sigma_x - \sqrt{3}\tau_{xy}$平面における後続降伏曲面は「おむすび形」の形状を呈するが，Fig.8(a)と比べると予負荷方向の膨張が大きい．図心は$\sqrt{3}\,\tau_{xy}$軸上にあり，正方向へ 13.3Mpa 移動した．(b)と(c)にそれぞれθ=45°および 0°のときの$\sigma_1 - \sigma_2$ 平面における降伏曲面を示す．θ=45°のときの後続降伏曲面は$\sigma_2 = -\sigma_1$に関して対称となり，予負荷方向(α=−45°)へ 11.2Mpa 移動した．形状的には出っ張りが不明瞭で，予負荷方向およびそれと逆方向の領域で扁平である．一方,θ=0°のとき後続降伏曲面は

「だ円形」に近い形状を呈し,初期降伏曲面と同様に原点に関して対称となる．これはバウシンガ効果がこの平面では陽に現れないためである．(d)に off-axis ねじり負荷下における無次元化降伏応力の変化を示す．後続のせん断降伏応力はφが大きくなると低下する．Fig.9(e)と比較すると低下量が多く，顕著な異方性を示す．最大異方性はφ=90°で生じ,バウシンガ効果によって規定される．その発現量は$(1-\tau_{\varphi}/\tau_{f})_{\max}\times 100$ =47.5%である．

5. 結　言

アルミニウム管 A1050TDH14 完全焼なまし材の初期降伏挙動と種々の予ひずみを受けた後の降伏挙動について，多軸応力試験結果および降伏条件式による解析結果を要約すると次のようになる．

(1) 初期降伏挙動について

(a) 完全焼なまし材の降伏曲面は Mises の曲面の外側にある．$\sigma_x-\sigma_y$ 平面では円周方向で高強度の直交異方性を示す．一方，$\sigma_x-\sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面では高いせん断強度を示し，「だ円形」の形状を呈する．

(b) 最大異方性については，off-axis 引張り負荷下においてθ=53°のとき 12.2% ，off-axis ねじり負荷下においてφ=45°のとき 10.4 %であり，前者の負荷の場合の方が強い異方性を発現する．

(2) 後続降伏挙動について

(a) 引張予ひずみの場合，$\sigma_x-\sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面では降伏曲面は予負荷方向に出っ張り，それと逆方向の領域で扁平となり，典型的な「おむすび形」の形状を呈する．θ=0°のときの主応力平面では曲面に対称性がなく，図心はα=1.7°の方向へ 9.9Mpa 移動しする．一方，θ =45°のときには曲面はσ_2=σ_1 に関して対称となり，ゆがみがなく，膨張および移動硬化を示す．最大異方性はバウシンガ効果によって規定され，その発現量は 44.4%である．

(b) 組合せ予ひずみの場合，降伏曲面は対称性を持たない．$\sigma_x-\sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面では「歪んだおむすび形」の形状を呈し,出っ張り方向と予負荷方向が一致しない．θ=24.6°のときの主応力平面における曲面の移動方向はα=－7.5°であり，予負荷方向(α=－11.8°)より角度が小さい．一方，θ=0°のときの曲面は膨張，移動および回転現象を示す．最大異方性の発現については，off-axis 圧縮負荷下においてθ=24°のとき 44.2%となる．

(c) ねじり予ひずみの場合，$\sigma_x-\sqrt{3}\tau_{xy}$ 平面における降伏曲面は「おむすび形」の形状を呈するが，引張予ひずみの場合と比較すると予負荷方向の膨張が大きい．θ=45°のときの主応力平面における曲面はσ_2=－σ_1 に関して対称となり，予負荷方向(α=－45°)へ 11.2Mpa 移動する．形状的には出っ張りが不明瞭となる．θ=0°のときの曲面はゆがみがなく，等方的に膨張する．最大異方性はバウシンガ効果によって規定され，その発現量は 47.5%である．この発現量は引張予ひずみの場合より大きい．

以上のように，提案した初期および後続降伏関数によって多軸応力試験結果を精度良く表すことが出来た．しかしながら，後続降伏関数はまだ完成された一般形となっていない．すなわち，バウシンガパラメータ B は次数を持っており，ひずみ履歴の影響を含んでいる．よって，Table2 においてパラメータ値として $B\varepsilon_0$ と $B\gamma_0$ を用いた．B の具体的関数形を見出すには，種々の予ひずみについて予ひずみ量を変化させた実験が必要である．

謝　辞

本研究をまとめるあたり，本学大学院工学研究科修士課程在学中，実験に協力された土田直道氏(現在，日本製紙クレシア㈱)並びに大久保健氏(現在，沖電気工業㈱)に感謝の意を表します．

参考文献

1) 例えば，池上皓三: 材料，**24**-263(1975)，709-719.
2) 例えば，白鳥英亮 ・池上皓三・金子堅司：機論(第 1 部), **39**-318(1973), 458-471.

3) T. Takeda &Y. Nasu : J. Strain Anal. Eng. Des, **26** -1(1991), 47-53.

4) 武田武信・白鳥英亮・池上皓三・熊倉重典・那須康雄 : 機論 A, **47**-418(1981), 665-675.

5) 武田武信・白鳥英亮・辛島誠一・那須康雄 : 塑性と加工, **24**-268(1983), 442-448.

6) F. Edelman & D.C. Drucker: J. Franklin Inst., **251** (1951), 581-605.

7) D. C. Drucker: J. Appl. Mech., **16**(1949), 349-357.

8) 武田武信・陳中春・菊地新一・谷村洋一 : 塑性と加工, **39**-454(1998), 1118-1122.

9) 武田武信・陳中春・中山智紀: 材料, **51**-7(2002), 788-794.

10) Y. Ohasi & N. Ohno : J. Mech. Phys. Solids, **30**-5 (1982), 287-304

11) W. Prager : J. Appl. Phys., **16**(1945), 837-840.

12) R. Hill : The Mathematical Theory of Plasticity, (1950), 317, Clarendon Press, Oxford.

13) T. Takeda : Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech., **115**-1 (1993), 77-82.

14) 吉村慶丸・竹中幸彦: 機論(第 1 部), **25**-155 (1959), 580-586.

15) D. W. A. Rees, : J. Strain Anal. Eng. Des., **16**-2 (1981), 85-95.

16) 武田武信・皆澤正徳 : 材料, **57**-7(2008), 681-687.

17) 武田武信・菊地新一・那須康雄: 日本非破壊査協会, 第４分科会資料, No.4704(1986), 13-20.

18) T. Takeda: J. Strain Anal. Eng. Des, **26** -3(1991), 201-207.

19) 武田武信: 塑性と加工, **48**-558(2007), 558-598.

20) 武田武信:山形大学紀要(工学), **30**(2008), 11-23.

21) G. Holloway & A. Shelton: J. Mech. Eng. Sci., **21**- 4(1979), 235-245.

22) T. Takeda & Z. Chen : Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech., **123**-3 (2001), 268-273.

23) 武田武信・水上貴博 : 材料, **57**-5(2008), 467-473.

24) J. Lemaitre & J.L.Chaboche: Mechanics of Solid Materials, (1990), 197, Cambridge Univ. Press.