山形大学紀要（工学）第32巻　平成22年２月
Bull. Yamagata Univ. (Eng.) Vol.32 Feb. 2010

〈随　想〉

僕の一日（$\sqrt{2}$の話し）

高　橋　眞　映

山形大学大学院理工学研究科

（平成21年10月５日受理）

山形に左沢線と言う鉄道路線がある．山形駅（正確には北山形駅）を始発とし，左沢駅を終点とする全長約24キロのJRの単線である．これは人間に例えると丁度盲腸に似ているので盲腸線と呼ぶ人もいるらしい．水戸に勤めていた頃，山形から来られた先生に「愛子駅」を何と読むかと試され，四苦八苦した経験がある．答えは「あやしえき」である．しかしまだその謂われを知らない．

昭和62年の秋，水戸から米沢に勤め替えしてから，この「左沢線」を知った．いつも仙台に行く途中山形駅を降りると，この表示が目に留まるからである．誰に教えてもらったか記憶にないが，これは「あてらざわえき」と読むことを知った．その謂われは，ある殿様が，左を見て，あれは何かと近従に聞いたのがその謂われらしいと記憶にある．米沢にいる間，その左沢に一度行って見たいと思い続けていたが，なかなかその機会がなかった．

ところが突然その機会が今日訪れた．それは春休みの一日であった．船橋にいる家族と共に数日を過ごし，昨日仙台に来て，再び今日東北大学の数学図書室に足を運んだ．そこで見付けた論文が，$\sqrt{2}$ が無理数である力学的証明であった．早速読んで感動した．しかし論文の最後に，同じ方法で

「*degree k* の代数的整数は整数かまたは無理数であることがわかる」

と述べてあった．勿論この命題から直ちに「$\sqrt{2}$が無理数である」事が分かるから，これはもっと一般的な結果である．証明なしで述べてあるので，この命題が真か偽か知りたくなった．そこでぶらぶら米沢まで帰る途中にけりを付けてみようと考えた．しかしまだ日が高いので，この際左沢に寄り道をしながら考えても良いのではないかと，ふっと思った．

実はその思いの半分は，僕が青春18切符を持っていたからである．仙山線で山形に向かう途中，上の命題の確かな証明が分かった．山形駅から左沢線に乗ったとき，上の命題で，「*degree k* の代数的整数でなくても，もっと一般の代数的数でいけるのではないか」と思うようになった．しかし初めて乗る線路である．まわりの景色が気になって仕方がない．四方山に囲まれた盆地の中を列車はゆったりと走っている．周囲は広々とした田圃である．ここで山形自慢米「はえぬき」が大量に取れるのかと思うと感無量であった．

途中駅に「寒河江駅」があった．実はあの有名な「寒河江」がこの辺だとは今日まで知らなかったのである．何故有名かと言えば，先ず山形新幹線の途中駅に「さくらんぼ東根駅」がある．僕は以前「京女に東男と言うが，山形では寒河江女に東根男と言うんだよ」と聞かされていたからである．そう言えば，列車に乗っている女性は美人が多かった．終点間近になって，殆ど乗客がいなくなった．その時何故か突然，この線路はもしかしたら私鉄かも知れないと言う不安に陥った．そこで隣の始発から乗り合わせていた女高生にそのことを聞いて見た．その女高生の返事は「勿論OK」と言う事だったので，調子に乗って，「左沢」の謂われとお城の有無を聞いて見たが，どちらもわからないと言う返事だった．僕は「当世の若い者は」

と言う例の失望感を少し味わった．もっとも明治生まれの人が「いまの若いもんは」と言ったそうであるから，是とすべきでしょうか？ところで明治以前の人はどうだったのでしょうか？調べてみると面白そうですね．

さて左沢駅を降りると，とっくにお昼を過ぎていたので，駅前の「丸五そば屋」と言う味自慢の店に入って，700円の「もりてんそば」を注文した．蕎麦は寒暖の激しい所で育ったものが一番美味しいと言う店のうたい文句通り，なかなかの味だった．食べ終わってから，表に出てぶらぶら最上川の橋を渡り，反転して，旧最上橋を渡って，川端まで降りて，ぶらぶら最上川裏街道を歩いた．このときは数学は全く考えなかった．裏街道の終点で，散歩コースの地図を見付けた．それは，その地点から楯山公園を登って左沢小学校を経て左沢駅に戻ると言うコースで，そこからは約２キロ半と言うものであった．帰りの時間に間に合うと思った僕はそのコースに挑戦した．

しかし途中分からなくなったので，丁度車から出てきたおばさんに楯山公園に行く道を聞いて見た．おばさんは,「楯山公園は遠くてとても歩いて行けないから，私が車で送ってあげるよ」と親切に言ってくれた．地図ではこの辺から800メートルとあったが，おばさんの申し出に素直に従うことにした．おばさんの車は minika と言う軽自動車だった．楯山公園は高さ百数十メートルの山と言うか，岡の上にあった．そこまで行くには確かに自動車道路では長かった．途中おばさんは,「わたしらの子供の頃は良くここに登って杉のヤニを取ったものだよ」と言った．良く聞いて見ると，そのヤニを薄いゴムでくるんで，ガムの代わりにしたそうである．不思議に思ったので,「それは昭和何年頃の話しですか？」と聞くと，丁度僕が生まれた終戦の年の頃だったと言うことである．彼女は13年生まれだそうで，おばさんは僕より若いと思っていたので，正直びっくりした．そして「僕もまだまだだなー」とそのとき思った．おばさんは逆に僕に何処の生まれかと聞いたので,「佐渡島」と答えると,「へー」と言ってびっくりされた．多分，佐渡島は彼女にとっては遠い存在なのだろう．頂上に着いて，彼女と別れてから，のんびりそこからの景色を楽しんだ．眼下に広がるそれは，雄大な最上川と大江町のコントラストであった．そばに

「最上川のさかまくみづを今日は見て心の充つるさ夜ふけにけり」

と言う茂吉の歌碑があった．帰りはもと来た車道をと思ったが，職人さん達が，急な斜面の道を降りていったので，僕もついて行った．実はこの公園は別名「日本一公園」と言うのだそうで，その看板の作り替えの仕事を彼等は請け負っていたのである．僕はそのまま職人さん達を後にして，下の部落までぬかるんだ道を慎重に降りて行った．頂上から下まで，ものの10分もかからなかった．しかし汗をかいてしまった．どうもこのルートが先程の800メートルの範ちゅうらしい．先程のおばさんは僕が800メートルと言うと，それは高さの事を言っているのでは，と，いぶかっていた．人間，特に高さの事となると皆目検討違いをするものだ．脳の何処でそのような錯覚をするのか不思議である．

降りてからまたぶらぶら左沢駅に向かって歩いていると，向こうから，左沢小学校の生徒らしい女の子がやって来た．遠くから突然「今日は」と言われたので，少々面食らったが，僕も「今日は」と返した．それでは素っ気ないので,「何年生」と愛想をすると,「五年生」と大きな声で返事をしてすがすがしく去って行った．それからしばらくすると，今度は男の子がやって来た．僕は高を括っていたら，３メートルくらい近づいたとき，突然「今日は」と言われた．僕は自分を恥じて，直ぐ「今日は」と返した．そして申し訳程度に「何年生」と聞いて見た．彼はやはり快活に「五年生」と大きな声を残して去って行った．僕は気分が良くなった．そして，どうも今日は左沢小学校の５年生達は学校に居残って何かしていたのかなと推察した．

さて近道をしたので，予定より随分早く駅に着いてしまった．そこで駅に付随して いる土産センターもどきに入り，いろいろ調べてみた．そこで左沢の事がいろいろ判明した．「あてらざわ」の謂われは諸説有るが，どうも僕の記憶のように，ある殿様が，ある岡に登って西方を見ながら，左手にある山谷を指し,「あちらの沢は」と言ったのが有力のようである．また楯山公園は左沢楯山城跡

であることも分かった．

鎌倉時代の初期，鎌倉幕府の公文所初代別当大江広元が寒河江の荘の地頭となり，この辺の支配が始まった．そして室町時代の初期，大江一族の左沢元時が左沢楯山城を築城し，17世紀前半に廃城となった．その間のいきさつは，安土桃山時代の1584年大江氏の滅亡と共に，最上氏の支配が始まった．しかし，江戸時代の1662年最上氏改易と共に，鶴岡藩主の弟，酒井直次が左沢藩主となって，小漆川に新しく左沢城を築城した．僕は始め，左沢楯山城と左沢城がどう違うのか分からず，土産売り場の女の子に聞いて見た．彼女合点が行かず，手元の本を差し出してくれたので，その本によって，その違いが判明したというわけである．

またこの辺一体を大江町と言うのであるが，僕はてっきり大江一族に因んで付けたものと合点したがそれは早とちりというものであった．実は大江とは揚子江を指すのであった．中国明の時代の詩人高啓（こうけい）の漢詩の大江を指す揚子江にこの付近の最上川が良く似ている事を念頭に，時の県知事我孫子藤吉が町村合併のおり「大江町」と命名したと言うのである．偶然とは言え不思議なことである．

僕は彼女への遠慮もあって，何か買わなきゃと思い，大江錦と言うワンカップ酒を買うことにした，300円である．しかし10個くらいあったどれもが昨年の８月製造であった．これは「イカンガー」と思い，更に見ると，同じ大江錦の４合ビンがあった．これは今年の１月製造だったので，奮発してこれを買った．980円であった．

帰りの列車で,「もっと一般の代数的数でいけるのではないか」と言う問題は解けた．しかしこれは整数係数の n 次方程式が実解を持てばと言う条件付きである．数学の世界は条件のない方が美意識に富む．そこでこの条件もとったらどうなるかと考えてみた．答えは

「整数点係数を持つ n 次方程式は真の有理点解を持たない」

である．これは赤湯駅にさしかかった頃，頭の中で出来た．従ってまだ本当かどうか定かでない．この赤湯駅は以前にも，Korovkin型定理やHlawka型不等式に関する論文の key lemma が出来た所であり，僕にとって縁起の良い駅なのである．

米沢駅に着いてから，急に今日の出来事を文章化して見たくなったので，急いでタクシーを飛ばし僕の研究室に戻った．そして例の本醸造大江錦をやりながら，これを書いている．楽しい一日であった．

追記Ⅰ 帰りの列車で，「もっと一般の代数的数でいけるのではないかと言う問題は解けた」と書いたが，これが全くの勘違いであった．数日後の夜，これを纏める段階で勘違いに気付いた．そして簡単に反例を出すことが出来たのである．従って「答えは「整数点係数を持つ n 次方程式は真の有理点解を持たない」である」と書いた事も間違いであった．そこで少し頑張って，翌朝まで次のような結果を出して見た．新しい結果とは思わないが，力学的証明の楽しさを味わった．

話はこうである．いま複素平面Ｃにおいて，両方の座標が整数である点を整数点と呼ぶことにする．また有理数である点を有理数点と呼ぶことにする．勿論整数点は有理点であるが，有理数点以外の点を無理数点と呼ぶことにする．整数点の全体をZ_{C}, 有理数点の全体をQ_{C}で表す．このとき，Q_{C}は自然に可換環となり，Z_{C}はQ_{C}の部分環となる事に注意する．このとき次の結果を得る．

定理．整数点係数を持つ n 次方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

の解$x=a$が条件

$$\exists \hat{a}\in \mathrm{Z}_{\mathrm{C}} : 0<\left|a-\hat{a}\right|<\frac{1}{\left|a_0\right|} \qquad (\#)$$

を満たすならば，a は無理数点である．

上の定理から次の系が直ちに導かれる．

系１．整数係数 monic n 次方程式の実数解は整数かまたは無理数である．

系２．整数点係数 monic n 次方程式の解は整数点か無理数点のどちらかである．

定理の証明．Let a be a solution of (1) which satisfies (#). Suppose $a\in\mathrm{Q}_{\mathrm{C}}$. Since $a-\hat{a}\in\mathrm{Q}_{\mathrm{C}}$, it follows that

$$a - \hat{a} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

for some $p,q \in Z_C \setminus \{0\}$. Firstly we show the following

$$a^m q^{-1} \in Z_C \ (0 \leqq m \leqq n-1) \qquad (3)$$

and

$$a_0^{m-n+1} a^k q^{n-1} \in Z_C \ (n \leqq k \leqq m) \qquad (4)$$

If $0 \leqq m \leqq n-1$, then $aq = \hat{a}q + p \in Z_C$ by (2) and hence

$$a^m q^{n-1} = (aq)^m q^{n-m-1} = (\hat{a}q+p)^m q^{n-m-1} \in Z_C,$$

so (3) holds. Multiplying each side of (1) by q^{n-1}, we have from (3) that

$$a_0 a^n q^{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} a_k a^{n-k} q^{n-1} \in Z_C. \qquad (5)$$

Multiplying each side of (5) by $a_0 a$, we have from (3) and (5) that

$$a_0{}^2 a^{n+1} q^{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} a_k a_0 a^{n+1-k} q^{n-1} \in Z_C.$$

By using the same argument, we have

$$a_0^{l+1} a^{n+l} q^{n-1} \in Z_C \ (\ell = 0,1,2,\cdots). \qquad (6)$$

Hence if $m \geqq n$, then we have from (6) that

$$a_0^{m-n+1} a^k q^{n-1} = a_0^{m-k} a_0^{(k-n)+1} a^{n+(k-n)} q^{n-1} \in Z_C \ (n \leqq k \leqq m),$$

and so (4) holds. Now put $x_m = a_0^{m-n+1} (a - \hat{a})^m q^{n-1}$ $(m \geqq n)$, then $x_m \neq 0 (m \geqq n)$ by (2). Note that

$$x_m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \hat{a}^{m-k} a_0^{m-n+1} a^k q^{n-1} + \sum_{k=n}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \hat{a}^{m-k} a_0^{m-n+1} a^k q^{n-1}.$$

Since the first term of the above equation belongs to Z_C by (3) and the second term also belongs to Z_C by (4), we have

$$x_m \in Z_C \setminus \{0\} (m \geqq n). \qquad (7)$$

However since a satisfies (#), it follows that

$$|x_m| = |a_0|^m \, |a - \hat{a}|^m \, \left|\frac{q}{a_0}\right|^{n-1} \to 0 \ (\text{as } m \to \infty).$$

This contracts (7) and so a must be an irrational point. Q. E. D.

追記 II 実は念のため，上のことを論文形式に纏めて，専門誌に投稿して見たのであるが，見事 reject された．refereeの意見は，本質的な所は既に知られていると のことで，予想通りであった．どうも慣れないことは慎むべきであったと反省したが，数学の楽しさは味わった．この歳になると，これも一計かと感じる今日この頃である．

参考文献

１．B. Richard, Irrationality without number theory, Amer. Math. Monthly, 98(1991), 328-332.

２．N. C. Ferreno, Yet another proof of the irrationality of $\sqrt{2}$, Amer. Math. Monthly, 116(2009), 68-69.